55e année 30 novembre 1929 N° 24

BULLETIN TECHNIQUE
DE LA SUISSE ROMANDE

Réd. : Dr H. Demierre, ing. Paraissant tous les 15 jours

ORGANE DE PUBLICATION DE LA COMMISSION CENTRALE POUR LA NAVIGATION DU RHIN
ORGANE DE L'ASSOCIATION SUISSE D'HYGIÈNE ET DE TECHNIQUE URBAINES
ORGANE EN LANGUE FRANÇAISE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES INGÉNIEURS ET DES ARCHITECTES

Représentation de la ligne élastique des poutres droites au moyen des séries trigonométriques et calcul de systèmes hyperstatiques d'ordre élevé par décomposition en systèmes fondamentaux,[1]

par M. le Dr Maurice PASCHOUD, Recteur de l'Université de Lausanne.

Bibliographie: S. Timoshenko, *Applied Elasticity*, 1re édition, 1925, p. 129-132 et p. 161-165. Cet ouvrage a été traduit en allemand par le Dr Malkin et a paru sous le titre *Festigkeitslehre*, chez Springer, en 1928.

A) *Emploi de l'énergie potentielle de déformation.*

Considérons d'abord le cas d'une poutre à deux appuis simples, sollicitée par une charge concentrée P (figure 1).

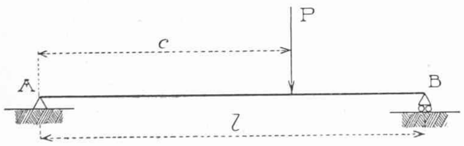

Fig. 1.

On peut dans ce cas prendre pour équation de l'élastique une expression de la forme

$$y = a_1 \sin\frac{\pi x}{l} + a_2 \sin\frac{2\pi x}{l} + a_3 \sin\frac{3\pi x}{l} + \ldots \tag{1}$$

x est l'abscisse d'un point de l'élastique, y son ordonnée et les a_i sont des coefficients que nous allons déterminer.

La signification géométrique de (1) est évidente.

M étant le moment fléchissant dans une section de la poutre de moment d'inertie I et de coefficient d'élasticité E, on a la relation classique

$$M = -EI\frac{d^2y}{dx^2}. \tag{2}$$

L'énergie potentielle de déformation de la poutre a pour expression

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2 dx}{EI},$$

qui devient, en tenant compte de (2)

$$U = \frac{EI}{2}\int_0^l \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx. \tag{3}$$

Calculons d^2y/dx^2 au moyen de l'expression (1) et remplaçons cette dérivée seconde par son expression dans (3). Il vient, en tenant compte des relations bien connues

$$\int_0^l \sin^2\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{l}{2} \quad \text{et} \quad \int_0^l \sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx = 0$$

$$U = \frac{EI\pi^4}{4l^3}(1^4 a_1^2 + 2^4 a_2^2 + \ldots) = \frac{EI\pi^4}{4l^3}\sum_{n=1}^{\infty} n^4 a_n^2. \tag{4}$$

Cette expression obtenue, remarquons que lorsqu'un système élastique subit, à partir d'une position d'équilibre, une petite déformation, l'accroissement de son énergie potentielle est égal au travail effectué par les forces extérieures pendant la déformation.

Supposons que, seul, le coefficient a_n varie de da_n ; le terme $a_n \sin\frac{n\pi x}{l}$ variera de $da_n \sin\frac{n\pi x}{l}$ et le travail effectué par la force P, d'abscisse c, sera

$$da_n \sin\frac{n\pi c}{l}\,.\,P. \tag{5}$$

L'énergie potentielle de déformation, elle, varie de

$$\frac{\partial U}{\partial a_n}da_n = \frac{EI\pi^4}{2l^3}n^4 a_n\,da_n. \tag{6}$$

En égalant (5) et (6), on obtient

$$a_n = \frac{2Pl^3 \sin\frac{n\pi c}{l}}{EI\pi^4 n^4},$$

d'où finalement

$$y = \frac{2Pl^3}{EI\pi^4}\left(\frac{\sin\frac{\pi c}{l}\sin\frac{\pi x}{l}}{1^4} + \frac{\sin\frac{2\pi c}{l}\sin\frac{2\pi x}{l}}{2^4} + \ldots\right) \tag{7}$$

qui est l'équation cherchée, sous forme complètement explicite. On en déduit, si l'on fait $x = \frac{l}{2} = c$, pour la

[1] Leçon faite au Cours théorique et pratique de béton armé, organisé par la Société suisse des ingénieurs et des architectes, à Lausanne, du 8 au 12 octobre dernier. (Voir *Bulletin technique* du 16 novembre 1929, page 269.)