Sur l'introduction des coordonnées cartésiennes obliques dans la Théorie de l'élasticité

Autor(en): **Favre, Henry**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin technique de la Suisse romande**

Band (Jahr): **72 (1946)**

Heft 25

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-54639

BULLETIN TECHNIQUE
DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les 15 jours

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des anciens élèves de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.

Sur l'introduction des coordonnées cartésiennes obliques dans la Théorie de l'élasticité [1]

par HENRY FAVRE,
professeur à l'Ecole polytechnique fédérale, Zurich.

Les lois générales de la Théorie de l'élasticité peuvent être exprimées d'une manière intrinsèque, à l'aide de vecteurs et de tenseurs. Cependant, lorsqu'il s'agit de résoudre des problèmes où les conditions aux limites sont données, il est commode d'introduire un système de coordonnées. Le choix de ce système dépend avant tout de la surface limitant le corps considéré. Pour un parallélépipède rectangle, par exemple, il est indiqué de choisir des coordonnées cartésiennes rectangulaires ; pour une sphère, des coordonnées polaires, etc. A chacun de ces systèmes correspond une forme particulière des équations générales régissant les tensions et les déformations du solide.

On a surtout utilisé, jusqu'à présent, les coordonnées cartésiennes rectangulaires, les coordonnées polaires et les coordonnées semi-polaires ou cylindriques, exceptionnellement les coordonnées curvilignes orthogonales (LAMÉ). Si, toutefois, le corps considéré est un *parallélépipède oblique*, en particulier une *plaque mince dont le contour est un parallélogramme* (plaque oblique), il y a alors un intérêt évident à introduire des *coordonnées cartésiennes obliques.* L'objet de notre communication est précisément d'établir ou de rappeler, selon les cas, les équations en coordonnées obliques permettant de résoudre les problèmes relatifs aux plaques minces et de présenter quelques applications de ces équations.

Dans la première partie (§ 1), nous établirons les équations générales régissant les *états de tension à deux dimensions.* Nous examinerons ensuite la question de la *déformation des plaques fléchies* (§ 2), puis celle de la *vibration transversale des plaques* (§ 3).

§ 1. Etats de tension à deux dimensions, en coordonnées obliques.

Soient Ou, Ov deux axes obliques, parallèles au plan des tensions et Oz un axe perpendiculaire à ce plan (fig. 1). Définissons les *composantes des tensions en coordonnées obliques.* A cet effet, soient deux éléments de surface respectivement parallèles aux plans (u, z) et (v, z). En décomposant la tension totale, relative au premier élément, suivant les directions u, v, on obtient deux composantes que nous désignerons par τ_{vu} et σ_v. De même, en décomposant la tension totale relative au second élément, on définit σ_u et τ_{uv}.

En appliquant aux quatre tensions tangentielles de la figure 2, le théorème des moments (par rapport à un axe $0'$ parallèle à z), on voit que :

$$\tau_{uv} = \tau_{vu}, \tag{1}$$

quel que soit l'angle α des axes u, v.

[1] Extrait des Comptes rendus du Sixième congrès international de Mécanique appliquée, Paris, 1946.

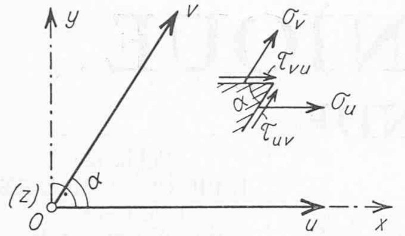

Fig. 1.

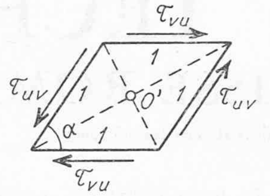

Fig. 2.

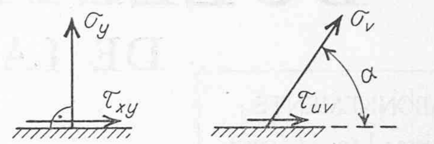

Fig. 3.

Cherchons les relations entre les tensions σ_u, σ_v, $\tau_{uv} = \tau_{vu}$ et les composantes σ_x, σ_y, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ dans le système cartésien rectangulaire $Oxyz$, dont l'axe x coïncide avec u (fig. 1). La comparaison des deux parties de la figure 3 montre que :

$$\sigma_y = \sigma_v \sin \alpha, \qquad \tau_{xy} = \tau_{uv} + \sigma_v \cos \alpha.$$

La somme des projections sur l'axe u, des forces agissant sur l'élément de volume indiqué dans la figure 4 devant être nulle, on a de plus :

$$\sigma_u + \tau_{uv} \cos \alpha + \tau_{xy} \cos \alpha - \sigma_x \sin \alpha = 0.$$

En résolvant le système constitué par les trois dernières équations, par rapport à σ_u, σ_v, τ_{uv}, on obtient :

$$\left.\begin{aligned} \sigma_u &= \sin \alpha \cdot \sigma_x + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} \cdot \sigma_y - 2 \cos \alpha \cdot \tau_{xy}, \\ \sigma_v &= \frac{1}{\sin \alpha}\, \sigma_y, \qquad \tau_{uv} = \tau_{xy} - \frac{1}{tg\, \alpha} \cdot \sigma_y. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

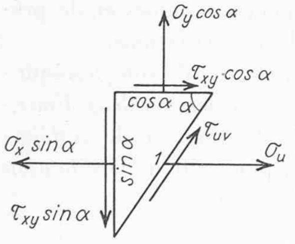

Fig. 4.

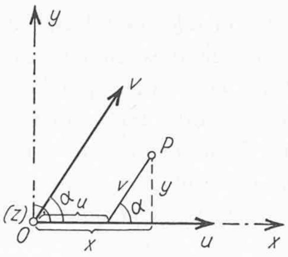

Fig. 5.

— En coordonnées cartésiennes rectangulaires, les composantes σ_x, σ_y, τ_{xy} d'un état de tension bi-dimensionnel peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y}, \tag{3}$$

en supposant qu'aucune force massique n'agisse sur le corps. La *fonction d'Airy* $\varphi\ (x, y)$ satisfait à l'équation différentielle du 4^e^ ordre :

$$\Delta\Delta\varphi = 0, \quad (4) \qquad \text{où } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{5}$$

désigne l'opérateur de *Laplace*.

— Cherchons les expressions en fonction de φ des composantes des tensions en coordonnées obliques. En substituant les expressions (3) dans les équations (2), on obtient :

$$\left.\begin{aligned} \sigma_u &= \sin \alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2 \cos \alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \\ \sigma_v &= \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \qquad \tau_{uv} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{tg\, \alpha} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Pour introduire les dérivées de φ par rapport à u, v, on a les relations suivantes entre les coordonnées u, v, z et x, y, z d'un point P (fig. 5) :

$$x = u + v \cos \alpha, \qquad y = v \sin \alpha, \qquad z = z, \tag{7}$$

d'où :

$$u = x - \frac{y}{tg\, \alpha}, \qquad v = \frac{y}{\sin \alpha}; \tag{8}$$

$$\text{et : } \frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{tg\, \alpha}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

φ pouvant être considéré comme une fonction composée des variables indépendantes x, y, on a les formules de transformation suivantes :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\text{tg}\, \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) =$$

$$= \left(-\frac{1}{\text{tg}\, \alpha} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial v} \right) \left(-\frac{1}{\text{tg}\, \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right),$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{1}{\text{tg}^2\, \alpha} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \frac{2}{\sin \alpha\, \text{tg}\, \alpha} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \tag{9}$$

On obtient de même :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}, \quad (10) \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{\text{tg}\alpha} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \tag{11}$$

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - 2 \cos \alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \right). \tag{12}$$

Les équations (6) deviennent, en tenant compte de (9), (10) et (11) :

$$\sigma_u = \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}, \qquad \sigma_v = \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}, \qquad \tau_{uv} = -\frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v},$$

ou bien, comme la fonction φ n'est définie qu'à un facteur constant près :

$$\boxed{\sigma_u = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}, \qquad \sigma_v = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}, \qquad \tau_{uv} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v},} \tag{13}$$

φ désignant une solution de l'équation :

$$\Delta\Delta\varphi = \frac{1}{\sin^4\alpha}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2\cos\alpha\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)$$

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} - 2\cos\alpha\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\right) = 0,$$

ou

$$\boxed{\frac{\partial^4\varphi}{\partial u^4} + \frac{\partial^4\varphi}{\partial v^4} - 4\cos\alpha\left(\frac{\partial^4\varphi}{\partial u^3\,\partial v} + \frac{\partial^4\varphi}{\partial u\,\partial v^3}\right) + 2\left(1 + 2\cos^2\alpha\right)\frac{\partial^4\varphi}{\partial u^2\,\partial v^2} = 0.} \qquad (14)$$

Il est remarquable que les expressions (13) de σ_u, σ_v, τ_{uv} en coordonnées cartésiennes obliques soient *identiques* aux expressions (3) de σ_x, σ_y, τ_{xy} en coordonnées cartésiennes rectangulaires. Le premier membre de l'équation d'Airy (14) contient, toutefois, un terme dépendant des dérivées $\dfrac{\partial^4\varphi}{\partial u^3\,\partial v}$, $\dfrac{\partial^4\varphi}{\partial u\,\partial v^3}$. Ce terme est nul dans le cas des axes orthogonaux ($\alpha = \pi/2$).

— A toute fonction $\varphi\,(u, v)$ correspond un état de tension bi-dimensionnel σ_u, σ_v, τ_{uv} déterminé, et réciproquement. Définissons quelques états de tension, en choisissant pour φ différentes fonctions élémentaires :

1°) *Polynôme homogène du second degré :*

$$\varphi_2 = \frac{a_2}{2}u^2 + b_2\,uv + \frac{c_2}{2}v^2, \qquad (15)$$

Cette fonction satisfait à l'équation (14) quelles que soient les constantes a_2, b_2, c_2. Les composantes des tensions sont, d'après (13) :

$$\sigma_u = c_2, \quad \sigma_v = a_2, \quad \tau_{uv} = -\,b_2. \qquad (16)$$

Cet état de tension est *anisotrope*, mais *homogène.*

2°) *Polynôme homogène du troisième degré :*

$$\varphi_3 = \frac{a_3}{6}u^3 + \frac{b_3}{2}u^2 v + \frac{c_3}{2}uv^2 + \frac{d_3}{6}v^3 \qquad (17)$$

Cette fonction satisfait également à l'équation (14) quelles que soient les constantes a_3, b_3, c_3, d_3. Les composantes des tensions sont :

$$\sigma_u = c_3 u + d_3 v, \quad \sigma_v = a_3 u + b_3 v, \quad \tau_{uv} = -\,b_3 u - c_3 v. \qquad (18)$$

Ces composantes sont des *formes linéaires* des coordonnées u, v.

3°) *Polynôme homogène du quatrième degré :*

$$\varphi_4 = \frac{a_4}{4.3}u^4 + \frac{b_4}{3.2}u^3 v + \frac{c_4}{2}u^2 v^2 + \frac{d_4}{3.2}uv^3 + \frac{e_4}{4.3}v^4. \qquad (19)$$

En introduisant cette fonction dans l'équation (14), cette dernière se réduit à :

$$a_4 + e_4 - 2\cos\alpha\,(b_4 + d_4) + 2\,(1 + 2\cos^2\alpha)\,c_4 = 0. \qquad (20)$$

Les composantes des tensions sont :

$$\left.\begin{aligned} \sigma_u &= c_4\,u^2 + d_4\,uv + e_4\,v^2, \\ \sigma_v &= a_4\,u^2 + b_4\,uv + c_4\,v^2, \\ \tau_{uv} &= -\frac{b_4}{2}u^2 - 2\,c_4\,uv - \frac{d_4}{2}v^2, \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

$a_4, \ldots, e_4$ devant satisfaire à la condition (20). Ces composantes sont des *formes quadratiques* des coordonnées u, v.

4°) *Polynôme homogène du cinquième degré :* (22)

$$\varphi_5 = \frac{a_5}{20}u^5 + \frac{b_5}{12}u^4 v + \frac{c_5}{6}u^3 v^2 + \frac{d_5}{6}u^2 v^3 + \frac{e_5}{12}uv^4 + \frac{f_5}{20}v^5.$$

En introduisant cette fonction dans (14) et en identifiant, on obtient entre les constantes $a_5, \ldots, f_5$ les deux relations :

$$\begin{aligned} &3a_5 + e_5 - 4\cos\alpha\,(b_5 + d_5) + 2\,(1 + 2\cos^2\alpha)\,c_5 = 0, \\ &b_5 + 3f_5 - 4\cos\alpha\,(c_5 + e_5) + 2\,(1 + 2\cos^2\alpha)\,d_5 = 0. \end{aligned} \qquad (23)$$

Les composantes des tensions sont les *formes cubiques* :

$$\left.\begin{aligned} \sigma_u &= \frac{c_5}{3}u^3 + d_5\,u^2 v + e_5\,uv^2 + f_5\,v^3, \\ \sigma_v &= a_5\,u^3 + b_5\,u^2 v + c_5\,uv^2 + \frac{d_5}{3}v^3, \\ \tau_{uv} &= -\frac{b_5}{3}u^3 - c_5 u^2 v - d_5\,uv^2 - \frac{e_5}{3}v^3. \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Dans le cas particulier où $a_5 = b_5 = c_5 = 0$, $d_5 \neq 0$, on a, en résolvant (23) par rapport à e_5 et f_5 et en substituant dans (24) :

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_u = d_5\left[u^2 v + 4\cos\alpha\,uv^2 - \frac{2}{3}(1 - 6\cos^2\alpha)\,v^3\right], \\ &\sigma_v = \frac{d_5}{3}v^3, \qquad \tau_{uv} = -\,d_5\left(uv^2 + \frac{4}{3}\cos\alpha\,v^3\right). \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Applications.

Considérons une plaque limitée par un parallélogramme de côtés $2\,l$ et $2\,c$, l étant plus grand que c (fig. 6). Choisissons les axes u, v indiqués dans la figure. Supposons qu'on applique, le long du bord supérieur $2\,l$, une surcharge uniforme oblique p, parallèle à v, et que les côtés $2\,c$ de la plaque reposent sur des appuis dont les réactions soient équivalentes à deux forces pl parallèles à l'axe v, mais de sens contraire. Cette plaque constitue une « poutre simple oblique » dont le profil est un rectangle de largeur constante, largeur que nous choisirons comme unité de longueur.

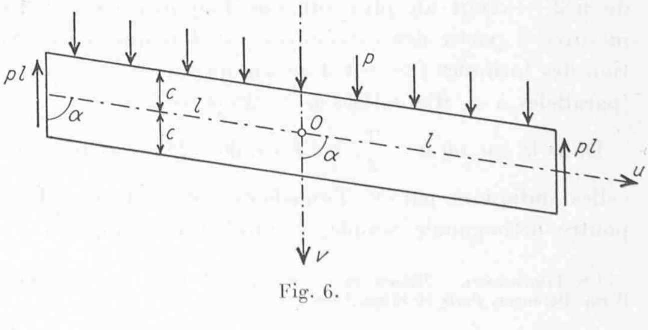

Fig. 6.

Déterminons la répartition des tensions intérieures. Les composantes σ_u, σ_v, τ_{uv} doivent satisfaire aux conditions aux limites suivantes :

$$\left.\begin{aligned} &(\tau_{uv})_{v=\pm c}=0, \quad (\sigma_v)_{v=+c}=0, \quad (\sigma_v)_{v=-c}=-p, \\ &\int_{-c}^{+c}(\tau_{uv})_{u=\pm l}dv=\mp pl, \int_{-c}^{+c}(\sigma_u)_{u=\pm l}dv=0, \int_{-c}^{+c}(\sigma_u)_{u=\pm l}v\,dv=0. \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

Cherchons à satisfaire à ces conditions en superposant les tensions données par les formules (16), (18) et (25), c'est-à-dire en posant :

$$\left.\begin{aligned} \sigma_u &= c_2 + c_3 u + d_3 v + \\ &+ d_5\left[u^2 v + 4\cos\alpha\, u v^2 - \frac{2}{3}(1-6\cos^2\alpha)\, v^3\right], \\ \sigma_v &= a_2 + a_3 u + b_3 v + \frac{d_5}{3} v^3, \\ \tau_{uv} &= -b_2 - b_3 u - c_3 v - d_5\left(u v^2 + \frac{4}{3}\cos\alpha\, v^3\right). \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

En introduisant ces expressions dans le système (26) et en identifiant, on obtient pour les constantes a_2, ..., d_5 :

$$a_2 = -\frac{p}{2}, \quad b_2 = c_2 = a_3 = 0, \quad b_3 = \frac{3p}{4c}, \quad c_3 = \frac{p\cos\alpha}{c},$$

$$d_3 = \frac{3p}{4c}\left[\frac{l^2}{c^2} - \frac{2}{5}(1-6\cos^2\alpha)\right], \quad d_5 = -\frac{3p}{4c^3}.$$

En substituant dans les formules (27), on a finalement :

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_u &= \frac{p\cos\alpha}{c}u + \frac{3p}{4c}\left[\frac{l^2}{c^2} - \frac{2}{5}(1-6\cos^2\alpha)\right]v - \\ &- \frac{3p}{4c^3}\left[u^2 v + 4\cos\alpha\, u v^2 - \frac{2}{3}(1-6\cos^2\alpha)\, v^3\right], \\ \sigma_v &= -\frac{p}{2} + \frac{3p}{4c}v - \frac{p}{4c^3}v^3, \\ \tau_{uv} &= -\frac{3p}{4c}u - \frac{p\cos\alpha}{c}v + \frac{3p}{4c^3}\left(u v^2 + \frac{4}{3}\cos\alpha\, v^3\right). \end{aligned}} \quad (28)$$

Il est intéressant de constater que σ_v ne dépend ni de α, ni de u. En un profil déterminé (u = const.), σ_u, σ_v et τ_{uv} sont des fonctions algébriques du 3e degré en v.

Cette solution est applicable au domaine de la plaque, quelle que soit la répartition des réactions des appuis, exception faite des « zones perturbées » voisines des extrémités de la pièce. En vertu du principe de Barré de Saint-Venant, ces zones s'étendent — si α diffère peu de $\pi/2$ — tout au plus sur une longueur égale à $2\,c$, mesurée à partir des extrémités. Le domaine d'application des formules (28) est donc compris entre les profils (parallèles à v) d'abscisses $u = \pm(l - 2c)$.

Dans le cas où $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, les formules (28) se réduisent à celles indiquées par S. Timoshenko dans le cas de la poutre orthogonale simple, à surcharge uniforme[1].

[1] S. Timoshenko : *Théorie de l'élasticité* (trad. franç. par A. de Riva-Berni. Béranger, Paris et Liège, 1936, p. 42.

En superposant les tensions représentées par les formules (16) et (21), il est facile de résoudre le problème de la répartition des tensions dans une poutre oblique, encastrée à une extrémité et sollicitée par un effort tranchant agissant dans le profil limitant l'autre extrémité de la pièce.

(A suivre.)

ORGANISATION ET FORMATION PROFESSIONNELLES

DROITS ET DEVOIRS DES INGÉNIEURS ET DES ARCHITECTES

Donnant suite au désir exprimé par de nombreux collègues, nous ouvrons aujourd'hui dans nos colonnes une nouvelle rubrique consacrée aux « questions sociales » de l'ingénieur et de l'architecte.

Ce faisant, nous visons comme but principal d'être auprès de nos lecteurs une source impartiale et objective d'information et de culture en un domaine que ne peuvent plus ignorer, quelle que soit leur situation sociale, les techniciens qui, à un titre quelconque, s'intéressent à l'avenir de leur profession, au rôle qu'elle doit jouer, à la considération à laquelle elle a droit de prétendre.

Nous ouvrirons nos colonnes à quiconque voudra exprimer une idée constructive pour autant toutefois que le fond et la forme en soient compatibles avec la tenue dont ne saurait se départir notre périodique.

Pour l'heure, nous ne pourrions mieux faire que de citer ici même quelques lignes de communications remarquées faites au Congrès technique international dont les préoccupations essentielles furent celles qu'évoque le titre de cette nouvelle rubrique.

D. Brd.

Congrès technique international[1]

Paris, 16-21 septembre 1946.

Extraits de communications.

Remarques sur le progrès technique

par *A. Detœuf*, ingénieur.

Après avoir défini ce qu'il entend par « progrès technique » et montré que celui-ci est le plus souvent le résultat d'un effort collectif qui n'exclut pas pourtant l'esprit de concurrence, l'auteur traite de la question de la rémunération de la recherche scientifique et technique et conclut son exposé en notant quels sont les avantages et les inconvénients du progrès technique. Il s'exprime en ces termes :

[1] Ce Congrès fut organisé sous le haut patronage du gouvernement français. L'organisation en était assurée par un Comité d'honneur international et par un Comité d'accueil français (voir *Bulletin technique* du 20 juillet 1946, p. 206). — Environ mille deux cents adhésions y furent recueillies. Les pays suivants y donnèrent leur appui ou étaient représentés : Argentine, Australie, Belgique, Brésil, Canada, Chine, Danemark, Egypte, Etats-Unis, France, Grande-Bretagne, Grèce, Hongrie, Indes, Iran Irlande, Italie, Liban, Luxembourg, Norvège, Pays-Bas, Pologne, Portugal, Roumanie, Suède, Suisse, Syrie, Tchécoslovaquie, Turquie, Vénézuéla, Viet-Nam, Yougoslavie. — Le bureau du Congrès fut constitué par un représentant de chacune des nations suivantes : France, Chine, Etats-Unis, Grande-Bretagne, Pologne, Suisse, Tchécoslovaquie. Il fut présidé par M. *A. Antoine*, délégué français. — Le programme de travail du Congrès consistait dans la discussion d'environ cent trente rapports, répartis en quatre sections (voir *Bulletin technique* du 20 juillet 1946, p. 206). — Une commission spéciale composée d'un à trois représentants par pays fut en outre en mesure de proposer au