Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 73 (1947)
Heft: 22

Artikel: Contribution au problème linéaire de flexion d'une plague élastique
Autor: Bolle, L.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-55152

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

73e année 25 octobre 1947 N° 22

BULLETIN TECHNIQUE
DE LA SUISSE ROMANDE

ABONNEMENTS :
Suisse : 1 an, 20 francs
Etranger : 25 francs
Pour sociétaires :
Suisse : 1 an, 17 francs
Etranger : 22 francs
Prix du numéro :
1 Fr. 25
Pour les abonnements s'adresser à la librairie F. Rouge & Cie, à Lausanne.

Paraissant tous les 15 jours

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des anciens élèves de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.

COMITÉ DE PATRONAGE. — Président : R. Neeser, ingénieur, à Genève ; Vice-président : G. Epitaux, architecte, à Lausanne ; secrétaire : J. Calame, ingénieur, à Genève. Membres : *Fribourg :* MM. L. Hertling, architecte ; P. Joye, professeur ; *Vaud :* MM. F. Chenaux, ingénieur ; † E. Elskes, ingénieur ; E. d'Okolski, architecte ; A. Paris, ingénieur ; Ch. Thévenaz, architecte ; *Genève :* MM. L. Archinard, ingénieur ; E. Martin, architecte ; E. Odier, architecte ; *Neuchâtel :* MM. J. Béguin, architecte ; G. Furter, ingénieur ; R. Guye, ingénieur ; *Valais :* M. J. Dubuis, ingénieur ; D. Burgener, architecte.

Rédaction : D. Bonnard, ingénieur, Case postale Chauderon 475, Lausanne.

Publicité :
TARIF DES ANNONCES
Le millimètre (larg. 47 mm.) 20 cts.
Réclames : 60 cts. le mm. (largeur 95 mm.)
Rabais pour annonces répétées.

ANNONCES-SUISSES s.a.
5, rue Centrale Tél. 2.33.26
LAUSANNE
& Succursales.

CONSEIL D'ADMINISTRATION DE LA SOCIÉTÉ ANONYME DU BULLETIN TECHNIQUE
A. Stucky, ingénieur, président ; M. Bridel ; G. Epitaux, architecte ; R. Neeser, ingénieur.

SOMMAIRE : *Contribution au problème linéaire de flexion d'une plaque élastique* (suite et fin), par L. Bolle, professeur à l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne. — Organisation et formation professionnelles : *De l'évolution de la profession d'ingénieur et du rôle de la S. I. A. en regard de cette évolution.* — Les Congrès : *Association suisse pour l'aménagement des eaux.* — Correspondance : *Energie atomique et énergie électrique.* — Bibliographie. — Carnet des concours. — Service de placement.

Contribution au problème linéaire de flexion d'une plaque élastique [1],

par L. Bolle, professeur à l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne.

621.073.1

(Suite et fin) [1]

§ 3. Analyse de ces résultats.

Dans les formules établies la solution complète du problème apparaît comme une superposition de deux solutions dépendant l'une du déplacement w contenu dans $\mathfrak{W}$ (2.3) et l'autre de la rotation ω.

Mais bien que les fonctions $\mathfrak{W}$ et ω satisfassent à des équations (2.4 a et 2.4 b) distinctes, il n'est en général pas possible de les déterminer séparément du fait qu'elles sont liées par les conditions limites.

Nous retrouvons ainsi, mais mise sous une forme plus simple et plus exacte la solution proposée en 1877 par M. Lévy [2].

La comparaison de nos résultats avec ceux de M. Lévy montre que la correspondance est parfaite dans les termes en ω. Il suffit en effet de remplacer ω dans nos formules par $-\frac{12\,\zeta}{h^2}$ pour retrouver avec l'approximation $\pi^2 \simeq 10$ les termes en ζ des formules de M. Lévy. Cette coïncidence est d'autant plus remarquable que ce dernier admettait une variation des contraintes sinusoïdale ou cosinusoïdale en z. Remarquons encore que la solution en ω apparaît ici tout naturellement comme un élément indispensable de la solution complète du problème alors qu'introduite par M. Lévy comme un « nouveau cas particulier du problème de l'équilibre d'un cylindre élastique », elle semblait superposée, en quelque sorte artificiellement, à la solution connue en w aux seules fins de pouvoir satisfaire aux trois conditions de Poisson.

Quant aux termes en w ou $\mathfrak{W}$ nous les trouvons en accord presque aussi parfait avec les formules données par A. E. H. Love [1] relativement à la flexion d'une plaque selon un état *généralisé* de tension plane. La seule différence apparaît dans le terme en Δw qui figure au côté de w dans l'expression de $\mathfrak{W}$. Ce terme négligé dans la théorie de Kirchhoff contient chez Love un facteur $1 + \frac{\nu}{8}$ qui chez nous fait défaut. Pour $\nu = 0{,}3$ l'erreur de $\mathfrak{W}$ n'est que le 4 % d'un terme le plus souvent négligé.

A ces deux solutions correspondent aussi deux types de déformation bien distincts. Si $\omega = 0$ et $\mathfrak{W} \neq 0$ la plaque *fléchit* et de telle façon que dans un même feuillet d'ordonnée z les composantes $u = z\varphi$ et $v = z\psi$ du déplacement d'un point dérivent du potentiel $\mathfrak{W}$ (formules 2.5). Nous dirons, pour cette raison, que la flexion est dans ce cas *irrotationnelle*. Si par contre $\mathfrak{W} = 0$ et $\omega \neq 0$ la plaque *ne fléchit pas* et la déformation est *plane* ; elle se réduit à de simples distorsions sans dilatation des divers éléments d'un même feuillet.

Remarquons enfin que dans les expressions des déviations et des efforts les termes en $\mathfrak{W}$ sont identiques à

[1] Voir *Bulletin technique* du 11 octobre 1947, p. 281.
[2] *Loc. cit.*, pages 258 et suivantes.

[1] *Theory of Elasticity*, § 304

ceux en w dans les expressions correspondantes de la théorie classique et que ces deux fonctions satisfont à la même équation indéfinie. Dès lors, *si la flexion est irrotationnelle et si le déplacement w n'apparaît pas explicitement dans les conditions limites, les deux théories donneront les mêmes valeurs des déviations et des efforts, seul le déplacement w sera différent.*

§ 4. Equations et formules en coordonnées polaires.

Les équations

$$\Delta\Delta\mathfrak{V} = \frac{p}{N} \qquad \Delta\omega = \frac{10}{h^2}\,\omega$$

et

$$w = \mathfrak{V} - \frac{1}{\lambda}\,\Delta\mathfrak{V}$$

restent inchangées à condition d'écrire ici le laplacien sous la forme

$$\Delta(\ \ ) = \frac{\partial^2(\ \ )}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\ \ )}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2(\ \ )}{\partial\theta^2}$$

Rapportant la déviation de la génératrice et les efforts au système d'axes r, θ, nous aurons successivement :

$$\left\{ \varphi = -\left\{ \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial r} + \frac{h^2}{5}\frac{\partial\omega}{r\partial\theta} \right\} \right.$$

$$\psi = -\left\{ \frac{1}{r}\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial\theta} - \frac{h^2}{5}\frac{\partial\omega}{\partial r} \right\}$$

$$m_r = -N\left\{ \nu\Delta\mathfrak{V} + (1-\nu)\frac{\partial^2\mathfrak{V}}{\partial r^2} + (1-\nu)\frac{h^2}{5}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2\omega}{\partial r\partial\theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial\omega}{\partial\theta}\right)\right\}$$

$$m_t = -N\left\{ \Delta\mathfrak{V} - (1-\nu)\frac{\partial^2\mathfrak{V}}{\partial r^2} - (1-\nu)\frac{h^2}{5}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2\omega}{\partial r\partial\theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial\omega}{\partial\theta}\right)\right\}$$

$$m_{rt} = (1-\nu)\,N\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial^2\mathfrak{V}}{\partial r\partial\theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial\theta} + \omega - \frac{h^2}{5}\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2}\right\}$$

$$t_r = -N\left\{\frac{\partial(\Delta\mathfrak{V})}{\partial r} + (1-\nu)\frac{\partial\omega}{r\partial\theta}\right\}$$

$$t_t = -N\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial(\Delta\mathfrak{V})}{\partial\theta} - (1-\nu)\frac{\partial\omega}{\partial r}\right\}.$$

§ 5. Applications à la plaque circulaire pleine.

A. *Flexion irrotationnelle suivant une surface de révolution.*

Ici deux conditions limites suffisent à déterminer la fonction $\mathfrak{V}$ de la seule variable r. Comme ces deux conditions sont, dans les modes d'appui courants, indépendantes de la valeur du déplacement w sur le bord, nous savons que nos formules n'apporteront que dans la valeur de la flèche un terme correctif représentant l'influence de l'effort tranchant. Pour une plaque chargée uniformément, par exemple, l'augmentation de la flèche totale vaut

$$f_t = \frac{pR^2h^2}{20\,(1-\nu)\,N} = \frac{3}{10}\frac{pR^2}{Gh}$$

quelles que soient les conditions sur le bord extérieur.

Voici par contre un problème qui n'admet aucune solution dans la théorie habituelle. Il s'agit d'une plaque (fig. 5*a*) chargée, sur le bord extérieur de rayon a, par un effort tranchant $t_r = P$ constant et s'appuyant sur une couronne de galets disposés sur une circonférence concentrique de rayon b. Il est clair que la partie centrale de la plaque aura tendance à se soulever et nous nous proposons de trouver la pression $p(r)$ qu'il faudrait exercer sur cette partie de la plaque pour l'empêcher de se soulever et quelle serait dans ces conditions la réaction unitaire X des galets.

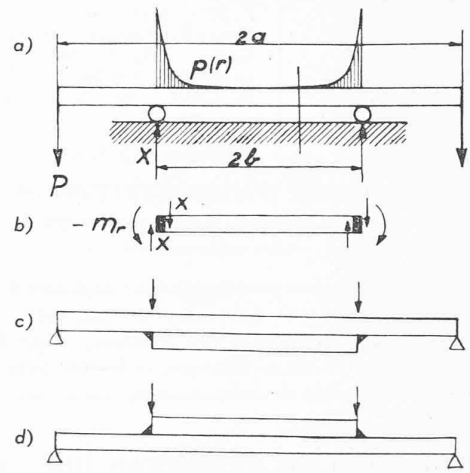

Fig. 5.
a) Plaque circulaire chargée sur le bord extérieur et maintenue plane dans sa partie centrale.
c) et *d*) Systèmes de plaques hyperstatiques.

Dans la théorie de Kirchhoff l'annulation du déplacement w pour toute valeur de $r \leqq b$ implique $p(r) \equiv 0$, ce qui n'est évidemment pas une solution. Par contre, selon nos formules la condition $w \equiv 0$ conduit à choisir $p(r)$ de façon à annuler simplement le terme de charge de l'équation (2.1), c'est-à-dire à poser :

$$p(r) = p_0\,J_0\,(i\lambda_1 r) \qquad \lambda_1 = \frac{\sqrt{5\,(1-\nu)}}{h}$$

p_0 désignant une constante arbitraire et J_0 la fonction de Bessel d'ordre zéro. Dès lors

$$\mathfrak{V} = \frac{p_0}{\lambda_1^4 N}\cdot J_0\,(i\lambda_1 r)$$

et par conséquent

$$\varphi = \frac{p_0}{\lambda_1^3 N}\,i\,J_1\,(i\lambda_1 r) \qquad t_r = \frac{p_0}{\lambda_1}\,iJ_1\,(i\lambda_1 r) = \lambda_1^2 N\cdot\varphi$$

$$m_r = -\frac{p_0}{\lambda_1^2}\left[J_0\,(i\lambda_1\,r) + \frac{1-\nu}{\lambda_1 r}\,i\,J_1(i\lambda_1 r)\right]$$

Les valeurs de p_2 et de la réaction X se déduiraient des conditions limites relatives aux deux régions de la plaque. Cependant la détermination exacte de ces grandeurs n'offrant aucun intérêt, on peut, avec une approxi-

mation suffisante, considérer la couronne extérieure comme sensiblement encastrée sur son bord intérieur et déterminer le moment d'encastrement correspondant. La dernière formule fera alors correspondre à ce moment une valeur approchée de p_0 et la réaction unitaire X s'écrira

$$X = t_{r\,(b+\varepsilon)} - t_{r\,(b-\varepsilon)} = P \cdot \frac{a}{b} - p_0 \; i\, J_1 (i\lambda_1 b)$$

ou, si l'on néglige au second membre le premier terme, en général petit

$$X \cong - t_{r\,(b-\varepsilon)} = \frac{\lambda_1 \, m_r}{f(\lambda_1 b)} ;$$

$f(\lambda_1 b)$ désignant ici l'expression

$$f(\lambda_1 b) = \frac{J_0 \; (i\lambda_1 b)}{i\, J_1 (i\lambda_1 b)} + \frac{1-\nu}{\lambda_1 b} .$$

Pour $\lambda_1 b > 10$, c'est-à-dire $\frac{h}{b} > 5.5$, $f(\lambda_1 b) \cong -1$ et par conséquent

$$X \cong - \lambda_1 \, m_r = - \sqrt{5\,(1-\nu)} \cdot \frac{m_r}{h} \cong - \frac{2 m_r}{h} .$$

Tout se passe donc, au point de vue statique, comme si le moment d'encastrement m_r *était équilibré uniquement par deux réactions agissant en sens contraire sur les bords d'un anneau sans rigidité tangentielle et de largeur* $\frac{h}{2}$ (fig. 5*b*).

Si $\frac{b}{a} = 0{,}5$ on trouverait $X = 7{,}75 P \; \frac{a}{b}$ soit environ huit fois la valeur qu'aurait la réaction si la plaque reposait librement sur l'appui. Cet exemple permet de se faire une idée des véritables pressions existant dans un encastrement. Un effort de même nature perpendiculaire à la plaque, et se composant ici avec un effort horizontal, apparaîtrait aussi dans la soudure du système représenté par la figure 5*c*. Dans le système retourné par contre (fig. 5*d*), la soudure n'aurait plus à transmettre que l'effort horizontal car les deux plaques pourraient prendre alors des courbures opposées correspondantes aux moments qui les sollicitent.

B. *Déformation plane.*

Considérons une plaque chargée par un moment de torsion $m_{rt} = M$ constant agissant sur tout élément du cylindre contournant. Il est clair que la théorie de Kirchhoff est ici encore en défaut puisque l'effort tranchant équivalent à une telle distribution des couples de torsion s'annule en tout point. Nous pouvons par contre satisfaire à toutes les conditions du problème en posant :

$$\mathfrak{V} \equiv 0 \qquad \omega = K_0 \, J_0 \, (i\lambda r)$$

d'où résulte

$$w \equiv 0 \qquad \varphi \equiv 0 \qquad \psi = - \frac{2K_0}{\lambda} \, i J_1 (i\lambda r) \qquad t_t = \frac{1-\nu}{2} N \lambda^2 \cdot \psi$$

$$m_{rt} = - (1-\nu) \, N K_0 \left[J_0 \; (i\lambda r) + \frac{2}{\lambda r} \, i \; J_1 \; (i\lambda r) \right].$$

Les contraintes maximum calculées par les formules

$$\tau^e_{rt} = - \frac{6\, m_{rt}}{h^2} \qquad\qquad \tau^o_t = \frac{3}{2} \frac{t_t}{h} .$$

et rapportées à la contrainte τ^e_{rt} agissant sur le bord sont représentées en fonction de $\frac{r}{R}$ dans la figure 6.

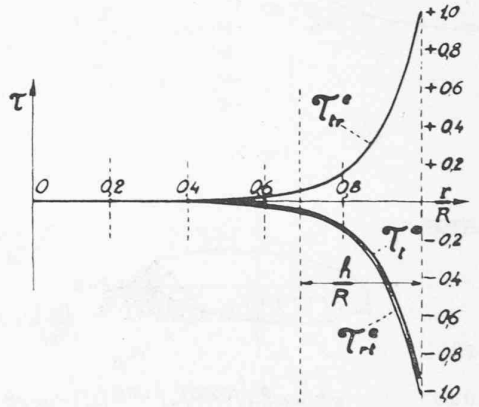

Fig. 6. — Contraintes engendrées dans une plaque circulaire par un moment de torsion uniforme sur le bord.

L'épaisseur relative de la plaque vaut ici $\frac{h}{R} = \frac{1}{\sqrt{10}} \cong 0{,}316$. La contrainte τ^o_t est partout sensiblement égale en valeur absolue à la contrainte τ^e_{rt}. A une distance du bord égale à l'épaisseur de la plaque ces contraintes ont à peine le dixième de leur valeur sur le bord.

C. *Cas général de déformation.*

Le problème de la flexion d'une plaque circulaire pleine sollicitée sur sa périphérie par trois efforts donnés peut être résolu complètement à l'aide des sommes suivantes de solutions particulières des équations : (2.4)

$$\mathfrak{V} = a_0 + b_0 r^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(a_n + b_n r^2) \; r^n \cos n\theta + (c_n + d_n \, r^2) r^n \sin n\theta \right]$$

et

$$\omega = K_0 \, J_0 \, (i\lambda r) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n \, (i\lambda r) \; (K_n \cos n\theta + L_n \sin n\theta).$$

En effet les constantes arbitraires figurant dans ces sommes sont en nombre justement suffisant pour permettre de développer en séries de Fourier trois fonctions arbitrairement données sur le bord. Cependant afin de comparer, sans de trop longs calculs, nos résultats avec ceux de la théorie de Kirchhoff, nous choisirons les efforts sur le bord de façon à ce que chacun de ces

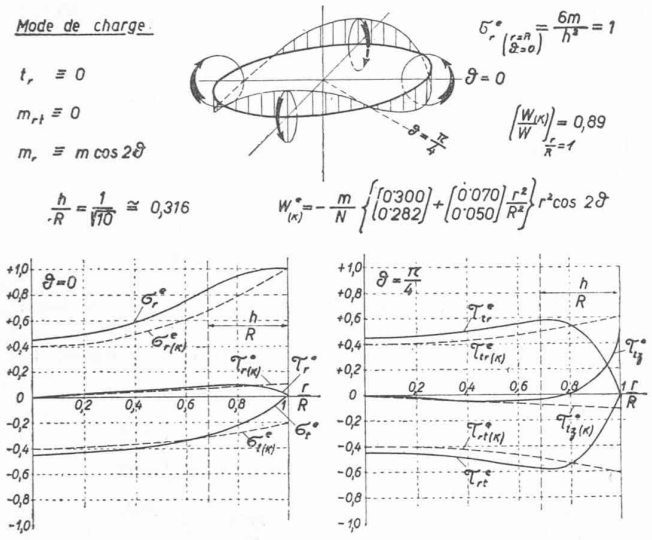

Fig. 7.

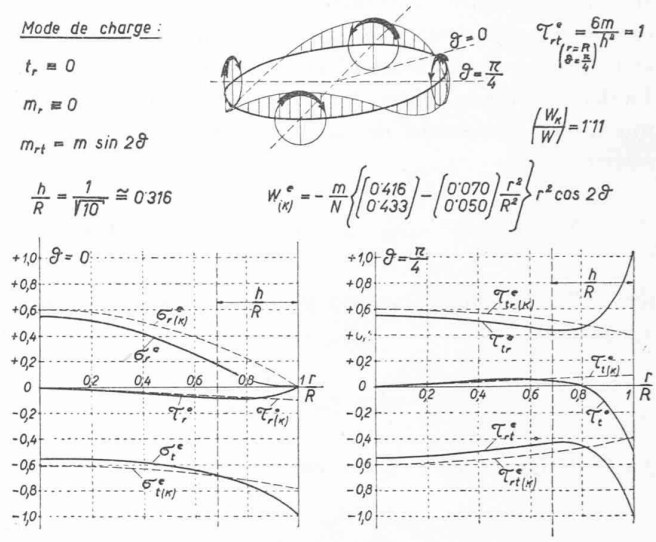

Fig. 8.

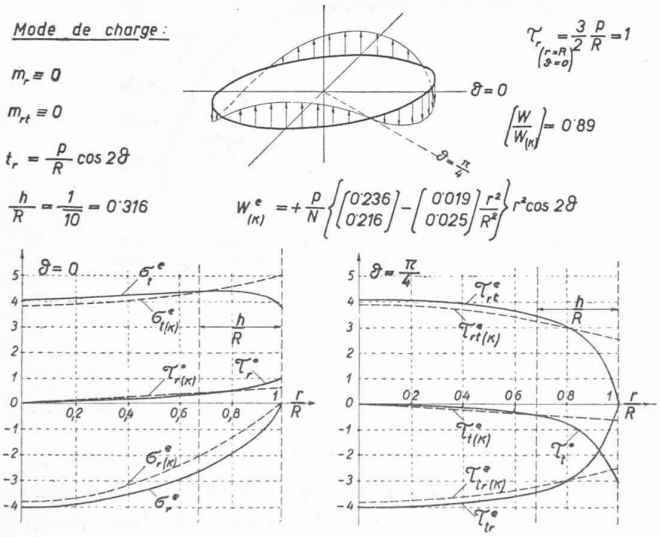

Fig. 9.

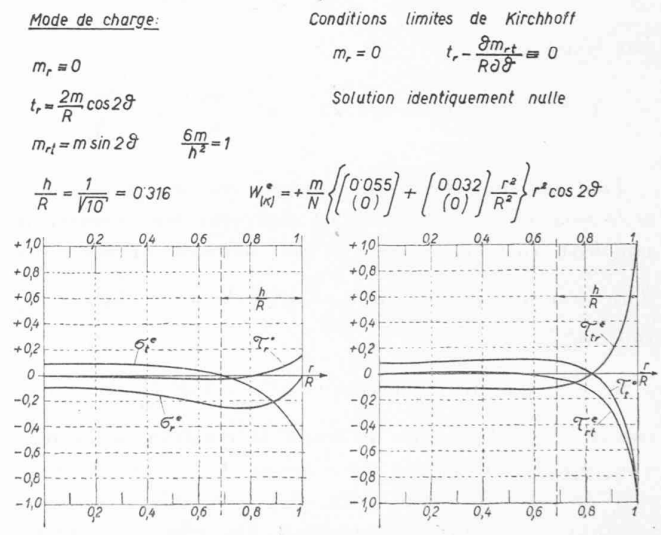

Fig. 10.

Comparaison, selon nos formules (w^e et courbes en trait plein) et selon celles de Kirchhoff (w_K et courbes pointillées), de l'état élastique d'une plaque circulaire sollicitée sur le bord par

1° un moment fléchissant $m_r = m \cos 2\theta$ (fig. 7) ;
2° un moment de torsion $m_{rt} = m \sin 2\theta$ (fig. 8) ;
3° un effort tranchant $t_r = \frac{p}{R} \cos 2\theta$ (fig. 9) ;
4° le mode composé $m_{rt} = m \sin 2\theta$ et $t_r = \frac{2m}{R} \cos 2\theta$ équivalent à zéro dans la théorie de Kirchhoff (fig. 10).

développements se réduise à un seul terme (en $\cos 2\theta$ ou en $\sin 2\theta$). Dans les exemples numériques traités (fig. 7, 8, 9), nous considérons séparément les effets élastiques engendrés par chacun des efforts m_r, m_{rt}, t_r agissant sur le bord. L'épaisseur relative de la plaque a toujours la même valeur $\frac{h}{R} = \frac{1}{\sqrt{10}} \cong 0{,}316$. Tous les modes de charge étant proportionnels soit à $\cos 2\theta$ ou à $\sin 2\theta$ il suffit de représenter les contraintes, en fonction du rayon $\frac{r}{R}$, pour les seules valeurs 0 et $\frac{\pi}{4}$ de la variable θ.

Dans chaque mode de charge les valeurs des contraintes sont rapportées à la contrainte maximum appliquée sur le bord. Les courbes pointillées correspondent aux résultats donnés par la théorie de Kirchhoff. Constatons en premier lieu la très bonne approximation moyenne donnée ici encore, et malgré la forte épaisseur de la plaque, par cette simple solution. L'écart n'est

important qu'au voisinage du bord. Cependant comme une légère différence (10 % environ) subsiste même au centre de la plaque on ne peut prétendre ici, en toute rigueur, que les modifications apportées à la solution connue par l'introduction des termes en ω, s'effacent nécessairement comme ces termes eux-mêmes à une faible distance du bord. La représentation graphique du déplacement w n'offrant aucun intérêt nous donnons simplement en regard de chaque figure son expression calculée par les deux théories (les coefficients du haut correspondent à la solution complète, ceux du bas à celle de Kirchhoff).

Dans le dernier exemple (fig. 10) les efforts sur le bord ont été choisis de façon à obtenir une solution identiquement nulle dans la théorie habituelle. Nos formules par contre donnent encore un faible déplacement w et des contraintes ne disparaissant pas totalement dans la partie centrale de la plaque.

§ 6. Autres applications.

Nous n'étudierons pas ici les modifications que nos formules introduisent dans les théories de la stabilité et des vibrations ; nous montrerons simplement encore, dans un seul exemple, qu'elles permettent d'analyser la déformation de la plaque même au voisinage d'un point singulier du contour.

Aucune formule, à notre connaissance, n'a été donnée jusqu'ici pour représenter, ne serait-ce qu'approximativement, ce qui se passe dans l'angle d'une plaque carrée appuyée ou encastrée et chargée uniformément. On sait seulement que l'angle de la plaque se soulève si celle-ci est simplement appuyée, mais on ne sait à quelle distance du sommet s'établit le premier contact avec l'appui.

Le cas particulier représenté dans les figures 11*a-c* illustre ce phénomène et donne probablement une valeur approchée de cette distance. Il s'agit d'un secteur droit chargé uniformément et libre de toute action sur ses côtés rectilignes. Ces conditions sont exactement celles qui règnent jusqu'au contact de l'appui, dans l'angle relevé de la plaque carrée envisagée.

En admettant que la flexion est irrotationnelle au voisinage du sommet de ce secteur, on peut satisfaire aux conditions données sur les deux côtés en posant simplement :

$$\mathfrak{D} = \frac{pr^4}{192\,N}\left\{3 - \frac{1+3\nu}{1-\nu}\cos 4\theta\right\}$$

d'où résulte le déplacement élastique

$$w = \frac{p}{192\,(1-\nu)N}\left\{\left[3\,(1-\nu)-(1+3\nu)\cos 4\theta\right] r^4 - \frac{48}{5}h^2 r^2\right\}$$

qui sur les deux bords prend la valeur

$$w = \frac{p}{192\,(1-\nu)\,N}\left\{2\,(1-3\nu)\,r^4 - \frac{48}{5}\,h^2\,r^2\right\}.$$

Cette dernière équation montre que la courbe méridienne

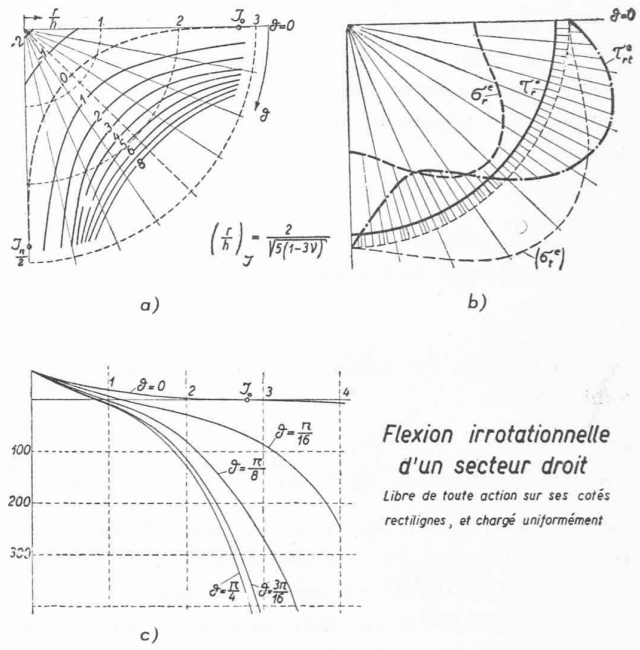

Fig. 11. — Essai de représentation de l'état élastique dans l'angle relevé d'une plaque carrée chargée uniformément et librement appuyée le long de ses côtés.

de la surface élastique, sur les bords du secteur, présente un point d'inflexion J_0 à la distance

$$(5.1) \qquad r_0 = \frac{2\,h}{\sqrt{5\,(1-3\nu)}} \simeq 2{,}86\,h \text{ pour } \nu = (0{,}3).$$

En faisant tourner le secteur autour de la droite $J_0 - J_{\frac{\pi}{2}}$ jusqu'à ce que les tangentes aux courbes méridiennes en ces deux points d'inflexion deviennent horizontales nous amènerons ce secteur dans une position où il aura un contact du deuxième ordre avec un appui horizontal. On peut donc admettre, dans ces conditions, que notre secteur représente approximativement l'état élastique régnant dans l'angle relevé d'une plaque carrée, et dans cette hypothèse l'abscisse donnée par (5.1) serait une valeur approchée de la distance au sommet du premier point de contact avec l'appui. La figure 11*a* est une projection cotée de la surface élastique. La figure 11*b* reproduit quelques méridiennes de cette même surface et dans la figure 11*c* nous avons reporté les diverses contraintes en fonction de θ.

§ 7. Application de la méthode précédente à la résolution du problème de la torsion.

Les éléments géométriques utilisés pour représenter la plaque élastique permettent de représenter aussi l'état déformé de la tranche d'un prisme droit soumis à la torsion simple. Pour retrouver les formules de Saint-Venant, il suffira donc de généraliser nos résultats en admettant la présence de forces tangentielles agissant dans les feuillets superficiels de la plaque. Nous pouvons ici supposer ces forces antisymétriques par rapport au

feuillet moyen, ce qui revient à admettre que l'élément reçoit, en plus d'une charge spécifique normale $p(xy)$, l'action d'un couple spécifique vertical $\mu(xy)$ dont les composantes parallèles aux plans zx et zy auront les valeurs

$$\mu_x = h\tau_{zx} \quad \text{et} \quad \mu_y = h\tau_{zy}\,;$$

τ_{zx} et τ_{zy} désignant ici les composantes de l'action spécifique tangentielle exercée sur le feuillet superficiel $z = +\frac{h}{2}$.

Les équations d'équilibre d'un élément intérieur s'écrivent donc

$$\frac{\partial m_x}{\partial n} - \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = t_{xy} - \mu_x \quad \frac{\partial m_y}{\partial y} - \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = t_y - \mu_y \quad \frac{\partial t_x}{\partial x} + \frac{\partial t_y}{\partial y} = -p,$$

tandis que celles relatives à un élément du contour restent inchangées. Dans l'expression de la loi de Hooke, seule la valeur de la constante k devrait être modifiée et choisie ici égale à *un*. Nous nous bornerons à reproduire les seules formules dont nous aurons besoin dans la résolution de notre problème particulier.

Les expressions suivantes subsistent sans changement :

$$(7.1)\quad \begin{cases} e = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \qquad \omega = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \psi}{\partial x} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \qquad \mathfrak{V} = w - \dfrac{e}{\lambda_1^2} \\ m_x = N\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \nu\dfrac{\partial \psi}{\partial y}\right) \qquad m_y = N\left(\dfrac{\partial \psi}{\partial y} + \nu\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \\ m_{xy} = -\dfrac{1-\nu}{2}\left(\dfrac{\partial \psi}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right). \end{cases}$$

Des équations d'équilibre et de la loi de Hooke nous tirons comme précédemment, mais avec les valeurs

$$\lambda^2 = \frac{12}{h^2} \quad \text{et} \quad \lambda_1^2 = \frac{6\,(1-\nu)}{h^2}$$

qui correspondent à $k = 1$,

$$(7.2)\quad \begin{cases} \varphi = -\left[\dfrac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} + \dfrac{h^2}{6}\dfrac{\partial \omega}{\partial y} - \dfrac{1}{6h}\mu_x\right] \\ \psi = -\left[\dfrac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} - \dfrac{h^2}{6}\dfrac{\partial \omega}{\partial x} - \dfrac{1}{6h}\mu_y\right] \\ e + \Delta w = -\dfrac{p}{\lambda_1^2 N}, \end{cases}$$

dont découle par élimination

$$(7.3)\quad \begin{cases} e = -\Delta\mathfrak{V} + \dfrac{1}{6h}\left(\dfrac{\partial \mu_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \mu_y}{\partial y}\right) \\ \Delta\omega - \lambda^2\omega = \dfrac{6}{Gh^3}\left(\dfrac{\partial \mu_x}{\partial y} - \dfrac{\partial \mu_y}{\partial x}\right). \end{cases}$$

Quant aux efforts tranchants ils deviennent :
en un point intérieur

$$t_z = N\left(\frac{\partial e}{\partial x} - (1-\nu)\frac{\partial \omega}{\partial y}\right) + \mu_x \qquad t_y = N\left(\frac{\partial e}{\partial y} + (1-\nu)\frac{\partial \omega}{\partial x}\right) + \mu_y$$

et sur le bord

$$(7.4)\qquad t_n = N\left(\frac{\partial e}{\partial n} - (1-\nu)\frac{\partial \omega}{\partial s}\right) + \mu_n\,.$$

Désignant ici par θ l'angle spécifique de torsion, nous devons, conformément à l'hypothèse habituelle de déformation, poser :

$$\varphi = -\theta y \qquad \psi = \theta x$$

d'où résulte immédiatement (formules 7.1)

$$e = 0 \qquad \omega = \theta \qquad \mathfrak{V} = w \qquad m_x = m_y = m_{xy} = 0$$

puis avec $p = 0$ (formules 7.2)

$$(7.5)\quad \begin{cases} a)\quad -\theta\,.\,y = -\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\mu_x}{Gh} \qquad b)\quad \theta\,.\,x = -\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\mu_y}{Gh} \\ c)\quad \Delta w = 0. \end{cases}$$

Les équations 7.3 donnent enfin

$$(7.6)\quad a)\ \frac{\partial \mu_x}{\partial x} + \frac{\partial \mu_y}{\partial y} = 0 \qquad b)\ -2\theta = \frac{1}{Gh}\left(\frac{\partial \mu_x}{\partial y} - \frac{\partial \mu_y}{\partial x}\right).$$

Revenant aux contraintes $\tau_{zy} = \frac{\mu_x}{h}$ $\tau_{zy} = \frac{\mu_y}{h}$ et

posant $\tau_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ $\tau_{zx} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}$

on satisfait identiquement à l'équation (7.6 *a*), alors que (7.6 *b*) devient

$$\Delta\Phi = -2G\theta.$$

La condition 7.4 se réduit, puisque $t_n \equiv 0$, à

$$(7.7)\qquad \mu_n = h\tau_n = 0$$

ou encore à

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0\,.$$

Dès lors la fonction Φ, dont dérivent les composantes τ_{zx} et τ_{zy} de la contrainte tangentielle, se trouve ainsi parfaitement définie.

Quant au gauchissement de la section, il est donné par le déplacement w, solution de l'équation (7.5 *c*) $\Delta w = 0$ et satisfaisant à la condition limite :

$$\frac{\partial w}{\partial x}\,dy - \frac{\partial w}{\partial y}\,dx - \theta\,(y\,dy + x\,dx) = 0.$$

Nous retrouvons ainsi exactement les résultats établis par Saint-Venant.

Errata. — Le lecteur voudra bien corriger les erreurs typographiques suivantes relevées dans la première partie du présent article (*Bulletin technique* du 11 octobre 1947) :

Page 284, 2e colonne, remplacer λ par λ_1^2 dans les formules des 8e et 9e lignes depuis le bas et λ^4 par λ_1^4 dans le dernier terme de la formule (2.3).