Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande

Band: 74 (1948)

Heft: 15

Artikel: Sur les équations différentielles linéaires à coefficients lentement variables: application à l'étude de couplages non linéaires

Autor: Blanc, Ch.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-56028

74e année 17 juillet 1948 No 15

BULLETIN TECHNIQUE
DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les 15 jours

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des anciens élèves de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.

Rédaction : D. BONNARD, ingénieur. Case postale Chauderon 475, LAUSANNE

SOMMAIRE : *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients lentement variables. Application à l'étude de couplages non linéaires*, par CH. BLANC, professeur de mathématiques appliquées à l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne. — Association amicale des anciens élèves de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne : *Rapport du Comité sur l'exercice 1947.* — Société suisse des ingénieurs et des architectes : *Extrait des procès-verbaux des séances du Comité central du 9 mars et du 7 mai 1948 ; Communiqués du Secrétariat.* — LES CONGRÈS : *Après le congrès de l'Union internationale des architectes.* — DIVERS : *Percement du tunnel de la Batie à Genève.* — NÉCROLOGIE : *Georges-François Lemaître, ingénieur E. P. Z.* — BIBLIOGRAPHIE. — SERVICE DE PLACEMENT.

Sur les équations différentielles linéaires à coefficients lentement variables

Application à l'étude de couplages non linéaires

par CH. BLANC,
professeur de mathématiques appliquées à l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne.

§ 1. Introduction

L'étude mathématique de nombreux phénomènes se ramène à l'intégration d'équations différentielles linéaires à coefficients constants ; de plus, les seconds membres de ces équations sont souvent des sommes d'exponentielles. On étudie de cette façon, en particulier, les phénomènes où les grandeurs observées varient assez peu (théorie des « petits mouvements »). Toutefois, on peut facilement se persuader que cette approximation ne suffit pas à expliquer certaines circonstances, notamment certains phénomènes d'oscillations entretenues d'amplitude finie. On a déjà beaucoup étudié la mécanique non linéaire, en réunissant sous ce terme tous les comportements (même électriques) dont la description mathématique ne peut pas se faire par des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Dès que l'on abandonne la linéarité, on se trouve en face de problèmes singulièrement compliqués, difficiles à grouper en théories générales satisfaisantes. Toutefois, une catégorie assez importante de ces problèmes non linéaires peut être abordée avec une précision suffisante au moyen d'équations différentielles linéaires à *coefficients variables* ; si les coefficients varient peu et lentement, il est possible d'intégrer ces équations d'une façon approchée au moyen de calculs analogues à ceux que l'on fait pour les équations à coefficients constants.

Dans la première partie de cette étude (§§ 2 à 6), on établira la méthode d'intégration des équations à coefficients lentement variables. Le lecteur qui s'intéresse plus particulièrement aux applications pourra se limiter à la lecture des paragraphes 2 et 6 de cette première partie ; dans la seconde, on trouvera des applications à des problèmes de mécanique non linéaire, plus particulièrement à des problèmes de couplage non linéaire entre haute et basse fréquences.

§ 2. Enoncé du problème

On sait que l'intégration de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$a_N \frac{d^N u}{dt^N} + a_{N-1} \frac{d^{N-1} u}{dt^{N-1}} + \ldots + a_0\, u = e^{st}$$

peut s'effectuer par des moyens élémentaires. Si l'on pose

$$Z(s) = a_N\, s^N + \ldots + a_0$$

et si $Z(s) \neq 0$, on a l'intégrale particulière

$$u(t) = \frac{1}{Z(s)}\, e^{st} ;$$

si, de plus, toutes les racines de l'équation caractéristique $Z(s) = 0$ ont leur partie réelle négative, toute intégrale de l'équation sans second membre tend vers zéro lorsque t augmente indéfiniment ; l'intégrale particulière écrite plus haut diffère donc de toute autre intégrale d'une quantité qui tend vers zéro si t tend vers l'infini. Cette circonstance se présente dans de nombreux cas ; on dit alors que l'on a un phénomène *amorti* ; si, en particulier, $s = i\omega$, le second membre de l'équation est périodique de période $\frac{2\pi}{\omega}$, l'intégrale

$$u(t) = \frac{1}{Z(i\omega)}\, e^{i\omega t}$$

l'est aussi et constitue le *régime permanent*.

Nous allons voir comment on peut procéder lorsque l'on doit intégrer une équation peu différente d'une équation à coefficients constants. Considérons donc l'équation

$$(1) \quad Du \equiv a_N(t)\,\frac{d^N u}{dt^N} + a_{N-1}(t)\,\frac{d^{N-1}u}{dt^{N-1}} + \ldots + a_0(t)\,u = F(t)\,;$$

les coefficients sont supposés réels et bornés, la fonction $F(t)$ est réelle ou complexe, bornée en module ; si $u(t)$ mesure l'état d'un système linéaire amorti, soumis à une action extérieure $F(t)$, on peut prévoir par des considérations physiques que cet état résultera de la superposition des effets produits par cette action extérieure jusqu'à l'instant considéré t ; on peut donc s'attendre à avoir une solution de la forme

$$(2) \qquad u(t) = \int_{-\infty}^{t} G(\tau, t)\, F(\tau)\, d\tau,$$

où $G(\tau, t)$ exprime l'effet, à l'instant t, d'une action unité manifestée à l'instant antérieur τ ; la fonction $G(\tau, t)$ est une fonction de Green. Moyennant des hypothèses convenables faites sur les coefficients de l'équation (1), il est possible de justifier rigoureusement la relation (2) ; nous laissons de côté les démonstrations, qui ont été publiées dans un autre recueil[1]. Nous nous bornerons à énoncer quelques propriétés de la fonction $G(\tau, t)$ qui seront utilisées par la suite.

§ 3. Propriétés de la fonction $G(\tau, t)$

Remarquons tout d'abord que cette fonction n'a un sens que pour $\tau \leq t$; elle n'interviendra du reste dans les calculs que pour ces valeurs.

La fonction $G(\tau, t)$ satisfait aux relations

$$a) \quad D_t G \equiv a_N \frac{\partial^N G}{\partial t^N} + \ldots + a_0\, G = 0 \quad \textit{pour } \tau < t,$$

$$b) \quad G(\tau, t) = \frac{\partial G}{\partial t} = \ldots = \frac{\partial^{N-2} G}{\partial t^{N-2}} = 0, \quad \frac{\partial^{N-1} G}{\partial t^{N-1}} = \frac{1}{a_N(t)}$$

$$\textit{pour } \tau = t.$$

[1] Pour les démonstrations, voir Ch. Blanc, *Sur les équations différentielles linéaires non homogènes, à coefficients variables*, Annales de l'Université de Grenoble, « Sciences mathématiques et physiques », tome 22, 1946, p. 119-134.

Pour le montrer, on remarque tout d'abord que les relations *a*) et *b*) définissent parfaitement la fonction $G(\tau, t)$; si on pose alors

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} G(\tau, t)\, F(\tau)\, d\tau,$$

on a

$$Du(t) = \int_{-\infty}^{t} D_t\, G(\tau, t)\, F(\tau)\, d\tau + F(t) = F(t)\,;$$

pour qu'il soit légitime de dériver sous le signe d'intégration, donc pour qu'on puisse permuter l'intégration et l'opération D, il faut faire des hypothèses convenables sur la fonction $G(\tau, t)$, donc sur les coefficients de l'équation (1). Il suffit, par exemple, de supposer qu'il existe deux nombres positifs ρ et A avec

$$\left| \frac{\partial^\nu G}{\partial t^\nu} \right| < A \cdot e^{-\rho(t-\tau)} \quad \text{pour } \tau < t, \ \nu = 0, \ldots, N\,;$$

on peut montrer que ces inégalités peuvent être satisfaites si l'équation est à coefficients constants et que cela est encore le cas pour certaines équations à coefficients variables, qui correspondent à des systèmes que l'on peut qualifier de stables.

Passons à une seconde propriété. Soit D^* l'opérateur différentiel *adjoint* à D, c'est-à-dire l'opérateur

$$(3) \quad D^* v \equiv (-1)^N \frac{d^N}{dt^N}(a_N v) + (-1)^{N-1} \frac{d^{N-1}}{dt^{N-1}}(a_{N-1} v) + \ldots + a_0 v\,;$$

pour simplifier l'écriture, on posera (les coefficients $c_\nu(t)$ étant définis par cette relation)

$$(3') \quad D^* v \equiv c_N(t)\,\frac{d^N v}{dt^N} + c_{N-1}(t)\,\frac{d^{N-1} v}{dt^{N-1}} + \ldots + c_0(t)\, v.$$

On a $D^*_\tau G(\tau, t) = 0$ (l'indice indique toujours la variable sur laquelle porte l'opérateur différentiel), *c'est-à-dire*

$$c_N(\tau)\,\frac{\partial^N G}{\partial \tau^N} + c_{N-1}(\tau)\,\frac{\partial^{N-1} G}{\partial \tau^{N-1}} + \ldots + c_0(\tau)\, G(\tau, t) = 0\,;$$

on a en outre

$$G(\tau, t) = \frac{\partial G}{\partial \tau} = \ldots = \frac{\partial^{N-2} G}{\partial \tau^{N-2}} = 0, \quad \frac{\partial^{N-1} G}{\partial \tau^{N-1}} = \frac{(-1)^{N-1}}{a_N(t)}$$

$$\textit{pour } \tau = t.$$

On le démontre à partir de l'identité de Lagrange, en reprenant les hypothèses faites sur le comportement à l'infini de la fonction $G(\tau, t)$; nous laissons de côté cette démonstration, qui exige de longs calculs (on la retrouvera dans le mémoire cité plus haut).

Remarquons que si l'on appelle $G^*(\tau, t)$ la fonction de Green correspondant à l'opérateur adjoint D^*, on a la relation de symétrie

$$G^*(\tau, t) = G(t, \tau),$$

qui est classique, en tout cas dans les problèmes aux limites avec un intervalle fini (alors que nous avons ici un intervalle illimité dans un sens).

La relation (2) peut prendre une forme un peu différente, qui sera commode par la suite : en remplaçant τ par $t-\tau$, on a en effet

$$(2') \qquad u(t) = \int_0^\infty G(t-\tau, t)\, F(t-\tau)\, d\tau.$$

Remarque. — La détermination effective de la fonction $G(\tau, t)$ ne peut se faire, en toute rigueur, qu'en intégrant l'équation $Du = 0$; elle ne peut donc se faire en général en termes finis par des quadratures. Nous allons voir cependant que, si les coefficients de l'équation (1) varient assez lentement, il est possible de remplacer la fonction G par une autre, dont la détermination se fait facilement à partir des coefficients et qui est telle que l'intégrale (2′) donne une bonne approximation de la fonction cherchée $u(t)$.

§ 4. Définition de l'admittance variable

Posons, par définition,

$$(4) \qquad Y(s, t) = \int_0^\infty G(t-\tau, t)\, e^{-s\tau}\, d\tau\,;$$

cette intégrale converge, pour tout t, si la partie réelle de s dépasse $-\rho$, le nombre positif ρ étant celui qui figure dans les hypothèses faites sur G. Par cette définition, la fonction $Y(s, t)$ est la transformée de Laplace en τ de la fonction $G(t-\tau, t)$. Puisque l'intégrale (4) converge uniformément en s, on peut dériver par rapport à s, d'où, d'une façon générale,

$$(5) \qquad \frac{\partial^r y}{\partial s^r} = (-1)^r \int_0^\infty \tau^r \cdot G(t-\tau, t) \cdot e^{-s\tau}\, d\tau.$$

Faisons aussi une intégration par parties, en intégrant tout d'abord le terme $e^{-s\tau}$; en tenant compte de la valeur de $G(\tau, t)$ pour $\tau = t$, on obtient ainsi

$$sY(s, t) = -\int_0^\infty G'(t-\tau, t)\, e^{-s\tau}\, d\tau,$$

où l'accent désigne la dérivation par rapport à la première variable, remplacée ensuite par la différence $t-\tau$; en faisant ainsi plusieurs intégrations par parties, et en tenant compte des valeurs de G et de ses dérivées pour $\tau = t$, on a d'une façon générale

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} & s^k Y(s, t) = (-1)^k \int_0^\infty G^{(k)}(t-\tau, t)\, e^{-s\tau}\, d\tau, \quad \text{si } k = 1, \ldots, N-1, \\ & s^N Y(s, t) = (-1)^N \int_0^\infty G^{(N)}(t-\tau, t)\, e^{-s\tau}\, d\tau + \frac{1}{a_N(t)}\,. \end{aligned} \right.$$

Ces relations seront utiles pour l'évaluation de la fonction $Y(s, t)$. Voyons pour l'instant ce qui se passe dans le cas particulier où l'équation donnée est à coefficients constants. On a tout d'abord simplement

$$a_k = (-1)^k c_k,$$

d'où, en multipliant $s^k Y$ par a_k et en sommant de 0 à N,

$$Y(s, t) \sum_{k=0}^{N} a_k s^k = \int_0^\infty e^{-s\tau} \sum_{k=0}^{N} c_k\, G^{(k)}(t-\tau, t)\, d\tau + 1 = 1,$$

car on a $D^* G = 0$, soit $\sum_{k=0}^{N} c_k\, G^{(k)} = 0$; donc, si les coefficients de l'équation différentielle donnée sont constants, on a simplement

$$Y(s, t) = \frac{1}{\sum a_k s^k} = \frac{1}{Z(s)}\,;$$

dans ce cas (mais dans ce cas seulement), $Y(s, t)$ ne dépend pas de la variable t.

Ainsi, lorsque l'équation donnée est à coefficients constants, la fonction $Y(s, t)$ se réduit à l'inverse de $Z(s)$, donc à l'inverse de l'impédance dans le cas d'un circuit électrique. Nous allons voir que cette fonction $Y(s, t)$ joue encore le rôle d'une admittance dans le cas d'une équation à coefficients variables. Si le second membre de l'équation (1) est simplement l'exponentielle e^{st}, s réel ou complexe, la relation (2′) donne, en tenant compte de la définition (4),

$$(7) \qquad u(t) = Y(s, t)\, e^{st}\,;$$

cette relation sera fondamentale dans la suite ; elle montre que $Y(s, t)$ joue exactement le rôle d'une *admittance*, variable lorsque les coefficients de l'équation sont variables, et qui se réduit à l'admittance au sens habituel si les coefficients sont constants, ainsi qu'on vient de le voir.

§ 5. Evaluation de l'admittance $Y(s, t)$

Nous avons vu, au paragraphe précédent, que la connaissance de l'admittance $Y(s, t)$ permet d'écrire une intégrale de l'équation (1) si le second membre est une exponentielle. Elle permet également de le faire dans des cas plus généraux que nous ne voulons pas examiner ici [1]. Mais il faut remarquer que la détermination exacte de $Y(s, t)$ exigerait en somme l'intégration de l'équation (1), au moins dans un cas particulier ; c'est précisément ce que nous voulons éviter. Nous obtiendrons alors une expression approchée de $Y(s, t)$ en supposant que les coefficients de l'équation (1) varient peu et lentement ; on sera ainsi presque dans le cas où l'admittance est constante.

Posons pour commencer

$$(8) \qquad J(s, t) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{N} (-1)^k c_k(t) s^k}\,;$$

cette fonction se calcule à partir des coefficients de D^*, donc, par quelques dérivations, à partir de ceux de l'équation (1). On remarque aussi qu'elle coïncide avec $Y(s, t)$, donc avec $\frac{1}{Z(s)}$, si les coefficients de l'équation (1) sont constants.

[1] Voir, à ce sujet, dans le cas d'une équation à coefficients constants, le travail du même auteur : *Le calcul des régimes quasi stationnaires*, « Bulletin technique », 3 août 1946.

Or on a, par la définition de $J(s, t)$,

$$\frac{Y(s,t)}{J(s,t)} = Y(s,t) \sum_{k=0}^{N} (-1)^k c_k(t)\, s^k ,$$

puis, par les relations (6),

$$\frac{Y(s,t)}{J(s,t)} = \sum_{k=0}^{N} c_k(t) \int_0^{\infty} e^{-s\tau}\, G^{(k)}(t-\tau, t)\, d\tau + 1 ;$$

or le second théorème du paragraphe 3 entraîne que l'on a

$$\sum_{k=0}^{N} c_k(t-\tau)\, G^{(k)}(t-\tau, t) = 0,$$

donc encore

$$\frac{Y(s,t)}{J(s,t)} = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} \sum_{k=0}^{N} [c_k(t) - c_k(t-\tau)]\, G^{(k)}(t-\tau, t)\, d\tau + 1 ;$$

supposons que l'on puisse développer les fonctions $c_k(t-\tau)$ de τ en séries entières autour de t, donc de $\tau = 0$ [1] ; on aura alors par la formule de Taylor

$$c_k(t) - c_k(t-\tau) = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\tau^n}{n!} c_k^{(n)}(t),$$

d'où

$$\frac{Y(s,t)}{J(s,t)} = 1 - \sum_{k=0}^{N} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{c_k^{(n)}(t)}{n!} \int_0^{\infty} \tau^n e^{-s\tau} G^{(k)}(t-\tau, t)\, d\tau ;$$

or, en faisant sur les intégrales (5) les intégrations par parties analogues à celles qui ont donné les relations (6) à partir de la définition (4), on obtient d'une façon générale

$$\int_0^{\infty} \tau^n e^{-s\tau} G^{(k)}(t-\tau, t)\, d\tau = (-1)^{n+k} \frac{\partial^n}{\partial s^n} [s^k\, Y(s,t)] ,$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{Y(s,t)}{J(s,t)} &= 1 - \sum_{k=0}^{N} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \frac{c_k^{(n)}(t)}{n!} \frac{\partial^n}{\partial s^n} [s^k\, Y(s,t)] \\ &= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial s^n} \left[Y(s,t) \sum_{k=0}^{N} (-1)^k c_k^{(n)}(t) s^k \right] \\ &= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial s^n} \left[Y(s,t) \frac{\partial^n}{\partial t^n} \frac{1}{J(s,t)} \right] \end{aligned}$$

ou encore

$$(9) \quad Y(s,t) = J(s,t) \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial s^n} \left\{ Y(s,t) \frac{\partial^n}{\partial t^n} \frac{1}{J(s,t)} \right\} \right] ;$$

on peut écrire également cette relation sous la forme très condensée

$$(9') \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial s^n} \left[Y \frac{\partial^n}{\partial t^n} \frac{1}{J} \right] = 1.$$

Nous avons ainsi trouvé pour la fonction $Y(s, t)$ une équation différentielle en s d'ordre infini ; cette fonction $Y(s, t)$ en est une intégrale satisfaisant à des conditions pour $s \to +\infty$; remarquons que si les coefficients de $1/J$, polynome en s, sont des polynomes en t, de degré p au plus, l'équation (9) est d'ordre p ; en particulier, si les coefficients de l'équation (1) sont linéaires en t, l'équation (9) est simplement du premier ordre. A vrai dire, cette remarque a un caractère purement formel, car il n'est pas certain que les conditions de convergence puissent être encore satisfaites dans ce cas. D'ailleurs, si les coefficients de l'équation (1) varient lentement, l'intégration approchée de l'équation (9) se fait par un procédé très différent de celui que l'on donne en général pour les équations différentielles linéaires du premier ordre.

Nous allons supposer en effet que $J(s, t)$ varie assez lentement en t et en s pour qu'on puisse négliger les dérivées secondes. On aura ainsi tout simplement

$$Y(s,t) = J(s,t) \left[1 - \frac{\partial}{\partial s} \left(Y \cdot \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{J} \right) \right],$$

ou encore, puisque Y et J sont assez peu différentes, et les dérivées relativement très petites,

$$(10) \qquad Y(s,t) = J(s,t) \left[1 - \frac{\partial}{\partial s} \left(J \cdot \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{J} \right) \right].$$

Si nous voulons interpréter ce résultat, nous dirons que l'on peut remplacer l'équation (1) à coefficients variables par une équation ayant d'autres coefficients, également variables, mais que l'on intégrera formellement comme une équation à coefficients constants.

Remarquons encore que le procédé d'intégration approchée que nous avons donné, où nous avons remplacé la dérivée de la fonction inconnue par celle d'une fonction approchée, ne conduit probablement pas à des approximations convergentes. La suite des approximations que l'on formerait de cette façon est divergente, mais les premières approximations donnent un résultat utilisable dans les circonstances où l'on se trouve. La mécanique céleste fournit des exemples analogues de suites divergentes dont les premiers termes sont « pratiquement » convergents.

§ 6. Résumé de la méthode

En résumé, si l'on a une équation (1) dont les coefficients varient assez lentement et telle que les intégrales de l'équation sans second membre tendent assez rapidement vers zéro lorsque t augmente indéfiniment, il existe une intégrale de la forme (2) ; si $F(t) = e^{st}$, cette intégrale devient simplement

$$u(t) = Y(s,t) \cdot e^{st},$$

où $Y(s, t)$ est définie par la relation (4) ; cette fonction $Y(s, t)$ peut s'évaluer d'une façon approchée : on écrit l'opérateur différentiel D^* adjoint à D, d'après (3) et (3') ; on introduit la fonction $J(s, t)$ par la relation (8) et on a

$$Y(s,t) \simeq J(s,t) \left[1 - \frac{\partial}{\partial s} \left(J \cdot \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{J} \right) \right] ;$$

cette fonction $Y(s, t)$ joue le rôle d'une admittance variable. Nous verrons des applications de cette méthode dans la seconde partie de cette étude.

(A suivre).

[1] Il faudrait, en toute rigueur, prendre un développement limité et tenir compte, cas échéant, des discontinuités des coefficients ; nous laissons ici de côté toutes ces questions de convergence.