Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 74 (1948)
Heft: 20

Artikel: La mécanique aléatoire et le problème de la turbulence
Autor: Baatard, François
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-56037

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

La mécanique aléatoire et le problème de la turbulence

par FRANÇOIS BAATARD, ingénieur E. P. L.

(Suite et fin) [1]

14. *La turbulence homogène et isotrope*

Ce genre de turbulence a été étudié par Taylor, von Karman et Howart. Dans le système des variables d'Euler, la vitesse est $u_1(x_1, x_2, x_3, t)$, u_2, u_3, au point $A(x_1, x_2, x_3)$ et $u(x+\xi)$ en $B(x+\xi)$. La corrélation entre ces deux vecteurs, à un instant donné, est représentée par le *tenseur de von Karman* : $\overline{u'_k(x)u_i(x'_i+\xi)}$. Si B vient se confondre avec A, ce tenseur devient, au facteur $-\rho$ près, le tenseur $\overline{u'_k u'_i}$ de Reynolds. La turbulence décrite par le tenseur de von Karman fait intervenir neuf fonctions inconnues des points A, B, et du temps. Une simplification remarquable se produit dans le cas de la turbulence homogène et isotrope dont les grandeurs qui la caractérisent restent invariantes, à un instant donné, par rapport aux translations et aux rotations, ce qui réduit le nombre des fonctions inconnues.

Ainsi par exemple :

$$\overline{u_1^2} = \overline{u_2'^2} = \overline{u_3'^2} = K \quad \text{et} \quad \overline{u'_1u'_2} = \overline{u'_3u'_1} = \overline{u'_2u'_3} = 0$$

$3K$ = énergie cinétique d'agitation turbulente.

Le tenseur prend la forme simplifiée :

$$\begin{vmatrix} g & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix}$$

où g = coefficient de corrélation entre les composantes de la vitesse en A et en B qui sont orthogonales à AB et f = id. mais pour les composantes portées par AB (fig. 15).

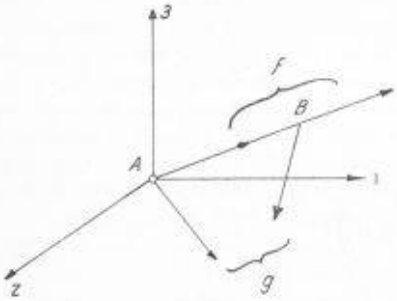

Fig. 15.

On peut placer en A et en B des appareils à fils chauds (Kampé de Fériet) qui donnent la valeur moyenne du produit des composantes de la vitesse d'agitation et enregistrer les courbes f et g (fig. 16).

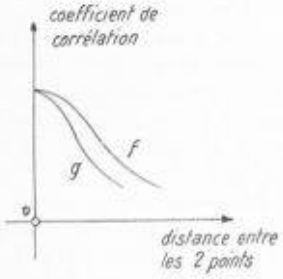

Fig. 16.

Les coefficients de corrélation, fonction de la longueur des déplacements dans le fluide, donnent une image de ce fluide. Si le fluide est incompressible, f se réduit à g.

Dans le cas général, la relation entre f et g est donnée par l'équation de von Karman :

$$g = f + \frac{r}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial r}$$

Pour établir la relation entre les nombres K, f, et l_2 données par les appareils et la vitesse $\overline{u_k}$ du mouvement d'ensemble, von Karman a proposé l'utilisation des équations de Navier, ce qu'il fit, tout en étudiant les corrélations entre les composantes des déformations et celles des vitesses, ou des pressions et des vitesses, démontrant par exemple que les moments conjugués de la pression et de la vitesse sont nuls, la vitesse étant prise en B et la pression en A, etc.

Von Karman donna en outre une équation intéressante, dite *équation de propagation des corrélations*, et dont il fit de nombreuses applications.

15. *Le spectre de la turbulence homogène*

Si l'on admet que la turbulence se manifeste par des oscillations périodiques des particules, oscillations traduites par leur agitation, il est possible, à l'image de l'optique ou de l'acoustique, de les soumettre à l'analyse harmonique. Ainsi :

$$u'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t)$$

$$\text{avec } \overline{u'^2} = K = \frac{1}{2} \sum_{1}^{\infty} (A_k^2 + B_k^2).$$

$\frac{1}{2}(A_k^2 + B_k^2)$ représentant l'énergie ou intensité de la raie K. Si le spectre des oscillations est continu, la série de Fourier ci-dessus est remplacée par une intégrale de Fourier ; le spectre des vitesses comporte en effet des raies ou des bandes suivant que l'on a affaire à des composantes isolées de fréquences précises ou à des fréquences continues. En prenant la fréquence $n = \frac{\omega}{2\pi}$ comme variable, au lieu de la pulsation, on écrira :

$$\overline{u'^2} = \int_0^{\infty} Q(n)dn.$$

$Q(n)dn$ = énergie contenue entre les fréquences n et $n + dn$ (elle peut être obtenue expérimentalement au moyen de filtres de fréquence).

En général, $Q(n) = K.q(n)$ et $q(n)$ est la *fonction spectrale*, dont la relation suivante : $\int_0^{\infty} q(n)dn = 1$ lui attribue les caractères d'une densité de probabilité. Rappelons que la probabilité pour que $n < N < n + dn$ est une certaine fonction $q(n)$ appelée densité de probabilité de la variable n.

Il existe une relation fondamentale, découverte par Taylor, entre la fonction spectrale et la fonction de corrélation

$$R(h) = \frac{1}{K} \overline{u'(t)u'(t+h)}.$$

[1] Voir *Bulletin technique* du 11 septembre 1948, p. 233.

En introduisant dans cette dernière $u'(t)$ calculée par sa série de Fourier, on obtient :

$$\overline{u'(t)u'(t+h)} = K \cdot R(h) = \frac{1}{2} \sum (A_k^2 + B_k^2) \cos \omega_k h$$

En passant des séries aux intégrales, cette relation devient :

$$\overline{u'(t)u'(t+h)} = K \int_0^\infty q(n) \cdot 2\pi nh \cdot dn \qquad \text{et}$$

$$R(h) = \int_0^\infty q(n) \cdot \cos 2\pi nh \cdot dn$$

Ce qui s'énonce :

La fonction de corrélation R(h) *est une intégrale de Fourier inverse de Fourier de la fonction spectrale.*

Inversement, $q(n) = 4 \int_0^\infty R(h) \cos 2\pi nh \cdot dh.$

Le peu que nous avons montré de la théorie de Taylor-von Karman permettra, nous l'espérons, de constater la description déjà avancée qu'elle donne de la turbulence. Elle n'écarte cependant pas certaines lacunes et von Karman n'a pu, malgré plusieurs tentatives, échapper aux équations de Navier pour la description du mouvement d'ensemble. La nature des particules pose également un problème périlleux pour leur existence ; en effet, un des caractères le plus remarquables d'un fluide turbulent est sa diffusion, incompatible avec l'emploi des coordonnées de Lagrange. Comment suivre les particules, puisque à peine formées, elles se détruisent en perdant à tout jamais leur individualité. Comment mesurer la corrélation entre les vitesses en deux points différents dès lors ? La situation est d'autant plus sérieuse que ces critiques ne proviennent pas de vues de l'esprit, mais des yeux ; on voit en effet en regardant un fluide turbulent (une fumée par exemple) (fig. 17) :

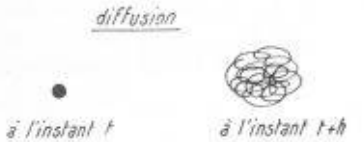

Fig. 17.

D'autre part, suivant la finesse de l'enregistrement, le graphique obtenu n'est pas une ligne continue, mais un nuage de points recouvrant une certaine région du plan variant suivant la sensibilité de l'appareil employé ; ceci permet en particulier de *constater* que la vitesse d'un fluide turbulent n'est pas une fonction continue et dérivable du temps d'une part, et que l'échelle d'observation joue un rôle essentiel d'autre part. Les règles de calcul utilisées dans l'estimation des moyennes présentent de graves lacunes d'ordre mathématique [1].

Les intégrales de Riemann n'offrent pas la possibilité de rendre compte de l'évolution d'un fluide turbulent [2]. Ainsi, par exemple :

Soit X la coordonnée d'une particule fluide ; sa dispersion, c'est-à-dire

$$\overline{X'^2(t)} = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} (X/s - \overline{X})^2 ds = \text{constante}$$

(une moyenne temporelle au sens de Riemann)

avec $X' = X - X$

montre que si, à l'instant $t = 0$, la particule est en un point donné, $\overline{X'^2(t)} = \overline{X'^2(o)} = 0$. Autrement dit, il n'y a pas de diffusion à l'intérieur du fluide et le caractère turbulent qu'il s'agit précisément d'étudier est ainsi supprimé.

Choisies parmi un grand nombre, ces critiques élevées et approfondies par Dedebant et Wehrlé ont amené ces auteurs à repartir de zéro et à donner du problème une solution purement statistique.

16. *La théorie de Dedebant et Wehrlé*

La solution proposée par ces deux auteurs, à laquelle collabora également M. Bass, qui a fait une importante étude sur les méthodes modernes du calcul des probabilités appliquées au problème de la turbulence (étude publiée récemment par le Groupement français pour les recherches aéronautiques), ne tarda pas à déborder largement des cadres du problème de la turbulence pour devenir un corps de doctrine, la *mécanique aléatoire*, qui jette un jour très nouveau sur quantité de questions soit anciennes (thermodynamique, théories cinétiques), soit actuelles (mécanique ondulatoire, relativité restreinte, particules élémentaires, etc.). Très récente, la mécanique aléatoire est en pleine évolution et ne prétend pas avoir atteint sa forme définitive et parfaite ; sa partie purement mathématique, le calcul et l'analyse aléatoires est déjà extrêmement vaste et renouvelle sur de nombreux points, en les généralisant, plusieurs conceptions fondamentales de la théorie des probabilités. C'est, ainsi que nous l'avons déjà dit dans l'introduction, une ramification moderne de ce calcul, la théorie des variables et des fonctions aléatoires, développée par divers mathématiciens contemporains qui a fourni l'outil mathématique à MM. Dedebant et Wehrlé, bien qu'ils se soient cantonnés dans une classe déterminée de fonctions aléatoires, celles qui sont *dérivables en moyenne quadratique* et pour lesquelles les règles connues du calcul différentiel et intégral peuvent être transposées sans trop de modifications. C'est d'ailleurs cette possibilité qui a engagé Dedebant et Wehrlé à utiliser cette catégorie de fonctions plutôt qu'une autre.

Dans leur mémoire original paru dans la revue *Portugaliae Physica* les auteurs précisent leurs idées et les développent (Fascicule 4, 1945) ; M. Dedebant expose dans sa publication « Les schémas aléatoires devant la relativité restreinte » (*Port. Phys.* 1946, fasc. 2) le point de vue aléatoire face aux nouvelles mécaniques.

Voici quelques points essentiels, que nous essaierons seulement de rendre plausibles dans ce très bref aperçu, des conceptions de MM. Dedebant et Wehrlé.

Comme nous l'avons déjà dit à plusieurs reprises, l'aspect d'un diagramme change complètement suivant l'échelle d'observation. Un instrument enregistreur de sensibilité insuffisante tracera d'un phénomène une courbe, alors qu'un enregistrement fin en donne un nuage de points recouvrant une certaine région du plan. Supposons que nous ayons un tel enregistrement de la vitesse dans un fluide turbulent. Il est impossible de retrouver l'ordre chronologique des points et de les relier entre eux par une courbe continue, cela n'aurait aucun sens ; on ne peut donc pas non plus donner du phénomène la valeur moyenne par une intégrale de Riemann, c'est-à-dire par :

[1] Exemple : échange « valeur moyenne » avec l'opération dérivation ou intégration.

[2] Les moyennes tempo elles, intégrales au sens de Riemann, sont des constantes ne pouvant rendre compte d'un phénomène macroscopiquement évolutif.

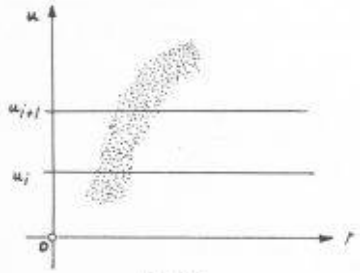

Fig. 18.

$$U_m = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} U(t)dt$$

ce serait illusoire (fig. 18).

Dedebant et Wehrlé ont suggéré de procéder de la manière suivante : Traçons des bandes horizontales d'ordonnées u_i et u_{i+1} par exemple; comptons le nombre n_i de points que chacune d'elles contient. $N = \Sigma n_i$ représente le nombre total des points du graphique; la valeur moyenne du nuage compris dans la zone $u_i < u'_i < u_{i+1}$, est, si n_i est le nombre des points d'ordonnées u'_i : $\frac{n_i}{N} = f_i$; (ce dénombrement peut se faire automatiquement par l'analyse au microphotomètre du noircissement d'une plaque impressionnée par un spot lumineux commandé par l'organe sensible). Pour l'ensemble du graphique, on obtient la moyenne :

$$\overline{u} = \frac{\Sigma n_i \cdot u'_i}{\Sigma n_i} = \sum \frac{n_i}{N} \cdot u'.$$

La limite de cette somme est l'*intégrale de Lebesgue* :

$$\overline{u} = \int_{-\infty}^{+\infty} uf(u)du.$$

En effet, on peut dire que $\frac{n_i}{N}$ représente la fréquence f_i de la vitesse $u_i < u'_i < u_{i+1}$, ou approximativement la probabilité pour que cette vitesse u'_i soit telle que $u_i < u'_i < u_i + du_i$. La courbe donnant les f_i en fonction des u_i représente une fonction $f(u)$ qui a le caractère d'une densité de probabilité. A la limite, on peut donc bien écrire :

$$\overline{u} = \int_{-\infty}^{+\infty} uf(u)du.$$

Le temps t a disparu du processus d'intégration ; aux moyennes de Riemann se substituent ainsi les *moyennes stochastiques*. Si, au cours de son évolution, une molécule (s'il s'agit d'un gaz, par exemple) passe successivement par des conditions cinématiques réalisées simultanément par l'ensemble des molécules à l'instant t, on dit que le *principe ergodique* est satisfait, et dans ce cas l'intégration se ramène au type Riemann.

Nous avons ébauché la genèse du concept de fonction aléatoire. Un *nombre aléatoire* est un nombre indéterminé susceptible de prendre une série de valeurs avec des probabilités données ; si ce nombre dépend d'un indice ou d'un paramètre, il devient une *variable aléatoire*. L'approfondissement de ce qui précède a donc conduit Dedebant et Wehrlé à admettre que *la vitesse n'est pas une fonction dérivable du temps et des coordonnées du lieu, mais une variable aléatoire fonction du temps et des coordonnées du lieu.*

La *vitesse d'ensemble* du fluide est la valeur moyenne en chaque point de la vitesse aléatoire ; elle est donnée par la fonction $f(u)$ ou explicitement $f(u_1, u_2, u_3 ; x_1, x_2, x_3, t)$

$$\overline{u} = uf(u ; x, t)du.$$

Rappelons que la probabilité pour que la vitesse U reste comprise entre deux limites infiniment voisines u et $u + du$ est :

$$\text{Prob. } (u < U < u + du) = f(u)du.$$

$f(u ; x, t)$ est la probabilité liée des composantes de la vitesse u en un point donné x, à l'instant t.

Dedebant et Wehrlé envisagent le tenseur de corrélation entre les vitesses à deux points différents et à deux instants différents : c'est le *tenseur de corrélation cinématique* :

$$\overline{u'_k(x, t)\, u'_r(y, t_1)} \quad (t_1 \neq t) \quad (y \neq x)$$

qui comprend les cas particuliers suivants :

tenseur de corrélation dans le temps :

$$\overline{u'_k(x, t) u'_r(x, t_1)} \quad (y = x) \quad (t \neq t_1)$$

tenseur de corrélation géométrique ou de von Karman :

$$\overline{u'_k(x, t)\, u'_r(y, t_1)} \quad (y \neq x) \quad (t = t_1)$$

tenseur de corrélation des composantes de la vitesse en un point :

$$\overline{u'_k(x, t) u'_r(x, t_1)} \quad (y = x), \ (t = t_1).$$

Tels sont les éléments qui donnent la structure du *champ aléatoire des vitesses* (variables d'Euler).

Une des créations les plus originales de la mécanique aléatoire est celle du *corpuscule aléatoire*, où l'on assiste au mariage des variables de Lagrange et des variables d'Euler, ce qui permet une image complète de la turbulence ainsi qu'une généralisation de la notion de champ des vitesses.

$f(u ; x, t)$ est donc la loi de probabilité liée du champ des vitesses en chaque point de l'espace ; c'est celle des composantes $U_1\, U_2\, U_3$, de la vitesse en un point donné x_1, x_2, x_3, c'est-à-dire pour des valeurs données x_1, x_2, x_3, d'un vecteur aléatoire X_1, X_2, X_3.

$\rho(x, t)$ représentant la densité du fluide, on peut dire :

ρdx donne « grosso modo » la proportion des particules contenues dans le volume dx, ou si l'on veut : la probabilité de présence de ces particules dans dx ; c'est une loi de probabilité de position. On peut maintenant construire une relation $R(u ; x, t)$ qui soit la loi de probabilité entre les composantes de la position $X(t)$ et de la vitesse $U(t)$.

$R(u ; x, t)$ représente donc la loi de probabilité conjuguée entre la position $X(t)$ et la vitesse $U(t)$ d'un corpuscule aléatoire, c'est-à-dire la loi de probabilité conjuguée entre $\rho(x, t)$ et $f(u ; x, t)$.

Le théorème des probabilités composées permet d'écrire :

$$R(u ; x, t) = \rho(x, t)\, f(u ; x, t).$$

Un fluide turbulent est donc un corpuscule aléatoire, c'est-à-dire un point dont les coordonnées et les composantes de la vitesse sont des fonctions aléatoires du temps.

Un fluide turbulent est donc l'analogue en mécanique aléatoire du point matériel en mécanique rationnelle ; si la dispersion des coordonnées disparaît, le corpuscule aléatoire dégénère en point matériel et la turbulence disparaît. R contient donc la densité, la vitesse moyenne du fluide et la loi de distribution des vitesses d'agitation. On peut définir la vitesse d'ensemble du fluide comme étant la moyenne attachée à la loi f, c'est-à-dire la moyenne liée de la vitesse du corpuscule aléatoire pour $X = x$; on la désigne par u_k.

La théorie des fonctions aléatoires introduit une importante notion, celle de la *connexion* d'une fonction aléatoire (c'est une généralisation de celle de corrélation) ; c'est la corrélation entre deux variables aléatoires $X(t_1)$ et $X(t_2)$, valeurs d'une même fonction aléatoire en deux instants distincts t_1 et t_2. La mécanique aléatoire étudie la connexion du corpuscule aléatoire en distinguant trois types de lois :

1. Les *lois corpusculaires*. Exemple :

$G(x, y, u, v, ; t, t_1)dxdydudv$ = probabilité pour que :

a) à l'instant t on ait $x <$ position $< x + dx$
$u <$ vitesse $< u + du$

b) à l'instant t_1 on ait $y <$ position $< y + dy$
$v <$ vitesse $< v + dv$.

2. Les *lois de champ* ou lois de probabilités liées des vitesses une fois les positions choisies ; exemple : la loi $f(u\,;x, t)$.

3. Les *lois de passage* $p(y\,;x, t, t_1)$ qui donnent la probabilité pour que le corpuscule parti de la position x à l'instant t soit à l'instant t_1 à une position comprise entre y et $y + dy$.

La turbulence est définie par l'association des lois de passage et des lois de champ, ce qui permet l'interprétation de la diffusion du fluide. La théorie classique des fluides conduit à retrouver à un instant t_1 et dans un certain volume, le même nombre de particules que dans le même volume à l'instant initial, ce qui est contredit par les faits. Nous dirons maintenant : A l'instant t, les vitesses des microparticules sont des fonctions aléatoires et à l'instant t_1, toutes ces microparticules sont distribuées au hasard dans le fluide (au lieu d'être restées groupées) (fig. 19), avec une densité de probabilité $p(y\,;x, t, t_1)$.

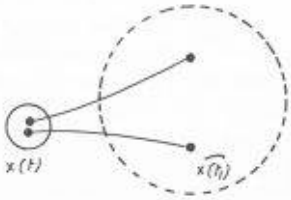

Fig. 19.

Dedebant et Wehrlé donnent la position moyenne des microparticules à l'instant t_1 en attachant la probabilité p aux moyennes de Lagrange :

$$\widehat{X(t_1)} = \int y p(y\,;x, t, t_1)dy \qquad \text{dont la dispersion vaut}$$

$$\widehat{X'^2(t)} = \int \left[y - \widehat{X(t_1)}\right]^2 p(y\,;x, t, t_1)dy.$$

Si $\widehat{X'^2(t)} = 0$, les particules restent groupées (cas limite où elles obéissent à la mécanique classique des fluides) et leurs positions moyennes coïncident avec leurs positions réelles ; il n'y a pas de diffusion.

En mécanique rationnelle, la dérivée de la position donne la vitesse ; Dedebant, Wehrlé et Kampé de Fériet remarquèrent qu'en général la position du corpuscule aléatoire est une fonction aléatoire non dérivable, mais par contre que la vitesse est intégrable au sens de Lebesgue ; en se basant sur l'étude de la connexion entre $X(t)$ et $X(t + h)$, ces auteurs arrivèrent à la conclusion que la vitesse $U(t)$ est continue en moyenne quadratique, et que par conséquent son intégrale aléatoire est dérivable en moyenne quadratique. On dira qu'une fonction aléatoire $\dot{X}/t$ est *dérivable en moyenne quadratique* s'il existe un nombre aléatoire X/t tel que

$$\left(\frac{X/t + h - X/t}{h} - \dot{X}/t\right)^2 \text{ tend vers zéro avec } h.$$

Etendu à la vitesse, ce raisonnement permet d'en définir $A(t)$, sa dérivée aléatoire.

$X(t)$ et $U(t)$ étant dérivables en moyenne quadratique, leur loi de probabilité conjuguée obéit à une *équation de conservation des probabilités* dont la généralisation est extrêmement importante et porte le nom d'*équation générale de transfert* dont les applications sont pour le moins assez surprenantes. En quelques mots, voici de quoi il s'agit :

$\overline{A_k}$ définissant la moyenne liée de l'accélération pour une position et une vitesse données et ψ une fonction de t, x_k, u_k, ψ obéit à la relation :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\overline{\psi}) + \sum \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho\,\psi\,\overline{u_k}) = \rho\left(\overline{\frac{\partial\psi}{\partial t} + \sum u_k \frac{\partial\psi}{\partial x_k} + \sum A_k \frac{\partial\psi}{\partial u_k}}\right)$$

applicable à toutes sortes de grandeurs.

Si $\psi = 1$, on obtient :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho\overline{u_k}) = 0.$$

qui est l'équation de continuité du mouvement d'ensemble.

Si ψ désigne non plus un scalaire, mais le vecteur vitesse, le « transfert » de la vitesse donne :

$$\frac{\partial\overline{u_k}}{\partial t} + \sum_e \overline{u_e}\,\frac{\partial\overline{u_k}}{\partial x_e} = \overline{A_k} - \frac{1}{\rho}\sum \frac{\partial}{\partial x_e}\left(\rho\,\overline{u'_e u'_k}\right)$$

qui est l'équation la plus générale de l'hydrodynamique dans laquelle ρ = densité et $\overline{u_k}$ = vitesse d'ensemble. Si $\overline{A_k}$, moyenne liée de l'accélération en un point, peut être identifiée à un champ de forces, $\rho\,\overline{u'_e u'_k}$ contient implicitement les tensions moléculaires et de turbulence. Appliquée à l'énergie cinétique, l'équation de transfert fournit une relation thermodynamique où se trouvent reliées l'énergie cinétique, une quantité analogue à l'échelle turbulente à la température en théorie cinétique, l'entropie, et un symbole de dérivation totale dans l'espace position-vitesse. La recherche de la signification de cette relation a conduit Dedebant et Wehrlé à énoncer un principe très général, celui de la *dissipation minimum d'énergie*, qui permet le calcul de mouvements réels. Une forme de son énoncé peut être, dans un cas simple : l'arrangement des vitesses dans un fluide turbulent est tel que les forces de frottement turbulent dissipent le moins possible d'énergie.

Dans un cas limite où en particulier la vitesse d'ensemble est nulle et le fluide incompressible, on retrouve l'équation de la propagation de la chaleur de Fourier.

La question du *spectre de la turbulence* peut se résoudre assez simplement. Limitons-nous au cas où $X(t)$ et $U(t)$ sont stationnaires, c'est-à-dire lorsque la loi de probabilité conjuguée entre X et U ne dépend que des différences $t_2 - t_1$, $t_n - t_{n-1}$, etc.

Rappelons que $\overline{u'(t)\,u'(t + h)} = Kr(h)$ où
$r(h)$ = coefficient de corrélation entre les vitesses
et K = vitesse quadratique moyenne.

Kintchine, mathématicien contemporain, a montré que dans ces conditions

$$r(h) = \int_0^\infty \cos wh\; dF(w)$$

et $F(w)$ = fonction de répartition ou fonction spectrale.

$F(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n\,;\; t_1, t_2, t_3, \ldots t_n)$ est la probabilité des inégalités $X_1 \leq x_1 \quad X_2 \leq x_2 \quad X_3 \leq x_3 \quad X_n \leq x_n$.

Au développement en série de Fourier de $r(t)$ correspond la décomposition suivante de la fonction aléatoire $U(t)$:

$U(t) = U_0 + U_1(t) + U_2(t)$
(trois termes stochastiquement indépendants)
avec $r(t) = a_0 + k_1 r_1(h) + k_2 r_2(h)$;
U_0 = moyenne temporelle de $U(t)$ au sens classique, soit une variable aléatoire indépendante de t ;
$U_1(t)$ = série de Fourier presque périodique, purement aléatoire ;

$U_2(t)$ = intégrale de Fourier aléatoire pure donnant la partie continue de la fonction spectrale;

a_0, k_1, k_2 sont les moments du second ordre de $U_0(t)$ $U_1(t)$ $U_2(t)$

et $r_1(h)$ $r_2(h)$ leur coefficient de connexion.

On appelle moment d'ordre k la valeur moyenne de la fonction $\psi(u) = u^k$;

$$M_k = \int u^k f(u)\, du \; ;$$

si $k = 1$, M_1 = moyenne proprement dite.

La fonction spectrale caractérise la distribution d'énergie suivant la fréquence. De la fonction spectrale on peut déduire la fonction de corrélation, et vice versa.

Il est une question capitale, à laquelle la mécanique aléatoire donne une réponse intéressante : celle de la notion de *particule*, et voici dans quel sens Dedebant et Wehrlé voient la chose : c'est l'échelle d'observation qui crée le phénomène. Prenons l'exemple suivant : l'atmosphère est troublée par des perturbations constituées par des masses d'air (10 m d'épaisseur et quelques km² de surface) en mouvement d'agitation à grande échelle par rapport à la circulation générale de l'atmosphère, le mouvement d'ensemble (particules synoptiques). On peut descendre tous les étages jusqu'à la molécule en passant par la soufflerie de laboratoire et *pour chacun de ces étages, la vitesse d'une particule (à l'échelle considérée) est la somme d'une vitesse d'ensemble et d'une vitesse d'agitation, la vitesse d'ensemble d'un étage étant la vitesse d'agitation de l'étage supérieur*, l'échelle fixant le choix des instruments de mesure. On appelle *temps de persistance* le temps pendant lequel une particule garde son individualité, cette durée jouant à l'échelle de la turbulence le rôle du temps de libre parcours moyen à l'échelle moléculaire.

Dès lors la question du rapport entre les étages de perturbation et le spectre de la turbulence se pose : on peut montrer que qualitativement le spectre reste le même tandis que l'intensité des raies faiblit quand l'échelle augmente.

Il serait tentant de discuter quelques relations existant entre la mécanique aléatoire, l'optique et la mécanique ondulatoire, mais l'étendue du sujet ne le permet pas, ni le cadre d'ailleurs de la présente étude, qui aura pu, nous l'espérons, montrer quelques points turbulents de la mécanique aléatoire.

BIBLIOGRAPHIE

Engineering materials, par *Alfred H. White*. Seconde édition. Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York, Toronto, London, 1948. — Un volume 23 × 16 cm de XII + 686 pages, figures. Prix : relié, 6,00 dollars.

De nos jours, un ingénieur, quelle que soit sa spécialité, doit en général connaître la plupart des nombreux matériaux bruts ou de fabrication proposés par l'industrie, ainsi que leurs propriétés essentielles.

Le manuel cité passe en revue d'une manière concise, mais suffisante dans bien des cas, les principales substances utilisées dans les divers domaines de la technique : mécanique, électricité, génie civil, chimie industrielle, etc.

L'auteur a rassemblé une documentation considérable, tant sur les métaux et leurs alliages que sur les roches, les verres, les ciments, les huiles, le bois ou encore sur certaines matières organiques, synthétiques, sur les plastiques, etc. Sans entrer dans trop de détails, il indique cependant les caractéristiques les plus importantes de ces matériaux, en se plaçant toujours au point de vue des applications pratiques. L'exposé est complété par des diagrammes, des tableaux de valeurs numériques et des notices bibliographiques qui font de cet ouvrage une source précieuse de renseignements.

LES CONGRÈS

Association suisse pour l'Aménagement des Eaux

37e Assemblée générale, le 11 septembre 1948.

L'Association suisse pour l'aménagement des eaux a tenu sa 37e Assemblée générale ordinaire le 11 septembre 1948, dans la grande salle du Comte du Château de Chillon.

Le président, M. le Dr P. Corrodi, directeur des NOK à Zurich, a ouvert la séance en saluant la présence des autorités, parmi lesquelles on remarquait notamment M. le conseiller d'Etat P. Oguey, chef du Département de l'instruction publique et des cultes du canton de Vaud.

Dans son allocution, M. Corrodi a rappelé que les insuffisances de notre économie électrique sont les conséquences de la période de guerre pendant laquelle on a peu construit et par ailleurs, beaucoup développé l'emploi de l'énergie électrique en la substituant à d'autres sources d'énergie. En conséquence, nos besoins d'énergie d'hiver ne peuvent être que partiellement satisfaits et l'on doit s'attendre encore à des restrictions de consommation. Seule, la construction de nouveaux bassins d'accumulation est à même de faire disparaître cette situation déficitaire. Il est à souhaiter que l'intervention de nos autorités fédérales tende de préférence à aider les initiateurs plutôt qu'à les restreindre.

L'assemblée, comprenant plus de cent participants, a procédé ensuite aux opérations statutaires en approuvant la gestion et les comptes de l'exercice écoulé, en acceptant la modification de l'article des statuts fixant les cotisations, en renouvelant le mandat des membres de son comité, de son président et des membres du bureau, tout en appelant à siéger au sein de ce dernier M. E. Steiner, Dr ing., vice-président de l'Association suisse des consommateurs d'énergie à Zurich.

A l'issue de la partie administrative, M. P. Meystre, ingénieur, chef du Service de l'électricité de la ville de Lausanne, a exposé les grandes lignes du projet de l'usine de Lavey sur le Rhône, appelée à remplacer l'usine du Bois-Noir, et dont les travaux en cours ont fait l'objet de la visite de l'après-midi.

Cette manifestation a été pleinement réussie et chacun se doit d'en remercier les organisateurs, en particulier M. le Dr h. c. R. Neeser et M. M. Wenger, ingénieur.

Avant la séance administrative, une visite du manoir de Chillon, sous la conduite experte de M. le colonel O. Schmid, architecte, a révélé à chacun les pages caractéristiques de l'histoire de cet édifice si connu par l'image.

L'après-midi, un groupe de participants a pu encore, en sacrifiant il est vrai le dessert du repas en commun, se rendre près de Martigny pour contempler les dégâts résultant des inondations du Rhône, qui a rompu la digue de la rive gauche sur une longueur de près de 120 mètres. Ce spectacle désolant engage chacun à appuyer les efforts de ceux qui ont inscrit à leur programme d'aménager nos eaux, soit pour les utiliser, soit pour les discipliner.

F. P.