

Sur un type de plaque circulaire encastrée d'épaisseur linéairement variable

Autor(en): **Favre, Henry**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin technique de la Suisse romande**

Band (Jahr): **75 (1949)**

Heft 19: **Comptoir Suisse, Lausanne, 10-26 septembre 1949**

PDF erstellt am: **08.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-56881>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les 15 jours

ABONNEMENTS :

Suisse : 1 an, 20 francs
Etranger : 25 francs

Pour sociétaires :

Suisse : 1 an, 17 francs
Etranger : 22 francs

Pour les abonnements
s'adresser à la librairie

F. ROUGE & Cie
à Lausanne

Prix du numéro :
1 fr. 25

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoises et genevoises des ingénieurs et des architectes, de l'Association des anciens élèves de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.

COMITÉ DE PATRONAGE. — Président : R. NEESER, ingénieur, à Genève ; Vice-président : G. EPITAUX, architecte, à Lausanne ; secrétaire : J. CALAME, ingénieur, à Genève. — Membres : *Fribourg* : MM. † L. HERTLING, architecte ; P. JOYE, professeur ; *Vaud* : MM. F. CHENAUX, ingénieur ; E. D'OKOLSKI, architecte ; A. PARIS, ingénieur ; CH. THÉVENAZ, architecte ; *Genève* : MM. L. ARCHINARD, ingénieur ; E. MARTIN, architecte ; E. ODIER, architecte, *Neuchâtel* : MM. J. BÉGUIN, architecte ; G. FURTER, ingénieur ; R. GUYE, ingénieur ; *Valais* : MM. J. DUBUIS, ingénieur ; D. BURGNER, architecte.

Rédaction : D. BONNARD, ingénieur. Case postale Chauderon 475, LAUSANNE

TARIF DES ANNONCES

Le millimètre
(larg. 47 mm) 20 cts
Réclames : 60 cts le mm
(largeur 95 mm)

Rabais pour annonces
répétées

ANNONCES SUISSES S.A.

5, Rue Centrale
Tél. 2 33 26
LAUSANNE
et Succursales



CONSEIL D'ADMINISTRATION DE LA SOCIÉTÉ ANONYME DU BULLETIN TECHNIQUE

A. STUCKY, ingénieur, président ; M. BRIDEL ; G. EPITAUX, architecte ; R. NEESER, ingénieur.

SOMMAIRE : Sur un type de plaque circulaire encastrée d'épaisseur linéairement variable (suite et fin), par HENRY FAVRE, professeur à l'Ecole polytechnique fédérale, Zurich. — L'aérotopographie moderne et ses applications, par A. ANSERMET. — Un aspect du problème de la granulation des bétons, par F. GODED, ingénieur. — LES CONGRÈS : Congrès des ingénieurs. — Société suisse des ingénieurs et des architectes : Collaboration internationale des ingénieurs. — COMMUNIQUÉ. — CARNET DES CONCOURS. — SERVICE DE PLACEMENT. — NOUVEAUTÉS, INFORMATIONS DIVERSES : Le 30^e Comptoir suisse, à Lausanne.

SUR UN TYPE DE PLAQUE CIRCULAIRE ENCASTRÉE D'ÉPAISSEUR LINÉAIREMENT VARIABLE

par HENRY FAVRE

Professeur à l'Ecole polytechnique fédérale, Zurich

(Suite et fin).¹

§ 3. Cas d'une force agissant au centre

Considérons encore la même plaque, mais supposons qu'on lui applique une force P parallèle à l'axe et agissant au centre (fig. 7). Les calculs relatifs à ce cas sont analogues à ceux du paragraphe précédent. Aussi nous bornons-nous à n'en donner que les résultats, en utilisant les mêmes notations que précédemment et en supposant encore $\nu \neq 1/3$.

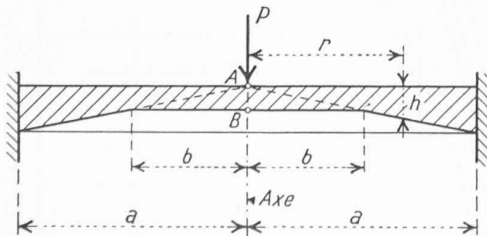


Fig. 7.

On trouve pour le moment de flexion $M_0 = (M_r)_{r=b}$ relatif aux points du contour séparant les deux domaines :

$$M_0 = \mu' P, \tag{35}$$

en posant :

$$\mu' = \frac{2(1+\nu)[(2-\nu)(1-n^{\alpha_1-\alpha_2}) + (\alpha_1-\alpha_2)n^{\alpha_1+2}] + (1-5\nu)[(\alpha_1+\nu)n^{\alpha_1-\alpha_2} - \alpha_2 - \nu]}{12\pi(1-\nu)[(1-\alpha_1)n^{\alpha_1-\alpha_2} - 1 + \alpha_2]}, \tag{36}$$

où $n = \frac{b}{a}$ et où α_1, α_2 sont les racines données par les formules (15). Les variations φ_1 et φ_2 des pentes relatives aux domaines $n < \xi < 1$ et $0 < \xi < n$ ont respectivement les valeurs :

$$\varphi_1 = \frac{2(1+\nu)P}{\pi Ec^3 a^2} \left(C' \xi^{\alpha_1} + D' \xi^{\alpha_2} + \frac{1}{\xi^2} \right), \tag{37}$$

$$\varphi_2 = \frac{3(1-\nu)P}{\pi Ec^3 n^3 a^2} (F' \xi + G' \xi \text{ Log } \xi), \tag{38}$$

où

$$\left. \begin{aligned} C' &= \frac{[6(1-\nu)\pi\mu' + 2-\nu]n^{-\alpha_2-2} + \alpha_2 + \nu}{(\alpha_1 + \nu)n^{\alpha_1-\alpha_2} - \alpha_2 - \nu}, \\ D' &= \frac{[6(1-\nu)\pi\mu' + 2-\nu]n^{-\alpha_1-2} + \alpha_1 + \nu}{\alpha_1 + \nu - (\alpha_2 + \nu)n^{\alpha_2-\alpha_1}}, \\ F' &= 1 + 4\pi\mu' + (1+\nu)\text{Log } n, \quad G' = -1 - \nu. \end{aligned} \right\} \tag{39}$$

¹ Voir le Bulletin technique du 27 août 1949.

L'équation de la surface élastique (rapportée au feuillet moyen avant la déformation) est,

pour $n < \xi < 1$:

$$\zeta_0 = \frac{2(1+\nu)n^3 a^2 P}{\pi E h_0^3} \left[\frac{C'}{\alpha_1+1} (1-\xi^{\alpha_1+1}) + \frac{D'}{\alpha_2+1} (1-\xi^{\alpha_2+1}) + \frac{1}{\xi} - 1 \right], \quad (40)$$

pour $0 < \xi < n$:

$$\zeta_0 = \frac{3(1-\nu)a^2 P}{2\pi E h_0^3} \left[\left(F' - \frac{G'}{2} \right) (n^2 - \xi^2) + G' (n^2 \text{Log } n - \xi^2 \text{Log } \xi) \right] + (\zeta_0)_{\xi=n}, \quad (41)$$

$$\text{où } (\zeta_0)_{\xi=n} = \frac{2(1+\nu)n^3 a^2 P}{\pi E h_0^3} \left[\frac{C'}{\alpha_1+1} (1-n^{\alpha_1+1}) + \frac{D'}{\alpha_2+1} (1-n^{\alpha_2+1}) + n^{-1} - 1 \right]. \quad (42)$$

La flèche au centre de la plaque est :

$$f = (\zeta_0)_{\xi=0} = \frac{3(1-\nu)a^2 P}{2\pi E h_0^3} \left[F' + G' \left(\text{Log } n - \frac{1}{2} \right) \right] + (\zeta_0)_{\xi=n}. \quad (43)$$

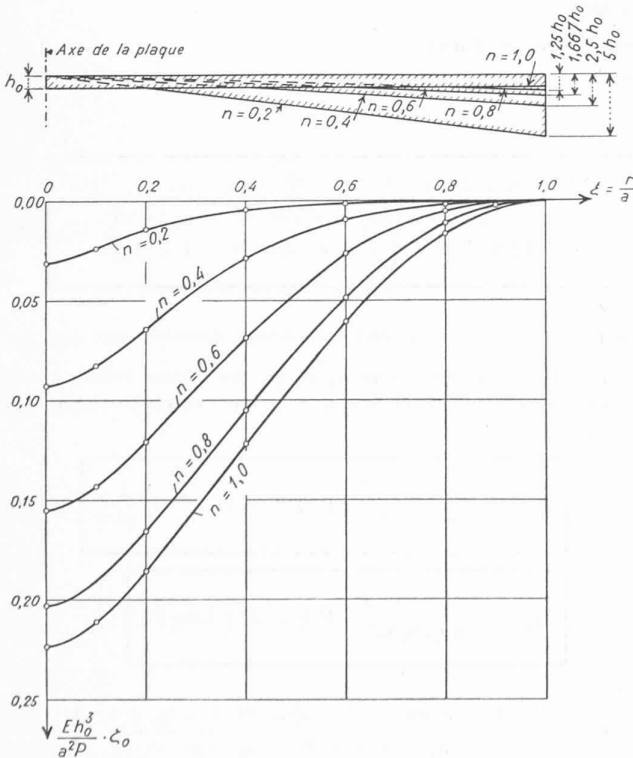


Fig. 8. — Plaque circulaire encadrée de la figure 7.

Représentation graphique de ζ_0 en fonction de $\xi = \frac{r}{a}$ pour différentes valeurs du rapport $n = \frac{b}{a}$.

Les valeurs des moments de flexion sont :

pour $n < \xi < 1$: (44)

$$M_r = \frac{P}{6\pi(1-\nu)} \left[C'(\alpha_1+\nu)\xi^{\alpha_1+2} + D'(\alpha_2+\nu)\xi^{\alpha_2+2} - 2 + \nu \right],$$

$$M_t = \frac{P}{6\pi(1-\nu)} \left[C'(1+\nu\alpha_1)\xi^{\alpha_1+2} + D'(1+\nu\alpha_2)\xi^{\alpha_2+2} + 1 - 2\nu \right];$$

pour $0 < \xi < n$:

$$M_r = \frac{P}{4\pi} \left[F' - 1 + G' \text{Log } \xi \right],$$

$$M_t = \frac{P}{4\pi} \left[F' - \nu + G' \text{Log } \xi \right]. \quad (45)$$

Les figures 8, 9 et 10 donnent les diagrammes de ζ_0 , M_r , M_t , $(\sigma_r)_i$ et $(\sigma_t)_i$, calculés en supposant $\nu = 0,25$. La figure 8, qui représente ζ_0 en fonction de $\xi = \frac{r}{a}$ pour différentes valeurs du rapport $n = \frac{b}{a}$, est analogue à la figure 4 relative au cas où la surcharge est uniformément répartie dans tout le domaine de la plaque ; elle ne donne lieu à aucune nouvelle remarque¹. Par contre, les diagrammes M_r , M_t (fig. 9) et $(\sigma_r)_i$, $(\sigma_t)_i$ (fig. 10) sont foncièrement différents de ceux obtenus dans le paragraphe précédent, car dans le cas d'une

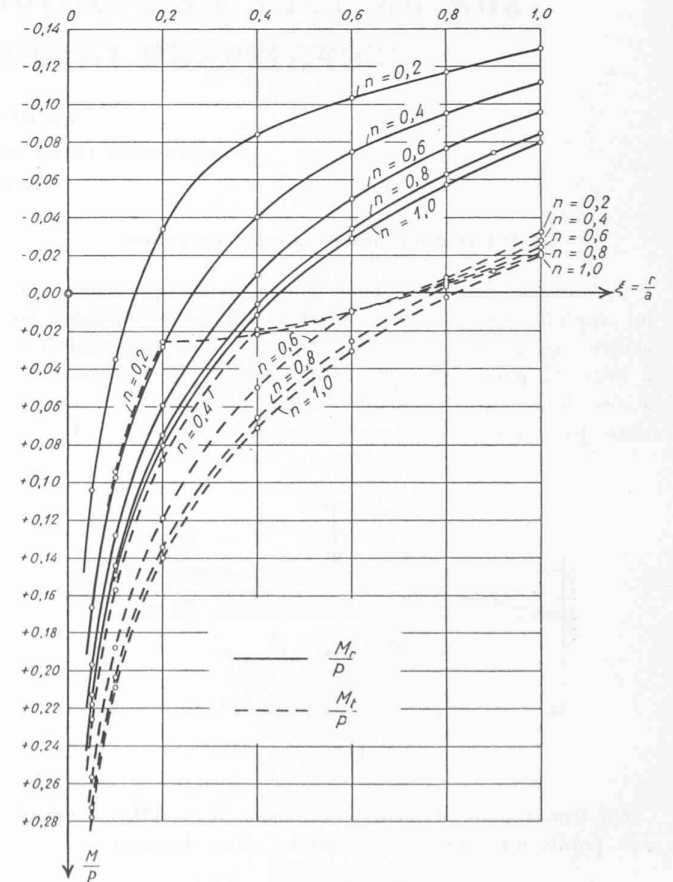


Fig. 9. — Plaque circulaire encadrée de la figure 7.

Représentation graphique de M_r et M_t en fonction de $\xi = \frac{r}{a}$ pour différentes valeurs du rapport $n = \frac{b}{a}$.

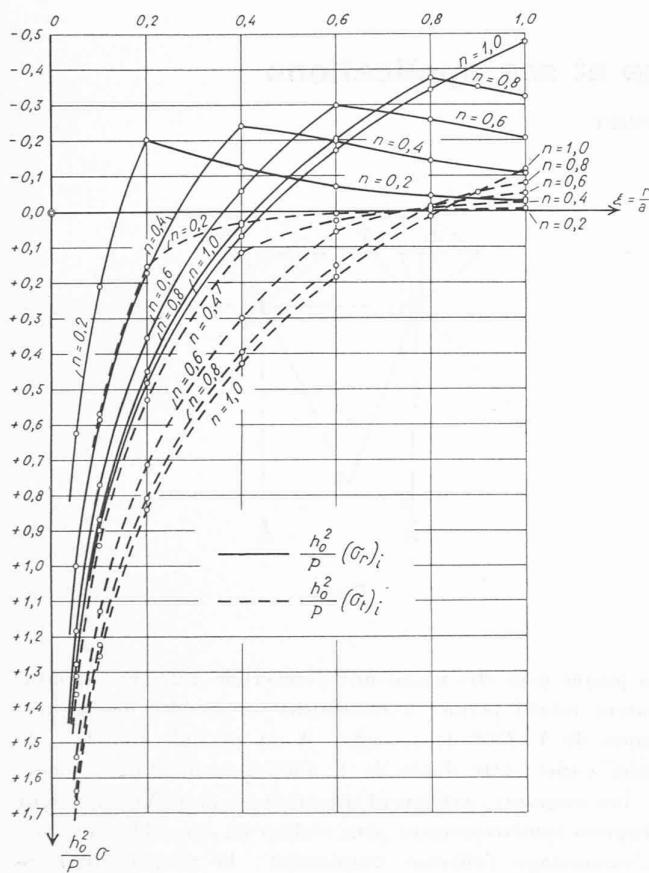


Fig. 10. — Plaque circulaire encastree de la figure 7. Représentation graphique de $(\sigma_r)_i$ et $(\sigma_t)_i$ en fonction de $\xi = \frac{r}{a}$, pour différentes valeurs du rapport $n = \frac{b}{a}$.

force P agissant au centre de la plaque, les moments de flexion et les tensions normales deviennent infiniment grands en ce point.

Or on sait qu'au voisinage du point d'application d'une force concentrée, la théorie utilisée dans le présent calcul doit être révisée. Dans le cas où une force P agit au centre d'une plaque circulaire simplement posée, d'épaisseur constante h_0 et de rayon b , A. Nadai et S. Woinowsky-Krieger ont montré, par une analyse délicate du problème, que les tensions σ_r et σ_t , aux points A et B de la figure 11, sont données par les formules² :

$$(\sigma_r)_A = (\sigma_t)_A = \sigma_1 - \frac{P}{\pi \epsilon^2} \left[\frac{1 + 2\nu}{2} - (1 + \nu) \beta \right], \quad (46)$$

$$(\sigma_r)_B = (\sigma_t)_B = \frac{P}{h_0^2} \left[(1 + \nu) (0,485 \text{ Log } \frac{b}{h_0} + 0,52) + 0,48 \right], \quad (47)$$

où ϵ désigne le rayon du petit cercle où la force P est supposée agir uniformément et σ_1 est la tension normale en A

¹ Les figures 4 et 8 permettront en particulier au lecteur de comparer la flèche due à une surcharge uniformément répartie dont la valeur totale est $P = \pi a^2 p$, à celle engendrée par une force concentrée de même valeur, appliquée au centre de la plaque.

² Voir S. TIMOSHENKO, *Theory of Plates and Shells*, p. 75. Voir aussi A. NADAI, *Elastische Platten*, p. 308, et S. WOINOWSKY-KRIEGER, *Ing. Archiv*, ol. 4, 1933, p. 305.

que donne la théorie ordinaire des plaques en tenant compte de la répartition de cette force. Quant à β , c'est un coefficient dépendant du rapport ϵ/h_0 .

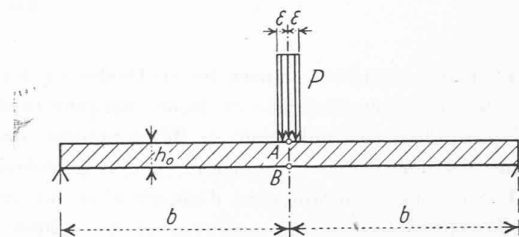


Fig. 11.

Dans les applications, on peut cependant se contenter de ne calculer que la tension au point B, qui est une traction, car la tension relative au point A est une compression de caractère local qui occasionne très rarement la rupture de la matière¹. La formule (47) donne donc la valeur de la tension dangereuse au centre de la plaque de la figure 11.

Cette formule peut être appliquée au cas étudié ici, à condition d'ajouter au second membre la valeur de la traction produite en B par le moment $M_0 = \mu'P$ agissant sur le contour $r = b$ de la partie centrale de la plaque (fig. 7). Ce moment M_0 engendre dans le domaine $0 < r < b$ des moments constants et indépendants de la direction de l'élément considéré, égaux à M_0 . La traction supplémentaire est

$$\text{ainsi : } (\sigma_r)_B = (\sigma_t)_B = \frac{M_0}{h_0^2/6} = \frac{6\mu'}{h_0^2} P.$$

En ajoutant cette valeur à celle donnée par (47), on obtient donc pour la tension dangereuse au centre de la plaque :

$$(\sigma_r)_B = (\sigma_t)_B = \frac{P}{h_0^2} \left[(1 + \nu) (0,485 \text{ Log } \frac{b}{h_0} + 0,52) + 6\mu' + 0,48 \right]. \quad (48)$$

En résumé, les tensions $(\sigma_r)_i$, $(\sigma_t)_i$ relatives à la plaque de la figure 7 sont données par les diagrammes de la figure 10, sauf au voisinage du centre, où la tension dangereuse, qui se produit au point B, est donnée par la formule (48).

Ajoutons que la comparaison des figures 6 et 10 montre que l'influence du renforcement dû à l'épaisseur variable sur les tensions $(\sigma_r)_i$ et $(\sigma_t)_i$ relatives au contour de la plaque ($\xi = 1$), est sensiblement la même dans les deux cas que nous avons étudiés ici.

Remarque. En vertu des hypothèses faites dans le § 1, il est évident que les résultats obtenus dans cette étude ne seront applicables que si h_0 et H sont petits par rapport à a^2 et si z_0 est lui-même petit par rapport à h_0 . Pour s'affranchir de ces conditions restrictives, il serait nécessaire d'introduire dans les calculs l'étirement du feuillet moyen et les déformations dues aux efforts tranchants, influences que nous avons négligées.

Zurich, le 29 juin 1949.

¹ Voir S. TIMOSHENKO, *loc. cit.*, p. 77.

² Les profils de plaque esquissés dans les figures 4 et 8, en haut, satisfont à cette condition (sauf pour $n = 0,2$ et peut-être pour $n = 0,4$). Ce n'est par contre pas le cas des figures 1, 3a à c et 7, où l'on a intentionnellement exagéré les dimensions verticales, pour la clarté du dessin.