Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande

Band: 75 (1949)

Heft: 4

Artikel: Flambage par compression axiale: application de la théorie de la plasticité

Autor: Szécsi, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-56857

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

FLAMBAGE PAR COMPRESSION AXIALE

Application de la théorie de la plasticité

par A. SZÉCSI, ingénieur

Introduction

Le point de départ de tous les calculs statiques est la constatation de l'état d'équilibre des constructions. Cette constatation est nécessaire pour l'application de la théorie de l'élasticité ainsi que pour la nouvelle théorie de la plasticité. La différence essentielle entre la théorie de l'élasticité et la nouvelle théorie de la plasticité réside dans le fait que cette dernière prend en considération les déformations vraies des constructions.

Les déformations vraies peuvent être décomposées en deux parties :

La première dépendant linéairement des sollicitations : force, température, tassement, etc. ; la deuxième, non linéaire, étant la déformation supplémentaire qui se développe plus rapidement que les sollicitations. Les déformations supplémentaires se produisent dès que, dans une section quelconque d'une poutre, certaines tensions dépassent la limite de proportionnalité de la matière.

Dans tous les problèmes d'équilibre et de flambage, la détermination exacte de la déformation des éprouvettes (colonnes) est essentielle.

Comme la théorie de l'élasticité suppose la linéarité des relations entre forces et déformations spécifiques, elle ne peut donner des résultats satisfaisants et exacts, conformes aux essais, que dans le cas où les tensions ne dépassent la limite de proportionnalité de la matière en aucune section de la construction.

Il faut remarquer que les calculs doivent être faits non pas avec les forces « admissibles », mais avec une force fictive, résultat du produit de la force admissible par le coefficient de sécurité, c'est-à-dire avec la force de « rupture ».

A la suite d'accidents désastreux (effondrement de constructions, accidents résultant du flambage), l'on a été contraint d'élaborer une méthode spéciale pour les problèmes de flambage qui donne des résultats satisfaisants. Cette méthode spéciale se rencontre généralement dans les études traitant de la théorie d'élasticité ; toutefois l'on ne reconnaît généralement pas que cette méthode spéciale n'est autre chose que la prise en considération plus ou moins exacte des déformations réelles des constructions — dans notre cas des colonnes — et qu'il ne s'agit pas de la théorie d'élasticité, mais bien de la théorie de la plasticité. Le plus souvent, les faits ci-dessus ne sont même pas mentionnés et sans en chercher les raisons exactes et réelles, les résultats des calculs sont simplement comparés avec les résultats d'essais.

Dans le bref résumé qui suit, l'on verra combien l'application de la nouvelle théorie de la plasticité (c'est-à-dire la prise en considération des déformations réelles des colonnes) aux problèmes du flambage centrique est facile et simple.

Problème

Les valeurs T_k, σ_k et λ doivent être déterminées pour les colonnes de divers matériaux de sections quelconques mais constantes dans toute la longueur de la colonne-éprouvette qui est centriquement chargée à l'aide des articulations.

Base des calculs

Le diagramme compression-raccourcissement des matériaux est connu.

Hypothèses

1. Les sections planes restent également planes après déformation (les répartitions des déformations spécifiques dans une section sont aussi linéaires après déformation).
2. Les déformations des diverses fibres de la colonne suivent la loi du diagramme.
3. La forme de la section est telle qu'un flambage partiel ne puisse survenir et que la section ne subisse pas de déformation considérable sous l'effet des charges.
4. L'effet des forces du cisaillement est négligeable.
5. L'effet normal est égal aux charges dans toutes les sections, également après déformation.
6. Les flèches sont « petites » et, par suite, la partie du diagramme correspondant aux tensions à l'axe neutre peut être remplacée par la tangente au diagramme en ce point.

Solution

Les hypothèses ci-dessus permettent de déterminer la distribution des tensions dans les sections et les conditions d'équilibre peuvent être exprimées par exemple sur les sections centriques de la colonne.

Selon la figure 1, nous utilisons les notations suivantes :

Hauteur de la section dans la direction du flambage y_0

Largeur de la section à une distance y, mesurée du côté concave . . . . . b_y

Distance de la ligne du centre de gravité de la section et du bord concave de la section (droite $y = 0$) . αy_0

où α est un coefficient encore inconnu.

Surface de la section . . . . . F_0

Moment statique de la section par rapport à la droite $y = 0$ . . . . . S_0

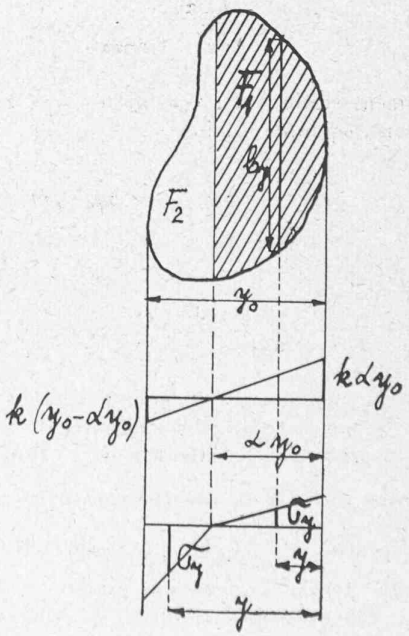


Fig. 1.

Moment d'inertie de la section par rapport à la droite $y = 0$ . . . . . I_0
Surface entre les droites $y = 0$ et $y = \alpha y_0$ . . . . F_1
Surface supplémentaire $F_0 - F_1$ . . . . . F_2
Moment statique de la surface F_1 par rapport à la droite $y = 0$ . . . . . S_1
Moment statique de la surface F_2 par rapport à la droite $y = 0$ . . . . . S_2
Moment d'inertie de la surface F_1 par rapport à la droite $y = 0$ . . . . . I_1
Moment d'inertie de la surface F_2 par rapport à la droite $y = 0$ . . . . . I_2
Rotation relative de deux sections situées à une distance égale à l'unité : $\frac{1}{\rho} = k = k_{el} + \Delta k = \frac{M}{EI} + \Delta k$.

Les tensions dues aux moments fléchissants seront :

entre les droites $y = 0$ et $y = \alpha y_0$:

$$\sigma_y = Tk(\alpha y_0 - y)$$

et dans la partie $y = \alpha y_0$; — $y = y_0$:

$$\sigma_y = -Ek(y - \alpha y_0).$$

Détermination de la forme de la colonne fléchie

L'équilibre est exprimé à l'aide des équations suivantes :

A. La somme algébrique des contraintes (tensions) dues au moment fléchissant est égale à zéro.

$$\int_{F_0} \sigma_M dF = 0 ; \int_0^{\alpha y_0} T \cdot k \cdot (\alpha y_0 - y)\, dF - \int_{\alpha y_0}^{y_0} E \cdot k \cdot (y - \alpha y_0) dF = 0.$$

Après intégration :

$$T \cdot k \cdot (\alpha y_0 F_1 - S_1) - E \cdot k \cdot (S_2 - \alpha y_0 F_2) = 0,$$

d'où

$$\alpha = \frac{1}{y_0} \frac{TS_1 + ES_2}{TF_1 + EF_2}. \qquad (1)$$

En remplaçant dans l'équation (1)

$$F_1 = F_0 - F_2 ; \quad S_1 = S_0 - S_2$$

on obtient

$$\frac{T}{E - T} = \frac{F_2 \alpha y_0 - S_2}{S_0 - F_0 \alpha y_0}. \qquad (A)$$

B. Le moment statique des contraintes dues au moment fléchissant, équilibre celui-ci.

$$\int_0^{\alpha y_0} T \cdot k \cdot (\alpha y_0 - y)\, y dF - \int_{\alpha y_0}^{y_0} E \cdot k \cdot (y - \alpha y_0)\, y dF + M = 0$$

$$T \cdot k \cdot (\alpha y_0 S_1 - I_1) - E \cdot k (I_2 - \alpha y_0 S_2) + M = 0$$

$$k = \frac{M}{E(I_2 - \alpha y_0 S_2) - T(\alpha y_0 S_1 - I_1)}. \qquad (2)$$

L'équation (2) montre qu'à chaque σ_K (tension au centre de gravité), la relation M, k est linéaire et, à cause de $M = P \cdot \eta$, k dépend aussi linéairement de η. Il s'ensuit que la relation entre Δk et η est aussi linéaire car $\Delta k = k - \frac{M}{EI}$.

Dès lors, la valeur $\frac{\Delta k}{k}$ dépend uniquement de la tension sur l'axe neutre (tension au centre de gravité) et de la forme de la section. Elle est indépendante de la grandeur de k et de z (voir fig. 2).

Ceci ne signifie pas autre chose que la ligne (courbe) des Δk a la même forme que la ligne k_{el} ou encore que la ligne des Δk suit la forme de la ligne k.

Sachant que la forme de la ligne k_{el} est une demi-sinusoïde, il en résulte que la courbe k est aussi demi-sinusoïde.

Détermination des modules de flambage centrique T_k

La figure 2 montre que l'on a :

$$\eta_z = \eta_{max} \sin \frac{\pi z}{l} \qquad (3)$$

où η_z est l'ordonnée de la déformée à une distance z. Le moment fléchissant à une distance z de l'articulation est :

$$M_z = P \cdot \eta_z \qquad (4)$$

$$\eta_{max} = \eta_{\frac{l}{2}} = \frac{l}{2} \int_0^{\frac{l}{2}} k \cdot dz - \int_0^{\frac{l}{2}} k \left(\frac{l}{2} - z\right) dz = \int_0^{\frac{l}{2}} k \cdot z \cdot dz. \qquad (5)$$

Mais comme :

$$k = k_{el} + \Delta k$$

on a

$$\eta_{max} = \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{M_z}{EI} + \Delta k\right) z \cdot dz = \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{l}{2}} M_z \cdot z dz + \int_0^{\frac{l}{2}} \Delta k \cdot z \cdot dz = \eta_I + \eta_{II}. \qquad (6)$$

En considérant les équations (3) et (4), on peut écrire :

$$\eta_I = \frac{P}{EI} \eta_{max} \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\sin \frac{\pi z}{l}\right) z dz = \frac{P}{EI} \eta_{max} \frac{l^2}{\pi^2}. \qquad (7)$$

η_{II} est l'effet des rotations supplémentaires spécifiques : Δk.

Nous savons que la ligne Δk est une demi-sinusoïde.

Avec les dénominations de la figure 3 :

$F_{\Delta k}$ = demi-surface de la demi-sinusoïde.
$S_{\Delta k}$ = distance du centre de gravité de $F_{\Delta k}$ selon figure 3.

$$\eta_{II} = F_{\Delta k} \cdot s_{\Delta k}$$

où

$$F_{\Delta k} = \Delta k_{max} \cdot \frac{l}{\pi} \quad \text{et} \quad s_{\Delta k} = \frac{l}{\pi}$$

donc

$$\eta_{II} = \Delta k_{max} \cdot \frac{l^2}{\pi^2}. \qquad (8)$$

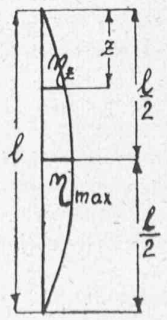


Fig. 2.

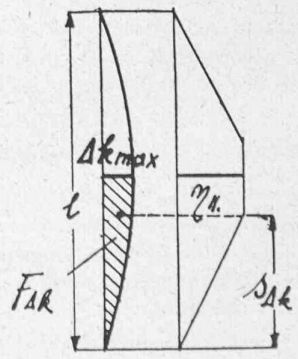


Fig. 3.

En introduisant les résultats (7) et (8) dans l'équation (6)

$$\eta_{max} = \left(\frac{P}{EI}\,\eta_{max} + \triangle k_{max}\right)\frac{l^2}{\pi^2}$$

ou en supprimant les indices (max.) pour la clarté de l'exposé et en considérant également l'équation $\triangle k = k - \frac{M}{EI}$

$$\frac{M}{P} = \left(\frac{M}{EI} + k - \frac{M}{EI}\right)\frac{l^2}{\pi^2} = k\,\frac{l^2}{\pi^2} \qquad (9)$$

ou

$$\frac{M}{k} = P\,\frac{l^2}{\pi^2}. \qquad (10)$$

On tire P

$$P = \frac{\pi^2}{l^2}\,\frac{M}{k}$$

et, tenant compte de l'équation (2)

$$P = \frac{\pi^2}{l^2}\,[E\,(I_2 - \alpha y_0\,S_2) - T\,(\alpha y_0\,S_1 - I_1)]. \qquad (11)$$

On peut mettre l'équation (11) sous la forme $P = \frac{\pi^2}{l^2}\,T_k\,I$ où I est le moment d'inertie de la section par rapport au centre de gravité et T_k la valeur cherchée du module de flambage centrique :

$$T_k = \frac{M}{I \cdot k} = \frac{1}{I}\,[E\,(I_2 - \alpha y_0\,S_2) - T\,(\alpha y_0\,S_1 - I_1)].$$

Si, dans la dernière équation on introduit les valeurs

$$S_1 = S_0 - S_2 \quad \text{et}$$
$$I_1 = I_0 - I_2 \quad \text{on obtient}$$
$$T_k\,I = (E - T)\,(I_2 - \alpha y_0\,S_2) + T\,(I_0 - \alpha y_0\,S_0)$$

et

$$\frac{T_k}{E-T} = \frac{1}{I}\left[I_2 - \alpha y_0\,S_2 + \frac{T}{E-T}\,(I_0 - \alpha y_0\,S_0)\right]. \qquad \text{(B)}$$

Les termes de droite des équations (A) et (B) ne comportent aucune constante des matériaux ; ils dépendent uniquement de la forme de la section.

A l'aide des équations (A) et (B), les diagrammes :

$$\alpha\,;\ \frac{T}{E} = \frac{\frac{T}{E-T}}{1 + \frac{T}{E-T}} \quad \text{et} \quad \alpha\,;\ \frac{T_k}{E} = \frac{T_k}{E-T}\left(1 - \frac{T}{E}\right)$$

sont faciles à déterminer.

Les formules (A) et (B) peuvent être établies pour diverses sections par des calculs élémentaires. Les résultats sont les suivants :

Section rectangulaire :

A. $\frac{T}{E-T} = \frac{(1-\alpha)^2}{2\alpha - 1}$

B. $\frac{T_k}{E-T} = \frac{T}{E-T}\,4\,\alpha^2$

$T_k = 4\,\alpha^2\,T.$

Section circulaire :

A.

$$\frac{T}{E-T} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{3}\,\mathrm{tg}\,\beta + \frac{1}{6}\sin 2\beta - \beta\right]$$

où $\cos\beta = 2\alpha - 1.$

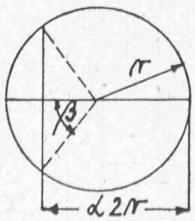


Fig. 4.

B.

$$J_2 = r^4\left[\beta\,\frac{5+\cos\beta}{4} + \frac{4}{3}\sin^3\beta - \frac{1}{2}\sin\beta\cos^3\beta - \sin\beta\cos\beta\right]$$

$$S_2 = r^3\left[\frac{2}{3}\sin\beta + \beta - \sin\beta\cos\beta\left(1 + \frac{2}{3}\cos\beta\right)\right]$$

$$S_0 = r^3\,\pi \qquad I_0 = \frac{5\pi}{4}\,r^4$$

$$I = \frac{\pi}{4}\,r^4.$$

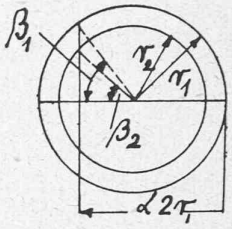


Fig. 5.

Section anneau circulaire :

A.

$$F_2 = r_1^{\,2}(\beta_1 - \sin\beta_1\cos\beta_1) - r_2^{\,2}\,(\beta_2 - \sin\beta_2\cos\beta_2)$$

$$S_2 = r_1^{\,3}\left[\frac{2}{3}\sin\beta_1 + \beta_1 - \sin\beta_1\cos\beta_1\left(1 + \frac{2}{3}\cos\beta_1\right)\right] + - r_2^{\,3}\left[\frac{2}{3}\sin\beta_2 + \beta_2 - \sin\beta_2\cos\beta_2\left(1 + \frac{2}{3}\cos\beta_2\right)\right] + - r_2^{\,2}(r_1 - r_2)\,(\beta_2 - \sin\beta_2\cos\beta_2)$$

$S_0 = r_1^3\pi\,(1 - \varphi^2)$ où $\frac{r_2}{r_1} = \varphi < 1$, et $F_0 = \pi\,(r_1^2 - r_2^2)$.

B.

$$I_2 = r_1^{\,4}\left[\beta_1\,\frac{5+\cos\beta_1}{4} + \frac{4}{3}\sin^3\beta_1 - \frac{1}{2}\sin\beta_1\cos^3\beta_1 - \sin\beta_1\cos\beta_1\right] + - r_2^{\,4}\left[\beta_2\,\frac{5+\cos\beta_2}{4} + \frac{4}{3}\sin^3\beta_3 - \frac{1}{2}\sin\beta_2\cos^3\beta_2 - \sin\beta_2\cos\beta_2\right] + - r_2^{\,2}(r_1 - r_2)\,(\beta_2 - \sin\beta_2\cos\beta_2)\left[\frac{4}{3}\,r_2\,\frac{\sin^3\beta_2}{\beta_2 - \sin\beta_2\cos\beta_2} + r_1 + r_2\right]$$

$$I_0 = \frac{\pi}{4}\,r_1^{\,4}\,[5 - \varphi^2\,(\varphi^2 + 4)].$$

Section I :

A.

$F_0 = b y_0\,\gamma_1$

où $\gamma_1 = 2\,\beta_2 + \beta_1\,(1 - 2\,\beta_2)$

$S_0 = \frac{b y_0^{\,2}}{2}\,\gamma_2$

où $\gamma_2 = \beta_1 + 2\,\beta_2\,(1 - \beta_1)$

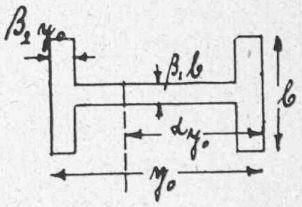


Fig. 6.

$$F_2 = b y_0\left[\frac{\gamma_1}{2} - \beta_1\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$S_2 = \frac{b y_0^{\,2}}{2}\,[1 - (1 - \beta_2)^2\,(1 - \beta_1) - \beta_1\,\alpha^2]$$

B.

$$I_0 = \frac{b y_0^{\,3}}{3}\left(\gamma_3 + \frac{3}{4}\,\gamma_1\right) \quad \text{où} \quad \gamma_3 = \frac{1}{4} - 2\left(\frac{1}{2} - \beta_2\right)^3 (1 - \beta_1)$$

$$I = \frac{b y_0^{\,3}}{3}\,\gamma_3$$

$$I_2 = \frac{b y_0^{\,3}}{3}\,[1 - (1 - \beta_2)^3\,(1 - \beta_1) - \beta_1\,\alpha^3].$$

Section T direction du flambage ⊣ ←

A.

$F_0 = b y_0 \beta$ où $\beta = \beta_1 + \beta_2 (1 - \beta_1)$

$S_0 = \frac{b y_0^2}{2} \gamma_1$ où $\gamma_1 = \beta_1 + \beta_2^2 (1 - \beta_1)$

$F_2 = \beta_1 b y_0 (1 - \alpha)$

$S_2 = \beta_1 b \frac{y_0^2}{2} (1 - \alpha^2)$

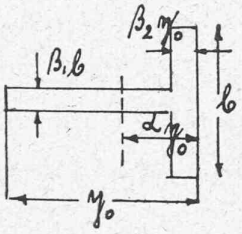


Fig. 7.

B.

$I_0 = \frac{b y_0^3}{3} \delta_1$

où $\delta_1 = \beta_1 + (\beta_2^3 1 - \beta_1)$

$I = \frac{b y_0^3}{3} \varphi$ où $\varphi = \delta_1 - \frac{3}{4} \frac{\gamma_1^2}{\beta}$

$I_2 = \alpha_1 b \frac{y_0^3}{3} (1 - \alpha^3)$;

$$\frac{T_k}{E - T} = \frac{\beta_1}{2\varphi} \left[2 - 3\alpha + \alpha^3 + \frac{(1-\alpha)^2}{2\alpha\beta - \gamma_1} (2\delta_1 - 3\gamma_1 \alpha) \right]$$

$$\frac{T}{E - T} = \beta_1 \frac{(1-\alpha)^2}{2\alpha\beta - \gamma_1}.$$

Section T direction du flambage ⊣ →

A.

$S_0 = \frac{b y_0^2}{2} \gamma_{II}$ où $\gamma_{II} = 1 - (1 - \beta_2)^2 (1 - \beta_1)$

si $\alpha y_0 \leqq y_0 - \beta_2 y_0$ si $\alpha y_0 \geqq y_0 - \beta_2 y_0$

$$\frac{T}{E - T} = \frac{\gamma_{II} + \alpha (\beta_1 \alpha - 2\beta)}{2\alpha\beta - \gamma_{II}} \qquad \frac{T}{E - T} = \frac{(1-\alpha)^2}{2\alpha\beta - \gamma_{II}}.$$

B.

$I_0 = \frac{b y_0^3}{3} \delta_{II}$ où $\delta_{II} = 1 - (1 - \beta_2)^3 (1 - \beta_1)$

si $\alpha y_0 \leqq y_0 - \beta_2 y_0$

$$\frac{T_k}{E - T} = \frac{1}{\varphi} \left[\left(1 + \frac{T}{E - T} \right) \left(\delta_{II} - \frac{3}{2} \alpha \gamma_{II} \right) + \frac{\alpha^3}{2} \beta_1 \right];$$

si $\alpha y_0 \geqq y_0 - \beta_2 y_0$

$$\frac{T_k}{E - T} = \frac{1}{2\varphi} \left[2 - 3\alpha + \alpha^3 + \frac{T}{E - T} (2\delta_{II} - 3\alpha\gamma_{II}) \right].$$

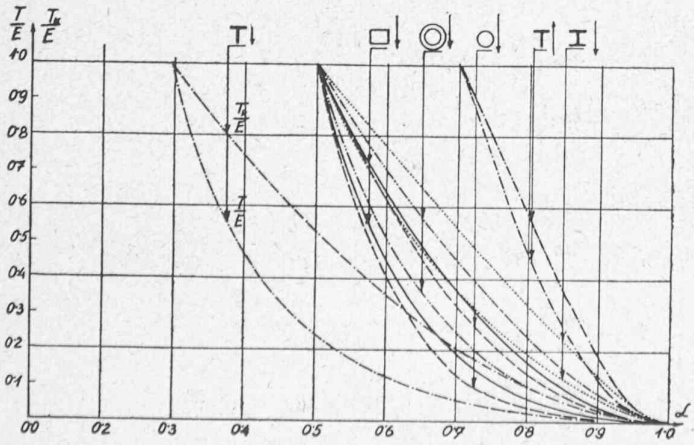


Fig. I.

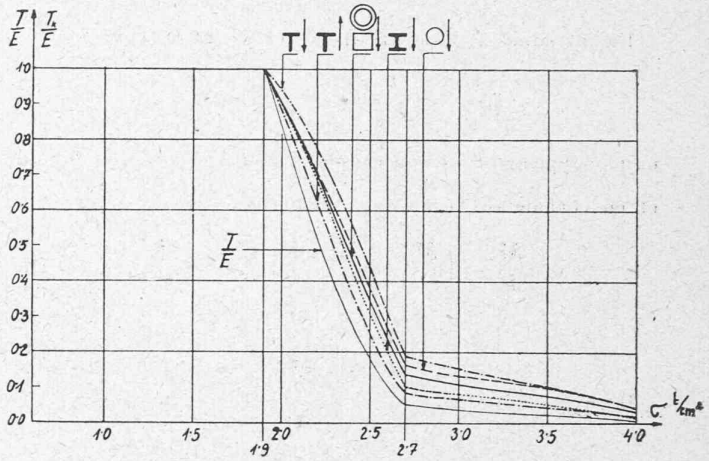


Fig. II. Fer.

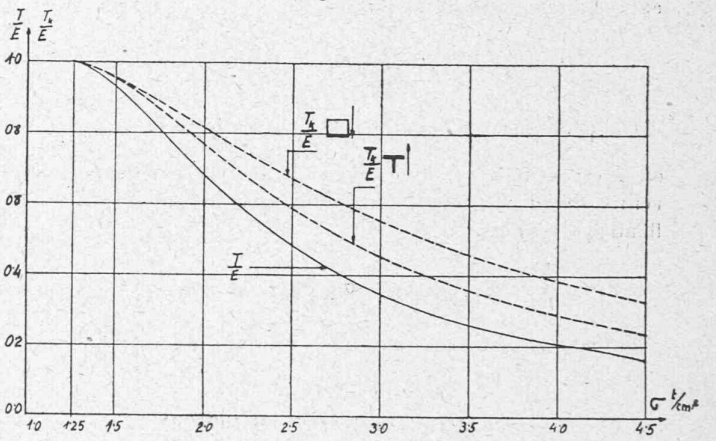


Fig. II. Fonte.

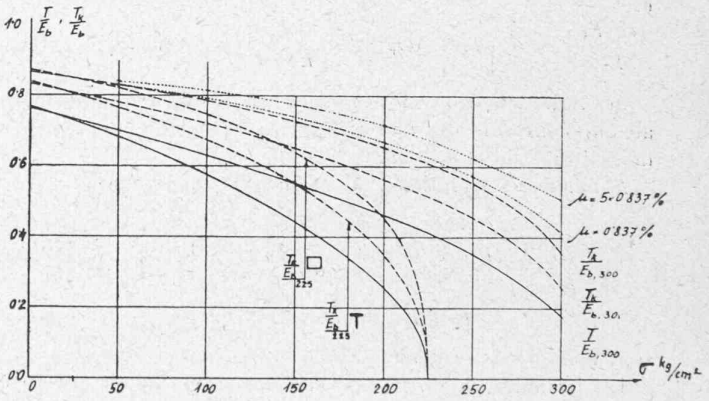


Fig. II. Béton.

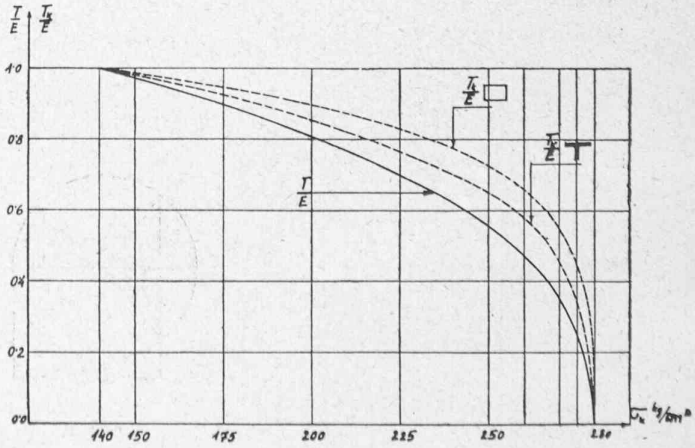


Fig. II. Bois.

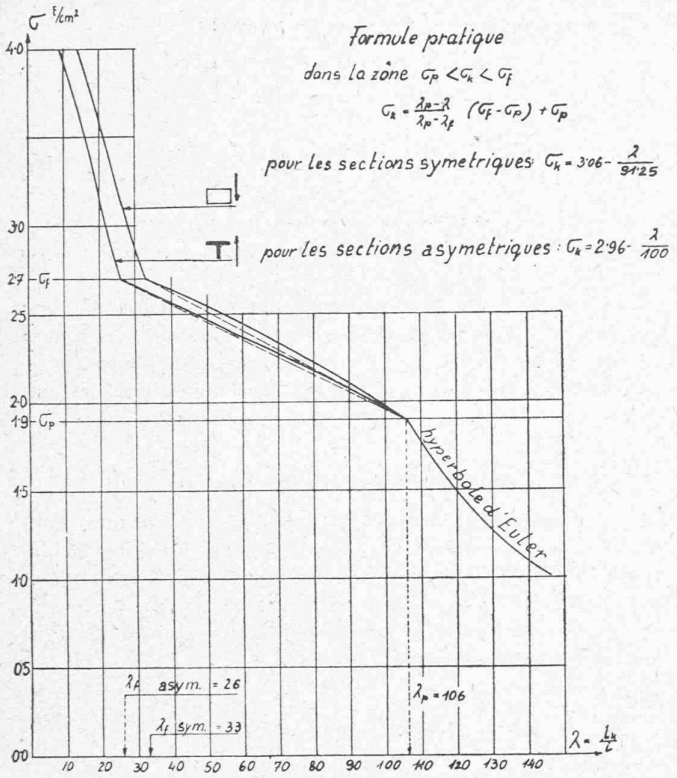
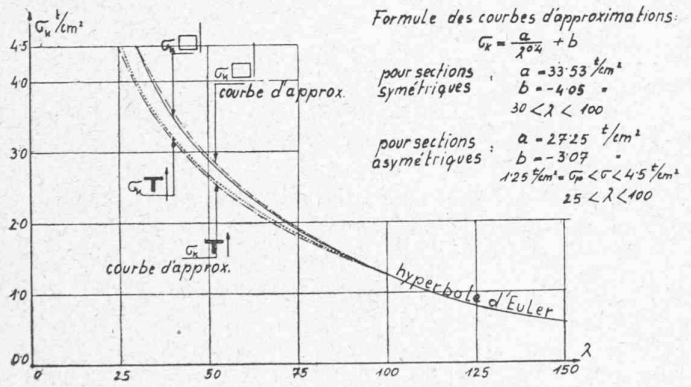


Fig. III. Fer.



Fig, III. Fonte,

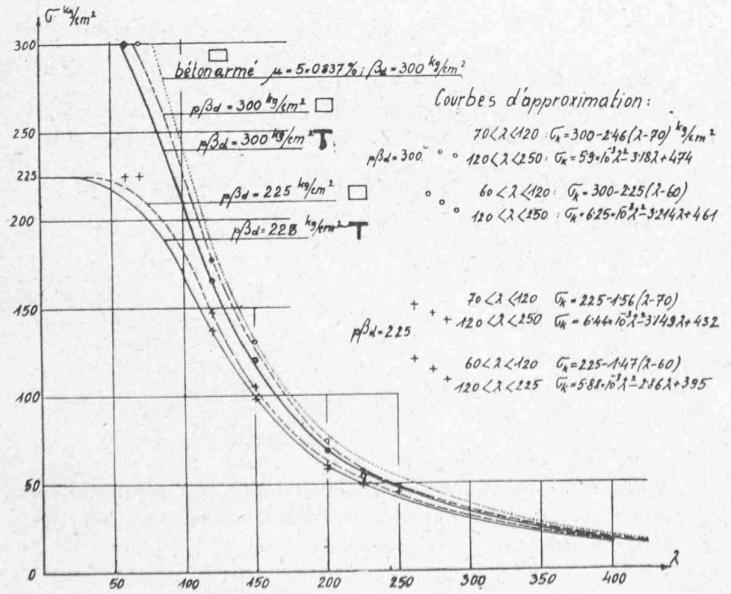


Fig. III. Béton.

Les résultats sont représentés dans la figure I.

Du diagramme compression-raccourcissement, nous connaissons la courbe σ ; $\frac{T}{E}$; à l'aide de celle-ci et de la figure I, il est facile de dessiner la courbe σ ; $\frac{T_k}{E}$ en recherchant des valeurs $\sigma = \sigma_k$ et $\frac{T_k}{E}$ correspondant à la même valeur $\frac{T}{E}$.

Les résultats sont présentés pour chacun des différents matériaux sur les figures II fer, II fonte, etc.

Les figures II montrent que les valeurs correspondant aux mêmes valeurs σ_k pour les différentes sections peuvent avoir des différences allant jusqu'à 25 %.

C'est pour cette raison qu'il n'est pas permis d'employer par exemple pour une section T, des valeurs d'une section rectangulaire choisie uniquement par les mêmes valeurs de compression σ_k.

Méthode de construction de la figure (σ_k, λ)

De l'équation connue (de la formule 11)

$$\sigma_k = \frac{T_k}{\lambda^2}\pi^2 ; \quad \lambda = \frac{l}{i} ;$$

où l est la longueur du flambage et i le rayon d'inertie de la section.

$\lambda = \pi\sqrt{\frac{T_k}{\sigma_k}}$, et ainsi avec les valeurs T_k, σ_k correspondantes, la figure (σ_k, λ) est facile à dessiner. Les résultats pour les divers matériaux figurent sur le tableau III fer, III fonte, etc. Les divergences entre les diagrammes des diverses sections dépendent du matériau. Généralement les divergences sont petites et, pratiquement, l'on ne peut constater celles-ci qu'entre les sections symétriques et asymétriques. Dans le tableau III, on peut comparer les courbes des sections symétriques et asymétriques.

De la figure II, fer, l'on peut constater que les résultats obtenus pour la section rectangulaire sont applicables avec une exactitude pratiquement suffisante pour toutes les sections symétriques. Des divergences ne peuvent être constatées qu'avec les lignes des sections asymétriques, section T ; ces dernières sont à considérer comme caractéristiques des sections asymétriques.

La forme de la courbe (σ_k, λ) est déterminée par le diagramme compression-raccourcissement.

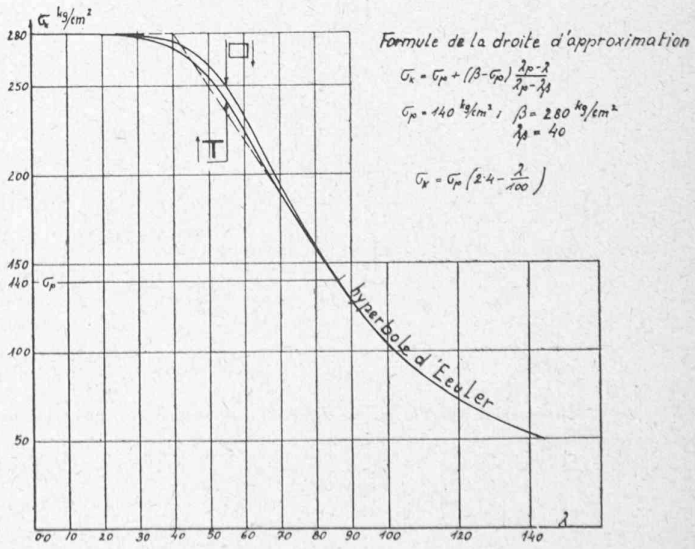


Fig. III. Bois.

En examinant les diverses formes des dits diagrammes, on peut déterminer les cas suivants :

α) Si le diagramme commence avec une ligne droite — ligne E — (fer, acier, acier à haute résistance, fonte, bois, etc.), la courbe (σ_k, λ) est dans la zone $0 < \sigma_k < \sigma_p$ l'hyperbole d'Euler. Dans la zone $\sigma_p < \sigma_k < \sigma_f$ la courbe construite selon la méthode donnée ci-dessus, peut être remplacée pour les matériaux tels que fer, acier, acier à haute résistance et bois, par une ligne droite. Le commencement de cette ligne droite est le point $\left(\sigma_k = \sigma_p ; \lambda_p = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}\right)$.

La dite ligne droite est indiquée sur la figure III.

Pour la fonte, la courbe (σ_k, λ) peut être remplacée dans la zone $\sigma_k > \sigma_p$ assez exactement pour la pratique, par l'hyperbole suivante $\sigma_k^{t/cm^2} = \frac{a}{\lambda^n} + b$ où a, b et n sont des constantes.

β) Pour les matériaux où dans le diagramme il n'y a pas de ligne droite E (béton), la courbe (σ_k, λ) commence directement avec une hyperbole au point $(\sigma_k = 0, \lambda = \infty)$; cette hyperbole est plus plate que l'hyperbole d'Euler.

La dite hyperbole pour le béton $(225 < \beta_p < 300)$ et dans la zone $120 < \lambda < 250$ assez exacte pour la pratique, peut être remplacée par la courbe $\sigma_k = \frac{N}{\lambda^n}$ où $n < 2$. Les valeurs n et N sont à déduire de deux paires de valeurs correspondantes. La parabole $\sigma_k = a\lambda^2 + b\lambda + c$ donne une approximation encore meilleure. Les constantes a, b, et c sont à déterminer à l'aide des valeurs correspondantes.

La courbe continue comme indiquée sous α).

Le point final de l'hyperbole (parabole) qui, en même temps, est le point de départ de la ligne droite, est pour le béton $(225 < \beta_p < 300)$ indiqué assez exactement par $\lambda = 120$.

Pour les différents matériaux, les formules pratiques sont indiquées sur les tableaux III.

Béton armé

La méthode décrite ci-dessus peut être employée directement pour des sections quelconques de béton armé, à condition qu'elle satisfasse à l'hypothèse « 3 ». Dans ce cas, nous devons introduire dans les formules, au lieu des vraies valeurs de la section, les valeurs « idéales » données ci-dessous :

Surface idéale de la section :

$$F_{io} = F_{bo} + \frac{T_e}{T_b} F_{e1} + \frac{E_e}{E_{bel}} F_{e2}$$

$$F_{i1} = F_{1b} + \frac{T_e}{T_b} F_{i1} \qquad F_{i2} = F_{2b} + \frac{E_e}{E_{bel}} F_{e2}.$$

Moment statique idéal de la section :

$$S_{i0} = S_{b0} + \frac{T_e}{T_b} S_{e1} + \frac{E_e}{E_{bel}} S_{e2}$$

$$S_{i1} = S_{b1} + \frac{T_e}{T_{b1}} S_{e1} \qquad S_{i2} = S_{b2} + \frac{E_e}{E_{bel}} S_{e2}.$$

Moment d'inertie idéal de la section :

$$I_{0i} = I_{0b} + \frac{T_e}{T_b} I_{e1} + \frac{E_e}{E_{bel}} I_{e2} = I_{i1} + I_{i2}$$

$$I_{i1} = I_{b1} + \frac{T_e}{T_b} I_{e1} ; \qquad I_{i2} = I_{b2} + \frac{E_e}{E_{bel}} I_{e2}.$$

Moment d'inertie idéal relatif au centre de gravité de la section :

$$I_i = I_b + \frac{E_e}{E_{bel}} I_e.$$

Avec ces données, l'équation (A) devient :

$$\frac{T_b}{E_b - T_b} = \frac{\alpha y_0 F_{i2} - S_{i2}}{S_{i0} - \alpha y_0 F_{i0}} \qquad \text{(C)}$$

et l'équation (B) :

$$\frac{T_k}{E_b - T_b} = \frac{1}{I_i}\left[I_{i2} - \alpha y_0 S_{i2} + \frac{T_b}{E_b - T_b}(I_{i0} - \alpha y_0 S_{i0})\right] \qquad \text{(D)}$$

A l'aide de l'équation (C), on peut déterminer la valeur α correspondant à la tension σ_k et à l'aide de l'équation (D) la valeur T_k.

Les résultats (σ_k, λ) déterminés par notre méthode sont indiqués à la figure II et III du béton. Les résultats signifient indubitablement que les valeurs σ_k sont pratiquement indépendantes de la quantité de l'armature longitudinale et sont égales aux valeurs σ_k de la section sans armature.

Application pratique des résultats

Afin de pouvoir employer pratiquement les formules indiquées, il est nécessaire de connaître l'expression mathématique des divers diagrammes compression-raccourcissement des matériaux.

Pour les matériaux de construction les plus importants, nous donnons les formules suivantes :

Fer

Dans la zone

$$0 < \sigma < \sigma_p, \quad \epsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad tg\,\alpha = T = E.$$

Dans la zone

$$\sigma_p < \sigma < \sigma_f, \quad \epsilon\,{}^0/_{00} = \frac{1}{a\sigma^3 + b\sigma^2 + c\sigma + d}; \; T = -\frac{1}{\epsilon^2\,(3a\sigma^2 + 2b\sigma + c)}.$$

Dans la zone

$$\sigma_f < \sigma < \beta_d \quad \epsilon\,{}^0/_{00} = \frac{1}{\bar{a}\sigma^3 + \bar{b}\sigma^2 + \bar{c}\sigma + \bar{d}}; \; T = -\frac{1}{\epsilon^2\,(3\bar{a}\sigma^2 + 2\bar{b}\sigma + \bar{c})},$$

où les constantes a, b, c, d sont à déterminer par des calculs élémentaires.

En admettant pour base le diagramme idéal, compression-raccourcissement, publié par M. le professeur Dr M. Ros *, nous obtenons pour les constantes les valeurs suivantes :

$$a = -\frac{2.0354}{\sigma_p^3} \quad b = +\frac{5.4993}{\sigma_p^2} \quad c = -\frac{6.0238}{\sigma_p} \quad d = +3.6916$$

$$\bar{a} = -\frac{0.8358}{\sigma_f^3} \quad \bar{b} = +\frac{3.4666}{\sigma_f^2} \quad \bar{c} = -\frac{4.9315}{\sigma_f} \quad \bar{d} = +2.4435$$

où $\sigma_f = \bar{\sigma}_p$; $\sigma_p = 1.9$ t/cm², $\sigma_f = 2.7$ t/cm².

Les divergences entre le diagramme idéal, résultat des essais, et la courbe exprimée avec les constantes données sont insignifiantes (max. 0,4 %).

La formule indiquée est utilisable également pour l'acier à haute résistance, naturellement avec d'autres constantes.

Les valeurs $\frac{T}{E}$ sont représentées sur la figure II, fer.

Fonte

Dans la zone $0 < \sigma < \sigma_p$ $\quad \epsilon = \frac{\sigma}{E} \quad T = \text{tg}\,\alpha = E.$

Dans la zone $\sigma_p < \sigma < \sigma_m$ $\quad \epsilon = \frac{\sigma}{E} + \left(\epsilon_m - \frac{\sigma_m}{E}\right)\left(\frac{\sigma - \sigma_p}{\sigma_m - \sigma_p}\right)^n;$

$$T = \frac{1}{\frac{1}{E} + \left(\epsilon_m - \frac{\sigma_m}{E}\right)\frac{n}{\sigma_m - \sigma_p}\left(\frac{\sigma - \sigma_p}{\sigma_m - \sigma_p}\right)^{n-1}}.$$

Selon le diagramme construit d'après les résultats des essais (publiés dans le rapport de MM. le professeur Dr M. Ros et le Dr Brunner) ** les constantes sont :

$\epsilon_p = 1.0\ ^0/_{00}$; $\epsilon_m = 8.7\ ^0/_{00}$ $\epsilon_v = 3.4\ ^0/_{00}$

$\sigma_p = 1.25$ t/cm² $\sigma_m = 4.5$ t/cm² $\sigma_v = 3.0$ t/cm²

et $E = 1250/\text{cm}^2$, $n = 2.6314$.

Les divergences du dit diagramme sont insignifiantes. Les valeurs $\frac{T}{E}$ sont indiquées dans la figure II, fonte.

Bois

Dans la zone

$0 < \sigma < \sigma_p$ $\epsilon = \frac{\sigma}{E}$ $T = \text{tg}\,\alpha = E$

Dans la zone

$\sigma_p < \sigma < \beta_0$ $\sigma = \beta_0 - A\,(\epsilon_0 - \epsilon)^n$; $T = A \cdot n \cdot (\epsilon_0 - \epsilon)^{n-1}$

où A et n sont des constantes de matériaux qui doivent être considérées comme connues par les valeurs σ_p, ϵ_p, E, β_0 = tension de rupture, ϵ_0 = déformation de rupture et par la formule

$$n = \frac{\frac{\epsilon_0}{\epsilon_p} - 1}{\frac{\beta_0}{\sigma_p} - 1} \quad \text{et} \quad A = \frac{\beta_0 - \sigma_p}{(\epsilon_0 - \epsilon_p)^n}.$$

D'après le diagramme construit avec les valeurs des résultats d'essais **, les constantes sont :

$\sigma_p = 140$ kg/cm² $\beta_0 = 280$ kg/cm² $E = 105{,}000$ kg/cm²

$\epsilon_p = 1.3333\ ^0/_{00}$ $\epsilon_0 = 3.5\ ^0/_{00}$

$A = 2.9886 \cdot 10^6$

$n = 1.625$.

La courbe représentative de la formule se trouve légèrement au-dessous de celle des essais, les divergences sont insignifiantes et sont du côté de la sécurité.

Les valeurs $\frac{T}{E}$ sont représentées dans la figure II, bois.

Béton

L'on sait que le diagramme compression-raccourcissement du béton ne commence pas par une ligne droite E. La relation σ, ϵ peut être représentée avec une bonne approximation par une parabole de la forme

$$\sigma = \frac{\beta\epsilon}{(2a - 1)\,\epsilon_0^2}\,(2a\,\epsilon_0 - \epsilon) \quad ***$$

où

β = fatigue de rupture du prisme

ϵ_0 = déformation de rupture

a = constante, dépendant de la qualité du béton.

a sera déterminé à l'aide de la tangente à l'origine du diagramme connu de l'essai :

De la formule :

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon} = \text{tg}\,\alpha = T = \frac{\beta\,(2a\,\epsilon_0 - 2\,\epsilon)}{(2a - 1)\,\epsilon_0^2}$$

$$E_{bin} = 2a\,\frac{\beta}{(2a - 1)\,\epsilon_0} \quad \text{et} \quad T = E_{bin} - \frac{E_{bin}}{a}\,\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

$$\text{et} \quad a = \frac{1}{2}\,\frac{\epsilon_0 \cdot E_{bin}}{\epsilon_0 \cdot E_{bin} - \beta} \qquad T = E_{bin}\left(1 - \frac{\epsilon}{a\epsilon_0}\right).$$

La ligne droite de déchargement E_{bel} est un peu plus rapide que E_{bin} et exprimée avec une approximation suffisante par la formule

$$E_{bel} = 600{,}000\,\frac{p\beta d}{p\beta d + 180}. \quad ****$$

Les valeurs $\frac{I}{E_{bel}}$ sont représentées sur la figure II, béton.

Quelques remarques au sujet des hypothèses et des résultats

Il résulte de l'hypothèse 6 que les efforts tranchants ne peuvent être qu'insignifiants[1] et que les sections planes restent planes après déformation[2]. Il résulte également que les efforts normaux sont dans chaque section égaux à la charge.

Pour l'hypothèse 2 :

Les fibres moyennes de la section ont en fait d'autres conditions-limites que celles de la partie extérieure de la section, mais le diagramme compression-raccourcissement est aussi différent si la forme de l'éprouvette subit une modification essentielle. En réalité, le diagramme exprime l'effet intégral des fibres extérieures et intérieures et donne des valeurs moyennes. L'hypothèse 2 fournit la possibilité de traiter le problème par voie mathématique.

Résultats

On tire de l'équation (10) :

$$\frac{P\eta_{max}}{k_{max}} = P\,\frac{l^2}{\pi^2}$$

et

$$\eta_{max} = k_{max}\,\frac{l^2}{\pi^2}. \qquad (12)$$

En introduisant la valeur de k_{max}, on obtient l'équation

$$\eta_{max} = \frac{P\,\eta_{max}}{E\,(I_2 - \alpha y_0\,S_2) - T\,(\alpha y_0\,S_1 - I_1)}\,\frac{l^2}{\pi^2}. \qquad (13)$$

Cette dernière relation montre que si la force P a sa valeur critique, l'équation (13) est satisfaite par toutes les valeurs η_{max}, c'est-à-dire qu'à la force critique ne correspond pas un η_{max} déterminé, mais que la force critique provoque un état d'équilibre indifférent. Ce fait est prouvé également par les essais.

Si nous appliquons l'équation fondamentale (B), à la section rectangulaire, nous obtenons à l'aide de l'équation (1) et avec $T_k = 4\alpha^2 T$, l'équation :

$$T_k = \frac{4TE}{(\sqrt{E} + \sqrt{T})^2}. \qquad (E)$$

Cette équation est valable pour tous les matériaux. Elle ne diffère en rien de la formule connue * pour section rectangulaire, obtenue par l'« ancienne » méthode, sans l'application explicite de la théorie de la plasticité.

Nous voyons dès lors que la nouvelle théorie de la plasticité donne des moyens de traiter le problème du flambage centrique pour des sections quelconques en toute généralité et, en même temps, confirme la thèse exprimée dans l'introduction.

Si, au lieu des formules générales données pour la section effective, nous employons l'équation (E), les erreurs maximum auront les valeurs suivantes (la section a une forme T) :

Fer

Dans la zone $\sigma_p < \sigma < \sigma_f$ 3 %

» » » $\sigma_f < \sigma < \beta_d$ 16 %

Bois

Dans la zone $\sigma_p < \sigma < \beta_d$ 4 %

Fonte

Dans la zone $\sigma_p = 1.25 < \sigma < 2.5$ 7 %

» » » $2.5 < \sigma < 4.5$ 12,5 %

Béton

Dans la zone $0 < \sigma < \beta_d$ 10 %

[1] La même chose est exprimée dans l'hypothèse 4.

[2] Ce résultat est exprimé dans l'hypothèse 1.

On constate dès lors que l'équation (E) peut être employée avec une exactitude suffisante selon sa formule pratique donnée sur les tableaux III des divers matériaux mais, pour les sections spéciales, ouvertes, ou semblables à la forme T, il faut effectuer le calcul exact selon la formule générale.

Bibliographie

* *Bemessung zentrisch und exzentrisch gedrückter Stäbe auf Knickung* (publié dans le « Bericht über die II. Internationale Tagung für Brückenbau und Hochbau », Wien 1929).

** *Die Knickfestigkeit der technisch wichtigsten Baustoffe.* Beitrag zur Denkschrift anlässlich des 50-jährigen Bestehens der Eidg. Materialprüfungsanstalt an der Eidg. Technischen Hochschule Zürich, November 1930.

*** EMPA Bericht Nr. 89 : *Die Knickung der Eisenbeton-Säulen*, von Dr. Oskar Baumann, Zürich 1934.

**** EMPA Bericht Nr. 99 : *Lehre und Nutzen aus den Versuchen und Erfahrungen an ausgeführten Eisenbeton Bauwerken in der Schweiz 1924-1927.* Fünfte Ergänzung 1947.

CARNET DES CONCOURS

Temple de Saint-Marc, à Lausanne.

Jugement du jury

Le jury s'est réuni les 20, 21, 22 et 24 janvier 1949 et a examiné les quarante et un projets et dix variantes qui ont été présentés dans les délais réglementaires.

Ce jury, composé de MM. F. Panchaud, ingénieur, président ; J. Tschumi, architecte ; Ed. Virieux, architecte cantonal, et R. Loup, architecte, a décerné les trois prix suivants :

1er prix : 1900 fr., MM. *R.* et *P. Bonnard, E. Boy de la Tour*, architectes, Lausanne. Collaborateurs : *G. Jaunin* et *P. Rossi.*

2e prix : 1800 fr., M. *M. Piccard*, architecte, Lausanne.

3e prix : 1300 fr., M. *Ph. Bridel*, architecte, Zurich.

Il a proposé en outre l'achat des projets et variantes suivants :

Premier achat : Variante de M. *E. Blauer*, architecte, Corsier sur Vevey.

Deuxième achat : Projet de MM. *Favarger* et *Murisier*, architectes, Lausanne. Collaborateurs : MM. *Gindroz, Chauvie* et *Buhler.*

Troisième achat : Projet de MM. *Berguer* et *Hämmerli*, architectes, Lausanne.

Quatrième achat : Projet de MM. *A. Pahud* et *I. Ferrari*, architectes, Renens et Lausanne.

Muséum de Genève

Publication des extraits du rapport du jury et des projets primés.

ERRATUM. — Une regrettable erreur de mise en page s'est glissée dans notre numéro du 29 janvier.

La troisième figure de la page 33 fait partie du projet de M. R. BARRO, architecte, à Zurich (et non pas de celui de M. le Dr. Rohn) et aurait dû être placée à la page 34.

Nous déplorons le fâcheux concours de circonstances qui conduisit à une confusion que nos lecteurs auront réparée d'eux-mêmes. (Réd.)

Rédaction : D. BONNARD, ingénieur.

STS SCHWEIZER. TECHNISCHE STELLENVERMITTLUNG
SERVICE TECHNIQUE SUISSE DE PLACEMENT
SERVIZIO TECNICO SVIZZERO DI COLLOCAMENTO
SWISS TECHNICAL SERVICE OF EMPLOYMENT

ZURICH 2, Beethovenstr. 1 - Tél. 051 23 34 26 - Télégr. : STSINGENIEUR ZURICH

Emplois vacants :

Section du bâtiment et du génie civil

94. *Ingénieur.* Béton armé, bâtiment et génie civil. Zurich.

96. *Jeune technicien en bâtiment* ou *dessinateur.* Chantier. Bureau d'architecte au nord-est de la Suisse.

102. *Technicien en génie civil.* Calculs et construction, élaboration de projets. Bureau d'ingénieur de Suisse romande.

106. *Dessinateur en béton armé.* Bureau d'ingénieur en ville, Suisse orientale.

108. *Jeune technicien en bâtiment.* Nord-est de la Suisse.

110. *Dessinateur en béton armé.* Suisse centrale.

112. *Technicien en bâtiment.* Bureau d'architecte à Zurich.

114. *Jeune technicien en bâtiment.* Détails d'exécution. Environs de Berne.

116. *Ingénieur civil*, très qualifié et énergique, d'excellente santé, pour diriger un chantier difficile (construction d'un pont cantilever en béton armé sur la Saône, de 120 mètres d'ouverture totale) dans la région de Dijon. Age : 30 à 40 ans. Conditions très intéressantes. Entreprise en France.

122. *Technicien en génie civil*, ayant plusieurs années de pratique de chantier, pour la direction indépendante d'un petit réservoir de puissance hydraulique (réservoir avec mur et mœllons, transmission installée en terre et centrale). Condition : bonnes connaissances de la langue italienne. Entrée avril-mai 1949. Durée d'engagement jusqu'en automne 1950. Société d'électricité du Sud de la Suisse.

124. *Jeune technicien en bâtiment.* Reconstructions au Creusot et à Châlon-sur-Saône. Durée d'engagement : six mois à une année. Bureau d'architecte en France.

132. *Technicien en génie civil.* Projets et exécution de routes. Nord-est de la Suisse.

136. *Technicien en génie civil.* Dix ans de pratique. Bureau d'ingénieur, nord-est de la Suisse.

142. *Ingénieur* ou *technicien.* Chantier en galeries. Suisse centrale.

144. *Dessinateur en bâtiment.* Environs de Zurich.

152. *Architecte* ou *technicien en bâtiment.* Bureau d'architecte du canton des Grisons.

156. *Technicien en bâtiment.* Bureau d'architecte à Zurich.

164. *Jeune ingénieur* capable ou *technicien en génie civil.* Bureau et chantier. Canalisations, routes, génie civil en général. Canton de Zurich.

166. *Jeune technicien en béton armé* ou *dessinateur.* Bureau d'ingénieur à Zurich.

Sont pourvus les numéros, de 1948 : 210, 238, 476, 522, 952, 1002, 1048 ; *de 1949 :* 2, 84, 90.

Section industrielle

37. *Technicien mécanicien.* Age minimum : 30 ans et *jeune dessinateur.* Suisse orientale.

39. *Technicien.* Construction d'outils (démonstration, montage, instruction des ouvriers et mise en service. Vie au Brésil et langue portugaise. Maison de commerce suisse au Brésil.

41. *Ingénieur électricien.* Calculs de moteurs ; langues française et anglaise et

dessinateur mécanicien. Grande fabrique de machines de Suisse orientale.

45. *Ingénieur* ou *technicien.* Carrosserie de wagons et tramways. Age : 30 ans et

serrurier de carrosserie. Suisse centrale.

47. *Constructeur.* Machines. Zurich.

49. *Technicien.* Electrotechnique. Age jusqu'à : 25 ans.

51. *Technicien électricien.* Construction de petits moteurs de série. Suisse orientale.

53. *Technicien de fabrication.* Grande fabrique de machines de la Suisse orientale.

55. *Ingénieur* ou *technicien.* Chauffage et installations de ventilation. Suisse centrale.

57. *Ingénieur électricien* ou *technicien.* Haute fréquence. Age maximum 35 ans. Suisse centrale.

59. *Ingénieur.* Chef d'exploitation. Ateliers de constructions mécaniques. Langue allemande. Usine à Strasbourg.

61. *Ingénieur.* Chef d'une agence dans grande ville de province en France. Installations frigorifiques.

63. *Dessinateur mécanicien.* Zurich.

65. Jeune *dessinateur mécanicien.* Moteurs à combustion. Suisse orientale.

67. Jeune *dessinateur mécanicien.* Appareils électriques, construction. Canton de Zurich.

Sont pourvus les numéros, de 1947 : 533 ; *de 1948* : 499, 607, 609, 613, 643 ; *1949* : 3.

Lausanne. — Imprimerie La Concorde.