La forme de l'amphithéatre de Pola

Autor(en): **Ansermet, A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin technique de la Suisse romande**

Band (Jahr): **77 (1951)**

Heft 13

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-58155

LA FORME DE L'AMPHITHÉATRE DE POLA

par A. ANSERMET, ingénieur, professeur à l'Ecole polytechnique de Lausanne

Une revue technique paraissant à Vienne publia, il y a un certain nombre d'années, un article qui fut fort remarqué à l'époque sur la forme géométrique de l'amphithéâtre de Pola. L'auteur, A. Broch, ancien directeur du Bureau des calculs du Service topographique autrichien, arrivait à cette conclusion que les architectes romains avaient su conférer à l'arène une forme elliptique de précision presque rigoureuse. Après avoir déterminé l'équation de l'ellipse, l'auteur calcula tous les éléments (longueurs et orientation des axes, etc. [2]). Mais au lieu de déterminer au préalable 5 points, ce qui serait suffisant pour résoudre le problème, A. Broch leva 12 points, répartis sur la périphérie du mur d'enceinte plus ou moins vétuste. Un tel degré de surdétermination laisse pressentir que les calculs seront assez laborieux. Des problèmes de ce genre sont courants dans tous les domaines de la technique et dans les sciences appliquées. Les inconnues et les quantités mesurées ou observées sont liées mutuellement par une fonction de forme implicite ; or les divers auteurs qui ont donné des solutions de ce problème ne sont pas unanimes et des divergences se sont manifestées. La solution développée par A. Broch fut discutée ; elle paraît avoir rencontré l'approbation de principe du professeur R. Schumann, bien connu pour ses recherches, notamment dans le domaine de la compensation vectorielle. Ce dernier publia un mémoire dans les comptes rendus de l'Académie des Sciences de Vienne (classe mathémat. [4]). Peu après cependant, d'autres auteurs, dont les publications font autorité également, formulèrent d'expresses réserves au sujet du mémoire Schumann. Citons les professeurs O. Eggert (Ecole polytechnique, Berlin), C. F. Baeschlin (E. P. F., Zurich), Werkmeister (Ecole polytechnique, Dresde).

Un des buts de ces lignes est de mettre en parallèle deux modes de calcul en traitant également un cas concret ; le choix de Pola a paru intéressant, car il chevauche sur les domaines de l'ingénieur et de l'architecte. Les éléments utilisés sont ceux fournis par la publication de A. Broch (voir [2]).

Position du problème

Considérons la fonction implicite

$$F(A, B, C \ldots x_i, y_i) = 0 \qquad i = 1, 2 \ldots n$$

où $A, B, C \ldots$ sont des paramètres à calculer et x_i, y_i les quantités mesurées ou observées. Une première solution, appelée parfois indirecte, consiste à éliminer au préalable ces paramètres. On est alors ramené à une forme de compensation qui est familière et les divergences auxquelles il a été fait allusion précédemment sont éliminées. Si c'est nécessaire on a recours à des valeurs provisoires (approchées) A_o, B_o, $C_o \ldots$ des paramètres :

$$A = A_o + \delta A\ , \qquad B = B_o + \delta B\ , \qquad C = C_o + \delta C\ \ldots$$

les termes de second ordre en δA, δB, $\delta C \ldots$ étant par hypothèse négligeables. Cette solution peut paraître séduisante ; en général elle ne donne pas satisfaction. Si $n = 12$ et pour 5 paramètres, on peut former

$$\binom{n}{r} = \binom{12}{5} = \frac{12 \times 11 \ldots \times 8}{5\,!} = 792 \text{ groupes de 5 équations.}$$

Théoriquement, le choix de ces équations est indifférent ; il n'est pas superflu de remarquer que, dans le cas de l'amphithéâtre de Pola, on aurait 792 ellipses définies chacune par 5 points. Gauss lui-même a qualifié cette solution indirecte de voie détournée et peu naturelle (unnatürlicher Umweg).

Solution de A. Broch

La fonction $F(A, B, C \ldots x, y) = 0$ prend la forme :

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + 1 = 0$$

où les coordonnées ont les valeurs :

$i =$	$y =$	$x =$	$i =$	$y =$	$x =$
1	+ 9.55	— 60.00	7	— 12.00	+ 60.00
2	+ 35.50	— 40.00	8	— 22.00	+ 54.35
3	+ 50.00	— 10.00	9	— 42.00	+ 31.70
4	+ 53.05	+ 10.00	10	— 52.00	+ 1.80
5	+ 45.75	+ 40.00	11	— 45.15	— 40.00
6	+ 8.00	+ 64.00	12	— 22.90	— 60.00

A. Broch assimile à une équation aux erreurs l'expression :

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + 1 = v$$

où v est en réalité une discordance (Widerspruch) ; le terme absolu est constant (égal à l'unité)

$$(1) \qquad Ay_i^2 + Bx_iy_i + Cx_i^2 + Dy_i + Ex_i + 1 = v_i \qquad (i = 1, 2 \ldots 12)$$

avec la condition $\Sigma\,(vv) = [vv] = \text{minimum}$.

Les équations normales, sous forme implicite, seront ([1], p. 101) :

$$(2) \qquad [y^2v] = [xy\,v] = [x^2v] = [y\,v] = [x\,v] = 0.$$

Les systèmes (1) et (2) permettent le calcul simultané des 5 paramètres et des 12 discordances v_i. En général on renonce à ce calcul simultané, préférant développer les équations normales sous forme explicite :

$$(3) \quad \begin{array}{rrrrrl} \underline{[y^2\,y^2]}A + & [y^2\;xy]B + & [y^2\;x^2]C + & [y^2\;y]D + & [y^2\;x]E + & [y^2] = 0 \\ & \underline{[xy\,xy]}B + & [xy\,x^2]C + & [xy\,y]D + & [xy\,x]E + & [xy] = 0 \\ & & \underline{[x^2\;x^2]}C + & [x^2\;y]D + & [x^2\;x]E + & [x^2] = 0 \\ & & & \underline{[y^2]}\;\;D + & [y\,x]\;\;E + & [y] = 0 \\ & & & & \underline{[x^2]}\;\;E + & [x] = 0 \end{array}$$

Comme d'usage, les termes à coefficients non quadratiques, situés en dessous de la diagonale constituée par les coefficients quadratiques (soulignés) n'ont pas été écrits. Les vingt coefficients non quadratiques sont deux à deux égaux, ce qui justifie cette simplification.

Les valeurs numériques sont (coefficients de A, B, $C \ldots$) :

A	B	C	D	E	termes absolus
35 261 000	+3 382 000	+15 366 000	+85 058	+ 17 805	+16 482 =0
	15 366 000	+ 1 067 000	+17 805	— 97 787	+ 219 =0
		73 093 000	—97 787	+174 550	+23 858 =0
			16 482	+ 219	+ 6 =0
				23 858	+ 52 =0

d'où

$$A = -\,0.000\,3661 \qquad D = -\,0.000\,0510$$
$$B = +\,0.000\,0857 \qquad E = +\,0.000\,2915$$
$$C = -\,0.000\,2515$$

et pour les discordances :

$$v_1 = -\,0.0058 \qquad v_5 = -\,0.0022 \qquad v_9 = -\,0.0013$$
$$v_2 = +\,0.0011 \qquad v_6 = +\,0.0088 \qquad v_{10} = +\,0.0045$$
$$v_3 = +\,0.0113 \qquad v_7 = -\,0.0016 \qquad v_{11} = -\,0.0032$$
$$v_4 = -\,0.0097 \qquad v_8 = -\,0.0056 \qquad v_{12} = +\,0.0042$$

Ces résultats laissent pressentir, par leur petitesse, combien l'ellipse ainsi déterminée diffère peu du parement intérieur de l'arène. A. Broch a calculé encore les corrections v_x et v_y

à apporter aux coordonnées pour que l'équation de la courbe soit rigoureusement satisfaite

$$(4)\quad A\,(y + v_y)^2 + B\,(x + v_x)\,(y + v_y) + C\,(x + v_x)^2 + + D\,(y + v_y) + E\,(x + v_x) + 1 = 0$$

et, en négligeant les termes de deuxième ordre en v_x et v_y :

$$(5)\quad (2Ay + Bx + D)\,v_y + (By + 2Cx + E)\,v_x + v = 0$$

puis en désignant par P et Q les coefficients de v_y et v_x

$$Pv_y + Qv_x + v = 0 \quad \text{(pour chacun des 12 points)}$$

avec la condition :

$$v_y^2 + v_x^2 = \text{minimum}$$

d'où, après un calcul sur lequel nous reviendrons

$$(6)\qquad v_y = \frac{-Pv}{P^2 + Q^2} \qquad\qquad v_x = \frac{-Qv}{P^2 + Q^2}$$

et, numériquement, en valeurs absolues :

	v_y (calcul A. Broch)	v_x	v_y (calcul A. A.) (1951)	v_x
1	0.06	0.16	0.063	0.162
2	0.02	0.02	0.023	0.018
3	0.28	0.07	0.282	0.072
4	0.25	0.00	0.255	0.000
5	0.06	0.03	0.057	0.031
6	0.00	0.27	0.000	0.282
7	0.02	0.04	0.020	0.043
8	0.09	0.12	0.092	0.128
9	0.02	0.02	0.029	0.017
10	0.11	0.01	0.116	0.015
11	0.08	0.05	0.083	0.046
12	0.05	0.13	0.052	0.127

et $\quad [v_y^2] + [v_x^2] = 0.3190 \quad$ (A. Broch)

$\quad\;\; [v_y^2] + [v_x^2] = 0.3336 \quad$ (A. A.)

Cet écart est faible et nous aurons l'occasion d'y revenir. Les longueurs des axes de l'ellipse sont 129.866 m et 102.560 m. L'orientation de ces axes est donnée par la formule

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{B}{A - C}\;(\alpha = 18^\circ\, 23'\, 42'').$$

Avant d'émettre d'autres considérations, développons la solution Eggert-Baeschlin, que l'on peut appeler aussi la

Solution avec l'emploi d'observations et de poids fictifs

Considérons toujours la fonction

$$F\,(A, B, C \ldots x_i, y_i) = 0$$

qui serait satisfaite si les quantités mesurées ou observées x_i et y_i étaient exemptes d'erreurs ; en réalité on a :

$$F\,(A, B, C \ldots x_i + v_i', y_i + v_i'') = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

et

$$[p'v'v'] + [p''v''v''] = \text{minimum}$$

les p' et p'' étant les poids respectifs ; le calcul prendra donc un autre cours que précédemment.

$$F\,(A, B, C \ldots x_i + v_i', y_i + v_i'') = F\,(A_o, B_o, C_o \ldots x_i, y_i) + + \left(\frac{\partial F}{\partial A}\right)_i \delta A + \left(\frac{\partial F}{\partial B}\right)_i \delta B + \left(\frac{\partial F}{\partial C}\right)_i \delta C \ldots + + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_i v_i' + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_i v_i''.$$

Posons pour simplifier :

$$F\,(A_o, B_o, C_o \ldots x_i, y_i) = w_i.$$

Les valeurs provisoires ou approchées A_o, B_o, C_o ... seront celles calculées par A. Broch ; les w_i jouent le rôle de termes absolus, donc d'éléments observés. Ces w_i sont les v_i de A. Broch.

$$\left(\frac{\partial F}{\partial A}\right)_i = a_i = y_i^2\,; \quad \left(\frac{\partial F}{\partial B}\right)_i = b_i = x_i y_i; \quad \left(\frac{\partial F}{\partial C}\right)_i = c_i = x_i^2\,;$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial D}\right)_i = d_i = y_i\,; \quad \left(\frac{\partial F}{\partial E}\right)_i = e_i = x_i;$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_i = f_i = B_o y_i + 2C_o x_i + E_o\,; \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_i = f_i' = 2A_o y_i + B_o x_i + D_o$$

d'où le système de n équations :

$$(7)\quad w_i + a_i\,\delta A + b_i\,\delta B + c_i\,\delta C + d_i\,\delta D + e_i\,\delta E + + f_i v_i' + f_i' v_i'' = 0.$$

La solution du problème est maintenant aisée (voir [3]). Considérons la fonction φ, où les k_i sont les multiplicateurs :

$$(8)\quad \varphi = [p'v'v'] + [p''v''v''] - 2\sum_{i=1}^{i=n} k_i\,(w_i + a_i\,\delta A + b_i\,\delta B + c_i\,\delta C + d_i\,\delta D + + e_i\,\delta E + f_i v_i' + f_i' v_i'').$$

Ce qui fournit un système de $(2n + 5)$ équations

$$\frac{\partial\varphi}{\partial(\delta A)} = 0\,; \frac{\partial\varphi}{\partial(\delta B)} = 0\,; \frac{\partial\varphi}{\partial(\delta C)} = 0\,; \frac{\partial\varphi}{\partial(\delta D)} = 0\,; \frac{\partial\varphi}{\partial(\delta E)} = 0$$

et les $2n$ équations :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v_i'} = 0 \;;\; \frac{\partial\varphi}{\partial v_i''} = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

ou en développant

$$(9)\quad [a_i k_i]_{i=1}^{i=n} = 0\,; \quad [b_i k_i] = 0\,; \quad [c_i k_i] = 0\,; \quad [d_i k_i] = 0 \;;\; [e_i k_i]_{i=1}^{i=n} = 0$$

et en outre

$$(10)\qquad p_i' v_i' = f_i k_i \;;\; p_i'' v_i'' = f_i' k_i$$

et en combinant les systèmes (7) et (10)

$$(11)\quad w_i + a_i\,\delta A + b_i\,\delta B + c_i\,\delta C \ldots + \left(\frac{f_i^2}{p_i'} + \frac{f_i'^2}{p_i''}\right) k_i = 0.$$

Posons :

$$\frac{1}{p_i} = \left(\frac{f_i^2}{p_i} + \frac{f_i'^2}{p_i''}\right)$$

ce qui donne

$$(12)\quad -k_i = a_i p_i\,\delta A + b_i p_i\,\delta B + c_i p_i\,\delta C \ldots + w_i p_i$$

et en combinant avec les équations (9) :

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} [aap]\delta A + [abp]\delta B + [acp]\delta C + [adp]\delta D + [aep]\delta E + [awp] &= 0\\ [bbp]\delta B + [bcp]\delta C + [bdp]\delta D + [bep]\delta E + [bwp] &= 0\\ [ccp]\delta C + [cdp]\delta D + [cep]\delta E + [cwp] &= 0\\ [ddp]\delta D + [dep]\delta E + [dwp] &= 0\\ [eep]\delta E + [ewp] &= 0 \end{aligned}\right.$$

Ici encore les termes à coefficients non quadratiques égaux ne figurent qu'une fois au lieu de deux ; posons de plus

$$f_i v_i' + f_i' v_i'' = -\lambda_i \qquad (\text{poids } \textit{fictif } p_i)$$

on vérifie sans peine (voir [3]) qu'on a :

$$\frac{1}{p_i} = \frac{f_i^2}{p_i'} + \frac{f_i'^2}{p_i''}$$

d'où le système

$$(14)\quad \lambda_i = w_i + a_i\,\delta A + b_i\,\delta B + c_i\,\delta C + \ldots \quad (\text{poids } p_i)$$

ce qui donne aussi pour les équations normales (13) sous forme implicite :

$$(15) \qquad [pa\lambda]_{i=1}^{i=n} = [pb\lambda] = [pc\lambda] = [pd\lambda] = [pe\lambda]_{i=1}^{i=n} = 0.$$

Le système d'équations aux erreurs (14), malgré son caractère fictif, fournit la solution cherchée. Ce système (14) est en effet totalement équivalent aux $2n$ observations ou mesures primitives x_i, y_i de poids respectifs p_i' et p_i''. En d'autres termes, on obtient pour les cinq inconnues δA, δB, δC, ... les mêmes valeurs et les mêmes poids. Cela résulte de l'identité des équations normales. Les équations (14) peuvent donc être considérées comme initiales, les poids fictifs p_i leur étant appliqués. En combinant les systèmes (11) et (14) on a :

$$\frac{f_i^2}{p_i'} k_i + \frac{f_i'^2}{p_i''} k_i = -\lambda_i = \frac{1}{p_i} k_i$$

et en faisant intervenir (10) :

$$v_i' = -\frac{f_i}{p_i'} p_i \lambda_i \qquad v_i'' = -\frac{f_i'}{p_i''} p_i \lambda_i$$

$$(16) \qquad p_i' v_i'^2 + p_i'' v_i''^2 = p_i^2 \lambda_i^2 \left(\frac{f_i^2}{p_i'} + \frac{f_i'^2}{p_i''} \right) = p_i \lambda_i$$

$$[p' v' v'] + [p'' v'' v''] = [p\lambda\lambda]$$

et pour l'erreur quadratique moyenne m d'une observation de poids *un* :

$$m^2 = \frac{[p' v' v'] + [p'' v'' v'']}{n-5} = \frac{[p\lambda\lambda]}{n-5}$$

(5 inconnues δA, δB, δC ...).

Contrôles par Σ

Ces contrôles sont de rigueur et permettent de vérifier l'expression $[p\lambda\lambda]$ ou la différence $[p\lambda\lambda] - [p\varpi\varpi] = \Sigma$

$$\Sigma = [pa\varpi]\,\delta A + [pb\varpi]\,\delta B + [pc\varpi]\,\delta C + \\ + [pd\varpi]\,\delta D + [pe\varpi]\,\delta E$$

ou $$\Sigma = -\frac{[pa\varpi]^2}{[paa]} - \frac{[pb\varpi.1]^2}{[pbb.1]} - \frac{[pc\varpi.2]^2}{[pcc.2]} - \frac{[pd\varpi.3]^2}{[pdd.3]} - \\ - \frac{[pe\varpi.4]^2}{[pee.4]}.$$

Nous verrons que, dans le cas particulier, Σ est très petit.

Interprétation géométrique des grandeurs fictives λ_i

Considérons un point (x_i, y_i) et la plus courte distance de ce point à la courbe $F(A, B, C \ldots x, y) = 0$ obtenue par la compensation. On prouve sans peine (voir [3]) que

$$\lambda_i^2 = \rho_i^2 \, (f_i^2 + f_i'^2)$$

où ρ_i est cette plus courte distance.

On a de plus :

$$[p\lambda\lambda] = [q\rho\rho] = \text{minimum}$$

où

$$q_i = p_i \, (f_i^2 + f_i'^2) = \frac{1}{\dfrac{f_i^2}{p_i'} + \dfrac{f_i'^2}{p_i''}} \cdot (f_i^2 + f_i'^2).$$

Si $p_i' = p_i'' = 1$ pour $i = 1, 2 \ldots n$, l'expression ci-dessus devient :

$$[p\lambda\lambda] = [\rho\rho] = \text{minimum}.$$

L'interprétation géométrique est immédiate.

Application numérique

Admettons comme valeurs provisoires les paramètres trouvés par A. Broch et faisons de plus l'hypothèse que $p_i' = p_i''$ pour tous les indices i. Si on pose de plus $p_i' = p_i'' = 1$ on a :

$$p_i = \frac{1}{f_i^2 + f_i'^2} \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{p_i} = f_i^2 + f_i'^2$$

et pour éviter des coefficients trop grands dans les équations normales nous substituerons à p_i le quotient $p_i/1000$ $\left(\dfrac{1000}{p_i}\right.$ au lieu de $\left. 1/p_i \right)$. On trouve :

$$0.94 < 1000/p_i < 1.50$$

et pour le système d'équations normales

$$25\,700\,000\,\delta A + 3\,900\,000\,\delta B + 12\,900\,000\,\delta C + 54\,000\,\delta D + \\ + 3400\,\delta E - 1.80 = 0$$
$$+ 3\,900\,000\,\delta A + 12\,900\,000\,\delta B + 3\,100\,000\,\delta C + 3400\,\delta D - \\ - 93\,000\,\mathrm{g}E + 3.96 = 0$$
$$+ 12\,900\,000\,\delta A + 3\,100\,000\,\delta B + 67\,700\,000\,\delta C - 93\,000\,\delta D + \\ + 138\,000\,\delta E + 9.44 = 0$$
$$+ 54\,000\,\delta A + 3400\,\delta B - 93\,000\,\delta C + 12\,300\,\delta D + 1200\,\delta E + \\ + 0.00 = 0$$
$$+ 3400\,\delta A - 93\,000\,\delta B + 138\,000\,\delta C + 1200\,\delta D + 21\,400\,\delta E + \\ + 0.14 = 0$$

ce qui donne pour les cinq inconnues :

$$\delta A = +0.000\,000\,205\,; \quad \delta B = -0.000\,000\,38\,;$$
$$\delta C = -0.000\,000\,148\,; \quad \delta D = -0.000\,000\,82\,;$$
$$\delta E = -0.000\,0070.$$

Ces corrections à apporter aux valeurs provisoires A_o, B_o, C_o ... sont très petites ; on pouvait le présumer à cause de la petitesse des discordances ϖ_i (les v_i de A. Broch). En d'autres termes, cette seconde solution diffère très peu de la première, numériquement parlant. Cette constatation est du reste confirmée par le calcul de Σ :

$$\Sigma = [p\lambda\lambda] - [p\varpi\varpi] = 0.3294 - 0.3336 = -0.0042$$

ou

$$[p\lambda\lambda] = [\rho\rho] = 0.3294$$

les ρ_i, rappelons-le, étant les plus courtes distances des points $(x_i\ y_i)$ à la courbe $F(A, B, C \ldots x, y) = 0$ obtenue par compensation. Ici encore les résultats diffèrent très peu de ceux de A. Broch. C'est une des raisons pour lesquelles le cas de Pola fut choisi à titre concret. La première solution n'en repose pas moins sur une hypothèse arbitraire ; à priori elle justifie les réserves formulées notamment par les professeurs O. Eggert et Baeschlin.

On peut maintenant déterminer tous les éléments de l'ellipse (centre, axes, etc.) en fonction des cinq paramètres ; c'est un problème de géométrie élémentaire. Un calcul un peu plus complexe consiste à déterminer les erreurs quadratiques moyennes de ces mêmes éléments. Ce problème ne sera abordé que très succinctement.

Calcul des éléments de l'ellipse et de leur précision

Une première étape exige le calcul de la précision des cinq paramètres ; il suffit d'écrire les équations aux poids dont la forme est bien connue ([1], p. 125) :

$$\left\{ \begin{aligned} &[paa]Q_{11} + [pab]Q_{12} + [pac]Q_{13} + [pad]Q_{14} + [pae]Q_{15} = 1 \\ &[pab]Q_{11} + [pbb]Q_{12} + [pbc]Q_{13} + [pbd]Q_{14} + [pbe]Q_{15} = 0 \\ &[pac]Q_{11} + [pbc]Q_{12} + [pcc]Q_{13} + [pcd]Q_{14} + [pce]Q_{15} = 0 \\ &[pad]Q_{11} + [pbd]Q_{12} + [pcd]Q_{13} + [pdd]Q_{14} + [pde]Q_{15} = 0 \\ &[pae]Q_{11} + [pbe]Q_{12} + [pce]Q_{13} + [pde]Q_{14} + [pee]Q_{15} = 0 \end{aligned} \right.$$

....
....
....

$$\left\{\begin{array}{l}
[paa]Q_{51} + [pab]Q_{52} + [pac]Q_{53} + [pad]Q_{54} + [pae]Q_{55} = 0 \\
[pab]Q_{51} + [pbb]Q_{52} + [pbc]Q_{53} + [pbd]Q_{54} + [pbe]Q_{55} = 0 \\
[pac]Q_{51} + [pbc]Q_{52} + [pcc]Q_{53} + [pcd]Q_{54} + [pce]Q_{55} = 0 \\
[pad]Q_{51} + [pbd]Q_{52} + [pcd]Q_{53} + [pdd]Q_{54} + [pde]Q_{55} = 0 \\
[pae]Q_{51} + [pbe]Q_{52} + [pce]Q_{53} + [pde]Q_{54} + [pee]Q_{55} = 1
\end{array}\right.$$

Seuls les premier et cinquième systèmes ont été développés ; la formation des deuxième, troisième et quatrième systèmes est aisée.

Ces coefficients quadratiques Q_{11}, Q_{22} ... donnent immédiatement les erreurs moyennes m_A, m_B, m_C ... des inconnues

$$m_A = m\sqrt{Q_{11}}\ ; \quad m_B = m\sqrt{Q_{22}}\ ; \quad m_C = m\sqrt{Q_{33}}\ \ldots$$

$$m^2 = [p\lambda\lambda] : (n - 5).$$

La détermination du centre (x_o, y_o) de l'ellipse F présente plus particulièrement de l'intérêt ; ces coordonnées satisfont aux équations

$$\partial F : \partial x = 0 \quad \text{et} \quad \partial F : \partial y = 0$$

d'où

$$x_o = \varphi(A, B, C \ldots) \quad y_o = \psi(A, B, C \ldots).$$

Le calcul des erreurs quadratiques moyennes m_{x_o} et m_{y_o} est immédiat en fonction des coefficients Q et des paramètres ([1], p. 181)

$$m_{x_o}^2 = \left\{\begin{array}{lllll}
\left(\frac{\partial\varphi}{\partial A}\right)^2 Q_{11} & + 2\frac{\partial\varphi}{\partial A}\frac{\partial\varphi}{\partial B} Q_{12} & + 2\frac{\partial\varphi}{\partial A}\frac{\partial\varphi}{\partial C} Q_{13} & + 2\frac{\partial\varphi}{\partial A}\frac{\partial\varphi}{\partial D} Q_{14} & + 2\frac{\partial\varphi}{\partial A}\frac{\partial\varphi}{\partial E} Q_{15} \\
 & + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial B}\right)^2 Q_{22} & + 2\frac{\partial\varphi}{\partial B}\frac{\partial\varphi}{\partial C} Q_{23} & + 2\frac{\partial\varphi}{\partial B}\frac{\partial\varphi}{\partial D} Q_{24} & + 2\frac{\partial\varphi}{\partial B}\frac{\partial\varphi}{\partial E} Q_{25} \\
 & & + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial C}\right)^2 Q_{33} & + 2\frac{\partial\varphi}{\partial C}\frac{\partial\varphi}{\partial D} Q_{34} & + 2\frac{\partial\varphi}{\partial C}\frac{\partial\varphi}{\partial E} Q_{35} \\
 & & & + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial D}\right)^2 Q_{44} & + 2\frac{\partial\varphi}{\partial D}\frac{\partial\varphi}{\partial E} Q_{45} \\
 & & & & + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial E}\right)^2 Q_{55}
\end{array}\right\} m^2$$

Le calcul de m_{y_o} est analogue ; ces calculs sont faits en général à la règle et il suffit de connaître approximativement les coefficients Q et les dérivées.

Ce problème serait susceptible encore de bien des développements qui dépasseraient les limites que l'auteur s'est tracées.

Conclusions

Le but des lignes qui précèdent était surtout de confronter deux solutions d'un même problème qui est courant dans la pratique de l'ingénieur. La seconde solution est certainement plus rationnelle mais les calculs sont plus longs. Le choix de l'amphithéâtre de Pola comme exemple concret s'est révélé intéressant. Lors des levers l'état des maçonneries était déjà mauvais. On ne peut donc que partager le point de vue exprimé par le conseiller aulique A. Broch : les architectes romains avaient su conférer à l'arène une forme elliptique de précision étonnante.

Littérature

[1] Helmert R., *Ausgleichungsrechnung*, 1924.

[2] Wellisch S., *Probleme der Ausgleichungsrechnung* (p. 200).

[3] Baeschlin C. F., *Schweiz. Zeitschr. f. Vermessung* (1919, p. 241-248).

[4] Schumann R., *Berichte der Akademie der Wissenschaften, Vienne.* Mathemat. Kl. Abt. II a, 125e vol., 10e fasc., 1916, p. 1429-1466.

SOCIÉTÉ SUISSE DES INGÉNIEURS ET DES ARCHITECTES

Extrait du procès-verbal de l'assemblée des délégués de la S.I.A. du 7 avril 1951, à Bâle

1. *Rapport de gestion 1950*

M. Choisy, président, donne un aperçu de l'activité de la société pendant l'exercice écoulé. Le rapport de gestion sera remis à tous les membres de la S. I. A.

2. *Comptes de l'exercice 1950*

Les comptes de 1950 bouclent avec un excédent de recettes de 13 696 fr. 16, alors que ceux de l'exercice précédent présentaient un déficit de 5 002 fr. 91 ; le budget s'équilibre. Ce résultat favorable est dû en partie aux contributions de bureau, prélevées pour la première fois, et surtout aux recettes plus élevées de la vente des normes S. I. A.

Les comptes 1950 sont approuvés à l'unanimité.

3. *Budget 1951*

Le budget pour 1951 est basé sur les comptes 1950. Il est indispensable de maintenir le montant des cotisations et des contributions de bureau, afin que la société puisse faire face à ses tâches actuelles. Le budget pour 1951, fixant la cotisation à 20 fr. et la contribution de bureau à 20 fr. pour les bureaux occupant un ou plusieurs employés techniques, ou 10 fr. pour les bureaux sans employé, est adopté à l'unanimité.

4. *Conditions spéciales et mode de métré pour les isolations thermiques et phoniques*

L'Assemblée des délégués donne au Comité central la compétence de mettre en vigueur ces conditions, après les avoir revues en tenant compte des délibérations de l'Assemblée des délégués et des remarques éventuelles des sections, qui doivent les faire parvenir au secrétariat jusqu'au 15 mai.

5. *Directives concernant le report sur plan, la disposition et la signalisation de conduites souterraines*

M. Wüger, ingénieur, président de la commission chargée de l'établissement de ces directives, présente un exposé sur les travaux de cette commission. L'Assemblée des délégués donne au Comité central la compétence de mettre en vigueur ces directives, établies en collaboration avec les administrations et organisations intéressées. Ici aussi, le Comité central devra tenir compte des observations et suggestions de l'Assemblée des délégués et des sections.

6. *Normes pour les charges, le calcul, la réception, la surveillance et l'entretien des constructions, form. n° 160.*

Normes concernant le calcul, l'exécution et l'entretien des constructions métalliques, form. n° 161.

Normes concernant les constructions en béton, en béton armé et en béton précontraint, form. n° 162.

Normes pour le classement des bois de construction, form. n° 163.

Normes pour le calcul et l'exécution des ouvrages en bois, form. n° 164.

Les présidents des commissions compétentes ou leurs représentants présentent un court exposé sur la revision de ces normes. Il s'agit de MM. professeur F. Hübner (norme 160), O. Wischser, ingénieur (norme 161), A. Sarrasin, ingénieur (norme 162), professeur Dr K. Hofacker (normes 163 et 164).

L'Assemblée des délégués décide d'accorder aux sections un délai jusqu'au 15 mai 1951 pour faire parvenir au secrétariat leurs remarques éventuelles concernant ces nouvelles normes. Une commission de coordination sera chargée de donner aux normes une base uniforme.