Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande

Band: 77 (1951)

Heft: 17

Artikel: Risque de voilement des poutres pleines ou ajournées: calcul graphique

Autor: Paris, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-58159

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

77e année 25 août 1951 No 17

BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les quinze jours

Abonnements:
Suisse: 1 an, 24 francs
Etranger: 28 francs
Pour sociétaires:
Suisse: 1 an, 20 francs
Etranger: 25 francs
Pour les abonnements s'adresser à:
Administration du « Bulletin technique de la Suisse romande »,
Case postale Riponne 21, Lausanne
Compte de chèques postaux II. 5775, à Lausanne
Prix du numéro: Fr. 1,40

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des anciens élèves de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.

Comité de patronage — Président: R. Neeser, ingénieur, à Genève; Vice-président: G. Epitaux, architecte, à Lausanne; Secrétaire: J. Calame, ingénieur, à Genève — Membres, Fribourg: MM. P. Joye, professeur; E. Lateltin, architecte — Vaud: MM. F. Chenaux, ingénieur; E. d'Okolski, architecte; A. Paris, ingénieur; Ch. Thévenaz, architecte — Genève: MM. L. Archinard, ingénieur; Cl. Grosgurin, architecte; E. Martin, architecte; V. Rochat, ingénieur — Neuchâtel: MM. J. Béguin, architecte; G. Furter, ingénieur; R. Guye, ingénieur — Valais: MM. J. Dubuis, ingénieur; D. Burgener, architecte.

Rédaction: D. Bonnard, ingénieur. Case postale Chauderon 475, Lausanne.

Conseil d'administration de la Société anonyme du Bulletin Technique: A. Stucky, ingénieur, président; M. Bridel; G. Epitaux, architecte; R. Neeser, ingénieur.

Tarif des annonces
Le millimètre (larg. 47 mm) 20 cts
Réclames: 60 cts le mm (largeur 95 mm)
Rabais pour annonces répétées
Annonces Suisses S.A.
5, Rue Centrale Tél. 22 33 26
Lausanne et succursales

SOMMAIRE : *Risque de voilement des poutres pleines ou ajourées*, par A. Paris, ingénieur civil, professeur honoraire à l'E.P.U.L. — *Réglages automatiques de vitesses*, par Ch. Maillefer, ingénieur E.P.L. — Bibliographie. — Société suisse des ingénieurs et des architectes *Communiqué du Secrétariat* — Service de Placement. — Nouveautés, Informations diverses.

RISQUE DE VOILEMENT DES POUTRES PLEINES OU AJOURÉES

Calcul graphique

par A. PARIS, ingénieur civil, professeur honoraire à l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne

La tendance du prisme à fléchir pour échapper à une pression axiale se manifeste pareillement dans la simple colonne, dans les membrures retenues élastiquement par des poteaux flexibles insérés dans des entretoises, et dans la zone comprimée d'un poitrail, auquel sa hauteur confère une relative liberté de déformation locale. Les comportements diffèrent par contre sensiblement.

La colonne libre résiste au fléchissement par sa seule raideur $R = E.J$ d'Euler ; la membrure du pont Vierendeel ajoute à cette raideur la résistance élastique des cadres, qui unissent entre eux les poteaux et les fortes entretoises du tablier inférieur ; la zone comprimée du « disque » formé par la poutre-poitrail reste solidaire de la région tendue, tout en gauchissant le corps plan.

La sinusoïde exprime le flambage isolé ; elle reste l'argument essentiel des deux autres phénomènes tout en subissant un amortissement qu'on tentera d'assimiler à une exponentielle : dans l'exemple numérique ci-après, le jeu des approximations successives tendra à l'éliminer dans le cas supposé d'appuis parfaitement libres ; la réalité serait intermédiaire. Le professeur Timoshenko a montré la concordance entre les résultats de cette méthode d'approximations successives, que nous appliquons ici graphiquement, et ceux de l'analyse appliquée aux cas intégrables ; cette conformité permet ensuite d'étendre le procédé aux cas d'espèces, qui demandent une liberté plus grande.

I. Voilement des parois pleines

Le Dr L. Prandtl a, dans sa thèse de Munich (1899), étudié l'équilibre élastique d'une paroi homogène tenue en console sous l'effet d'une charge isolée. Le professeur Timoshenko a étendu l'étude au cas de la poutre simple soumise à un couple de moment constant ; il en a exprimé les moments de flexion latérale et de torsion comme dérivées secondes des élastiques de déplacement ; il arrive ainsi, dans sa *Stabilité élastique*, à l'expression du moment fléchissant critique

$$M_{cr} = \frac{\pi \sqrt{B.C}}{l}$$

si

$$B = \frac{c\,.\,b^3}{12} E \qquad \text{(raideur transversale)}$$

$$C = \frac{c\,.\,b^3}{3} \left(1 - 0{,}630 \frac{h}{b}\right) G \qquad \text{(raideur à la torsion).}$$

Ces formules supposent un matériau homogène, sans fissure ; elles sont donc optimistes dans le cas du prisme de béton armé, où les efforts tangentiels favorisent les glissements, et introduisent la phase II du béton tendu fissuré.

Dans la poutre en béton armé sollicitée par fléchissement latéral et torsion consécutive, le déversement se fait autour d'un axe, qui diffère de celui de gravité du profil intact ; si on admet que les génératrices verticales du plan médian

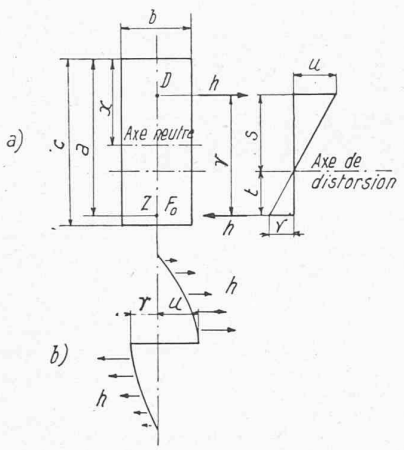


Fig. 1. — Torsion du profil.

restent droites, on les voit pivoter inégalement autour d'un axe de distorsion, que la grande déformabilité de la zone comprimée rapproche de l'armature tendue ; nous supposerons que cet axe reste droit.

La distorsion de la poutre appelle, tant dans la zone comprimée que dans l'armature, des réactions transversales qui, devant s'équilibrer entre elles dans une poutre libre, auront des signes inverses entre la région médiane et les deux extrémités de la portée ; ces réactions, égales et antagonistes entre les centres de pression et de traction du profil, se traduisent par des moments de torsion, dont la recherche forme le nœud du problème.

La figure 1 illustre ce cas, en coupe et en plan. La distance r des deux centres de pression et de traction dépend de la déformation élastique des éléments béton et fer, donc de leurs contraintes ; nous l'admettrons néanmoins constante et déterminée par les résistances ultimes de l'ouvrage.

Les influences des deux composantes sont inégales. La pression D agit par une tendance au flambage qui donne, sous une poussée h constante, un fléchissement latéral maximum (fig. 1/b), issu de la formule usuelle,

$$u = \frac{5}{384}\frac{Pl^3}{EJ} = \frac{5}{384}\frac{l^4 \cdot h}{E_b\ J_t} = \frac{0{,}62\ l^4}{ab^3\ E_b}\,h$$

si nous adoptons pour J_t l'expression (1) ci-après. L'armature par contre agit comme chaîne funiculaire tenue à ses extrémités par sa traction Z ; elle subit de ce fait un déplacement médian, calculé ici pour h constant

$$H = F_a\,\sigma_{app} \qquad H\varphi = h\,\frac{l^2}{8}$$

$$\varphi = \frac{l^2}{8F_a\ \sigma_{app}}\,h$$

que nous calculerons à la limite apparente, puisque le flambage est un phénomène de rupture. Le rapport des deux ordonnées u et φ fixe l'axe de distorsion à

$$s = r \times \frac{0{,}62\ l^2}{a\ b^3\ E_b} : \left(\frac{0{,}62\ l^2}{a\ b^3\ E_b} + \frac{1}{8\ F_a\ \sigma_{app}}\right).$$

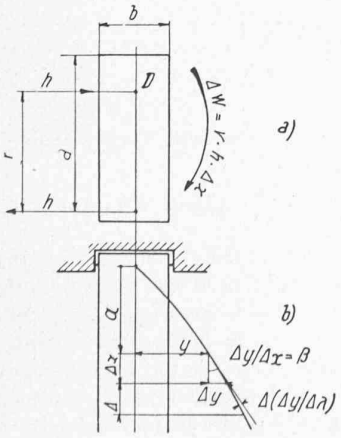


Fig. 2. — Différences finies.

Cette évaluation est approximative, puisque la poussée h varie ; mais elle le fait aussi bien pour u que pour φ ; l'erreur reste ainsi modeste. L'axe de distorsion se place aux environs du tiers inférieur du bras de levier r.

Le moment d'inertie transversal de la zone comprimée se traduit par l'intégrale d'un diagramme triangulaire, de la moitié du rectangle limité par l'axe neutre

$$x \sim 0{,}5\ a$$

imposé par les efforts extrêmes aux approches de la plasticité

$$\sigma_b/\sigma_a = \beta_b/\sigma_{app} \sim 1/10.$$

Il atteint ainsi

$$(1) \qquad J_t = \frac{a\ b^3}{48}\,.$$

L'effort transversal h crée dans chaque élément Δx de la poutre un état de torsion (fig. 2), qui trouve son équilibre entre ses deux sections terminales (fig. 3). Au milieu de la portée, où la poussée h atteint son maximum, le moment de torsion $W - \Delta W$ s'annule, pour croître ensuite aussi longtemps que la poussée ne change pas de signe, ce qui se produit probablement à faible distance des appuis.

L'équilibre de rotation

$$W = W - \Delta W - h_x . \Delta x . r$$

donne la relation

$$-\Delta W = h_x . x . r$$

dont résulte la poussée

$$(2) \qquad h = -\frac{1}{r}\frac{\Delta W}{\Delta x}\,.$$

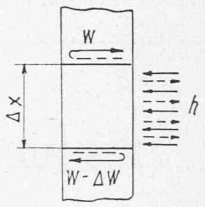


Fig. 3. — Equilibre de torsion.

La distorsion spécifique (fig. 2)

$$(3) \qquad \theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

s'exprime par la formule habituelle de l'angle dû au moment de torsion local W

$$(4) \qquad \frac{\theta}{1} = \frac{\varphi s}{\Delta x} = \frac{4\,(a^2 + b^2)}{a^3\ b^3} \times \frac{W}{G}\ s \qquad G \sim 0{,}4\,E.$$

La relation (3) transforme la (4), qui devient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\varphi . s}{\Delta x} = \frac{4\,(a^2 + b^2)}{a^3\ b^3} \times \frac{W}{G} \times s$$

ce à quoi la définition de Timoshenko

$$\frac{\varphi}{\Delta x} = \frac{W}{G} \times \frac{1}{\gamma a\ b^3}$$

donne la forme

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\gamma a\ b^3} \times \frac{W}{G} \cdot s.$$

Le facteur empirique γ varie de 1/6 à 1/3 pour a/b entre 1,0 et l'infini ; il prend, pour a/b de 2,5 à 3,0, la grandeur moyenne 0,25.

La condition 2, qui définit la poussée h, introduit la dérivée du moment de torsion ; elle conduit à

$$\frac{\Delta W}{\Delta x} = -\,r . h = \frac{\gamma a\ b^3}{s}\ G \times \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$$

et l'on écrit, en fonction de la seconde dérivée de l'élastique transversale

$$(5) \qquad h = -\,D\,\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} \qquad D = \frac{\gamma a\ b^3}{rs}\ G.$$

La poussée h apparaît lors du premier déversement de la zone comprimée ; elle suppose donc la préexistence de la force critique de flambage

$$P'_c = \frac{\pi^2}{l^2} E_b \times (J_b). \tag{6}$$

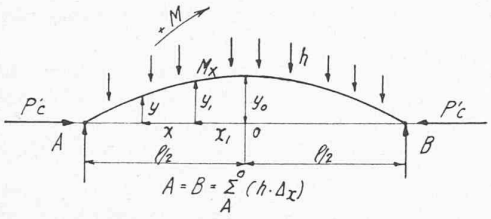


Fig. 4. — Actions préliminaires.

La raideur $E_b(J_b)$ est celle du prisme comprimé solidarisé avec la zone tendue ; le moment d'inertie (J_b) vaudrait le double de J_t si la solidarisation disparaissait ; ceci n'étant pas le cas, nous admettrons une augmentation modeste jusqu'à

$$(J_b) = 3\,J_t.$$

On obtiendrait une meilleure approximation en considérant le cas du flambage du barreau sur appui élastique continu, les génératrices verticales étant considérées comme fibres flexibles encastrées dans la zone tendue ; ce procédé, évidemment long, ne toucherait pas à la résistance par torsion du disque.

A partir de cet instant, la réaction h de torsion apporte un supplément grandissant à la résistance au flambage ; le maximum P''_c de ce supplément s'ajoute à P'_c et conduit à la force critique totale

$$P_c = P'_c + P''_c. \tag{7}$$

La résistance complémentaire atteint sa vraie grandeur à l'instant où la dernière ligne élastique se fait pratiquement identique à la précédente. Nous rechercherons ce résultat par une épure d'approximations successives, qui tendra rapidement à une position limite, si la courbe de départ a été opportunément choisie.

Nous le ferons d'abord en supposant la poutre sollicitée par un *couple extérieur constant.*

La force critique primitive P'_c produit une surface de moments, donc une flexion contre laquelle réagissent les poussées h. Nous supposons connue cette élastique initiale, qui aura l'allure d'une sinusoïde dont les points d'inflexion se placent aux extrémités de la poutre, libre d'encastrement.

Le moment fléchissant en un point $(x_1\, y_1)$ de l'élastique de départ

$$\left\{\begin{aligned} M_{x_1} &= +A\left(\frac{l}{2} - x_1\right) - \sum_{x=x_1}^{l/2} h\,.\,\Delta x\,(x - x_1) - P'_c\,.\,y_1 \\ A &= \sum_{x=0}^{l/2} h\,.\,\Delta x = -D \sum_{x=0}^{l/2} \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\,\Delta x \end{aligned}\right. \tag{8}$$

conduit, grâce à la condition 5, au moment déterminant de la force additionnelle au milieu de la poutre

$$\left\{\begin{aligned} M_o = P''_c\,.\,u = +D\left[+\frac{l}{2}\sum_{x=0}^{l/2} \Delta x\,\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} - \sum_{x=0}^{l/2} x\cdot\Delta x\,\frac{-\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right] - \\ - \frac{\pi^2}{l^2}\,E\,(J_p)\,.\,y_o. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

La force critique P'_c conserve son bras de levier y_o afin que reste cohérent le système de déformation des y et des $\Delta^2 y/\Delta x^2$ dans l'élastique appliquée à la formule 9 ; à mesure que s'affirme la courbure générale, les ordonnées et leurs dérivées secondes tendent à la proportionnalité entre les deux dernières élastiques, limite où se précisera la composante effective P''_c.

L'ordonnée u est celle de la ligne élastique issue de la courbe de départ, celle qui correspond à la courbe des moments de charge (fig. 6/g) ; nous la désignerons par v en seconde approximation.

La ligne élastique de départ intervient donc dans cette équation 9 par son ordonnée maximum y_o et par ses dérivées secondes, dont le diagramme fait aire de charge ; cette combinaison peut figurer pratiquement une certaine proportionnalité entre ligne de charge et élastique si l'on part d'une courbe initiale du genre

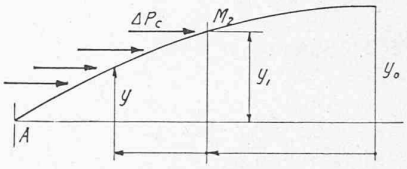


Fig. 5. — Elastique préalable.

$$y = y_o(1 - \sin\xi)\,.\,e^{+k\xi} \qquad \xi = +\frac{x}{l}\,\pi. \tag{10}$$

Nous avons choisi le facteur de l'exposant $k = 1$ car, les ordonnées y diminuant à partir du milieu de la poutre, la première dérivée est négative

$$+\cos\xi + k\,.\sin\xi \geqq k.$$

A l'expérience, l'épure de l'exemple numérique a fait tendre ce facteur k vers zéro.

L'élastique initiale donnera satisfaction si les moments fléchissants (éq. 9) conduisent par le dynamique des poids élastiques

$$w = M\,.\,\Delta x$$

à un funiculaire de seconde approximation assurant la proportionnalité des ordonnées ; ce ne sera suffisamment le cas dans l'épure, que pour le funiculaire (fig. 6/j) construit sur celui des u pris comme ligne de charge.

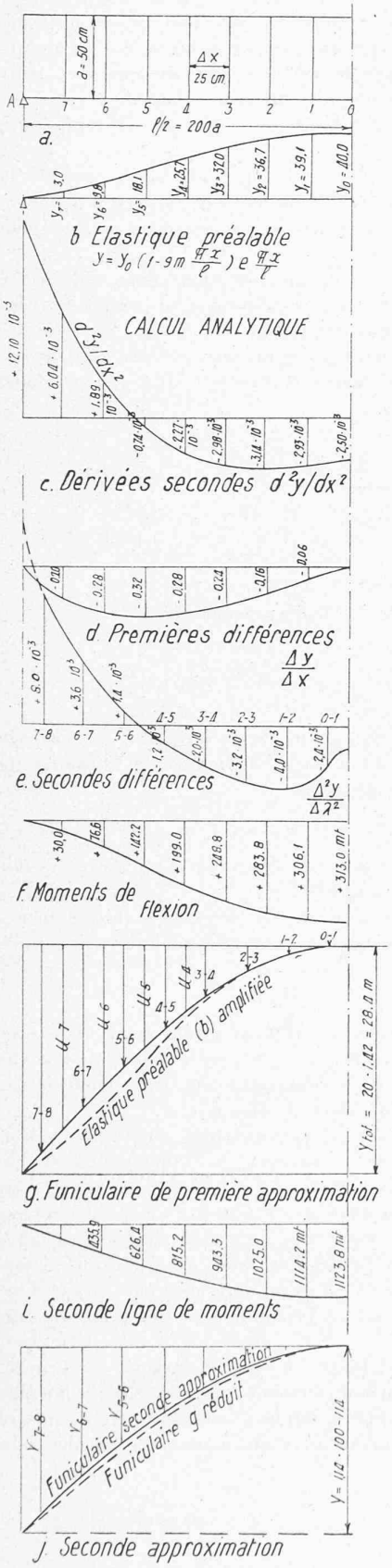
Les relations analytiques, qui précèdent, supposent l'action d'un moment fléchissant constant. Si la flexion résulte de l'action d'une *charge répartie* arbitraire sur la poutre, au moment maximum équivalent au milieu de la portée correspondra une élastique moins accentuée, des dérivées secondes par conséquent plus petites ; le moment fléchissant déterminant (fig. 6/f ou i) en sera diminué, mais encore plus l'ordonnée sous le sommet de l'élastique, ce qui profitera à la sécurité au flambage.

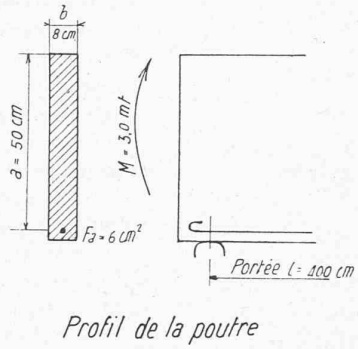
La charge critique, étagée le long de la zone comprimée, se développe proportionnellement au moment fléchissant extérieur ; ses actions localisées à des éléments Δx de poutre se proportionnent, par un nouveau facteur k à calculer, aux efforts statiques

$$P''_c = k\,.\,\frac{\Delta M_x}{r} = \frac{k}{r}\,Q\,.\,x \qquad Q = \text{effort tranchant}$$

et donnent au moment de flambage l'expression

$$M_n = \sum P''_c\,(y_1 - y) = \frac{k}{r}\sum Q_x\,.\,x\,(y_1 - y) \tag{11}$$





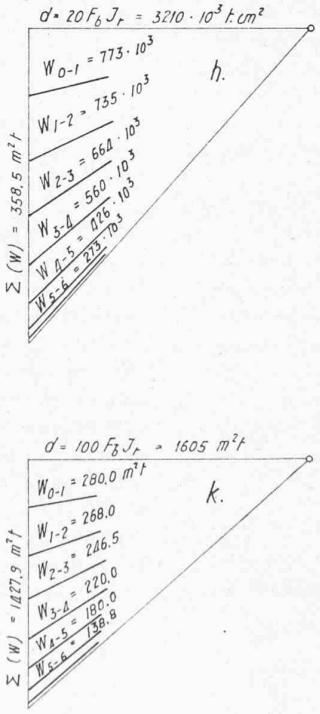


Fig. 6. — Epure de voilement d'une poutre pleine.

qui s'égale au membre de droite de l'équation 9, après adjonction en négatif du moment de la première composante critique.

L'élastique de départ tiendra compte de ce changement de régime pour abréger le travail d'approximation, qui restera soumis, par l'équation 11, aux conditions de charge en service.

L'exemple numérique ci-après, basé sur le cas simple intégrable du moment fléchissant constant, montre le degré de concordance entre le tracé graphique et le calcul théorique du profil proposé.

Exemple numérique. Considérons une poutre rectangulaire de largeur $b = 8$ cm et de hauteur utile $a = 50$ cm ; cette poutre supporte un couple fléchissant $M = 3{,}0$ mt constant sur sa portée $l = 400$ cm ; la traction dans l'armature, égale à la composante de pression au centre D, atteint pour

$$r = 0{,}833 . 50 \text{ cm} = 41{,}6 \text{ cm}$$

la grandeur

$$Z = 300 \text{ cm.t} : 41{,}6 \text{ cm} = 7{,}2 \text{ t}$$

à quoi correspond une section d'acier

$$F_a = 5{,}7 \text{ cm}^2$$

Les modules d'élasticité du béton sont admis à

$$E_b = 300\,000 \text{ kg/cm}^2 \qquad G \sim 120\,000 \text{ kg/cm}^2.$$

Le moment d'inertie transversal du triangle de Navier des contraintes de pression, calculé à limite d'élasticité, atteint

$$J_t = \frac{a . b^3}{48} = \frac{50 . 8^3}{48} = 535 \text{ cm}^4.$$

Les facteurs

$$\frac{0{,}62\ l^2}{a . b^3 . E_b} = \frac{0{,}62 \times 400^2 \text{ cm}^2}{50 \text{ cm} \times 8^3 \text{ cm}^3 \times 300\,000 \text{ kg/cm}^2} = 0{,}013 . 10^{-3} \text{ kg}^{-1}$$

$$\frac{1}{8\ F_a\ \sigma_{app}} = \frac{1}{8 \times 5{,}7 \text{ cm}^2 \times 3500 \text{ kg/cm}^2} = 0{,}006 . 10^{-3} \text{ kg}^{-1}$$

placent l'axe de distorsion à

$$s = 41{,}6 \text{ cm} \times 13 : (13 + 6) = 28{,}2 \text{ cm}$$

du centre de pression.

Les facteurs de raideur (éq. 5 et 6) sont

$$D \sim \frac{0{,}30 \times 50 . 8^3 \text{ cm}^4}{41{,}6 \text{ cm } 28{,}2 \text{ cm}} \times$$

$$\times\ 120000 \text{ kg/cm}^2 = 10^3 . 785 \text{ kg}$$

$$R = E . J_t = 300\,000 \text{ kg/cm}^2 . 534 \text{ cm}^4 =$$
$$= 10^3 . 160\,500 \text{ kg/cm}^2.$$

L'épure part d'une élastique exponentielle sinusoïdale, d'ordonnée maximum $y_o = 40$ cm et développée conformément à l'équation 10. Nous divisons la portée de la poutre, $l = 400$ cm, en seize segments égaux

$$\Delta x = 25 \text{ cm}.$$

Le travail, s'il comporte plus d'une approximation, se fait par détermination graphique des différences secondes $\Delta^2 y / \Delta x^2$; l'exactitude de ces courbes, bonne pour la différence première $\Delta y / \Delta x$, l'est bien moins en seconde dérivation ; les tracés (fig. 6/c et e) le montrent : l'erreur maximum entre le funiculaire g et la courbe initiale b, amplifiée pour obtenir une flèche égale, atteint 15 % environ ; c'est trop, et il a fallu une seconde approximation toute graphique. La première opération a été faite en partant de la courbe exponentielle définie par son équation ; on l'a ensuite corroborée, pour renseignement sur l'exactitude du tracé pratique, par une détermination graphique ; le résultat apparaît à la figure 6 : il n'est évidemment que partiellement satisfaisant. Les grandeurs trouvées apparaissent au tableau que voici.

(Tableau)

Nos	$\sin \xi$	e^{ξ}	$y = y_o (1 - \sin \xi)\, e^{\xi}$	d^2y/dx^2	x	$l - x$	$\Delta\,(\Delta y/\Delta x)$	$\Delta^2 y/\Delta x^2$
		Calcul analytique				Tracé graphique		
			cm		cm	cm		
0 - 1	0,098	1,105	39,9	$-\ 2{,}73.10^{-3}$	12,5	187,5	— 0,060	$-\ 2{,}4.10^{-3}$
1 - 2	0,290	1,343	38,3	$-\ 3{,}07.10^{-3}$	37,5	162,5	— 0,100	$-\ 4{,}0.10^{-3}$
2 - 3	0,471	1,634	34,5	$-\ 3{,}12.10^{-3}$	62,5	137,5	— 0,080	$-\ 3{,}2.10^{-3}$
3 - 4	0,634	1,983	29,1	$-\ 2{,}71.10^{-3}$	87,5	112,5	— 0,050	$-\ 2{,}0.10^{-3}$
4 - 5	0,773	2,419	22,0	$-\ 1{,}62.10^{-3}$	112,5	87,5	— 0,030	$-\ 1{,}2.10^{-3}$
5 - 6	0,882	2,940	13,9	$+\ 0{,}41.10^{-3}$	137,5	62,5	+ 0,035	$+\ 1{,}4.10^{-3}$
6 - 7	0,957	3,579	6,2	$+\ 3{,}71.10^{-3}$	162,5	37,5	+ 0,085	$+\ 3{,}4.10^{-3}$
7 - 8	0,995	4,539	0,9	$+\ 8{,}55.10^{-3}$	187,5	12,5	+ 0,200	$+\ 8{,}0.10^{-3}$
				$+\ 12{,}67.10^{-3}$				$+\ 12{,}8.10^{-3}$
				$-\ 13{,}25.10^{-3}$				$-\ 12{,}8.10^{-3}$
			Sommes :	$-\ 0{,}58.10^{-3}$				0

Les poussées h proportionnelles à la dérivée seconde, prise ici analytique, suscitent selon éq. 8 la réaction

$$A = -D\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}.x = -\ 10^{-3}.785 \text{ kg } (-\ 0{,}58.10^{-3}).25 = +\ 785.14{,}6 \text{ kg}$$

qui trouve sa réponse au bas de la poutre, à l'appui. La formule 8, du moment fléchissant, introduit la force critique initiale ($J_p = 3.J_t = 1600$ cm^4)

$$P_c' = 300\,000 \text{ kg/cm}^2 \times 1600 \text{ cm}^4 \times \pi^2 : 400^2 \text{ cm}^2 = 30\,000 \text{ kg.}$$

Ces données conduisent aux résultats basés sur les dérivées d^2y/dx^2

$$M_o = +\ 785 \text{ kg } [+\ 200 \text{ cm } 14{,}6 - 25.6 \text{ cm} + 2{,}73.12{,}5 + 3{,}07.37{,}5 + 3{,}12.62{,}5 + 2{,}71.87{,}5 + 1{,}62.112{,}5 - 0{,}41.137{,}5 - 3{,}71.162{,}5 - 8{,}55.187{,}5] - 30\,000 \text{ kg.} \times 40{,}0 \text{ cm} = 10^3\,(+\ 31\,700 - 1200) = +\ 30\,500.10^3 \text{ cm.kg,}$$

puis pareillement

$$M_1 = +\ 29\,830.10^3 \text{ cm.kg} \quad M_2 = +\ 27\,650 \text{ cm.kg, etc.}$$

selon figure 6/f. Cette ligne de moments constitue l'aire de charge pour l'élastique de première approximation ; les poids élastiques $w = M.\Delta x$ apparaissent au dynamique 6/h, dont la projection conduit au funiculaire de la première élastique ; la distance polaire est arbitraire puisque toutes positions de flambages sont désormais possibles : on l'a choisie, par commodité, au vingtuple de la raideur R, donc à

$$d = 20 \times 160{,}5.10^3 \text{ t.cm}^2.$$

Le funiculaire a, au milieu de la portée (fig. 6/g), et pareillement amplifiée, une ordonnée maximum

$$u = 20 \times 1{,}42 \text{ m} = 28{,}4 \text{ m}$$

ce qui donne comme quotient du moment maximum

$$P_c'' = 313{,}0 : 28{,}4 = 11{,}1 \text{ t.}$$

La concordance entre la courbe de départ 6/b, amplifiée, et le funiculaire 6/f ne donne pas satisfaction, car la courbe de moments se gonfle au milieu de la portée, ce qui augmente le moment maximum (313 mt) aux dépens de la flèche médiane du funiculaire (1,42 m).

Une seconde approximation prend le départ au funiculaire 6/g. Les moments, basés sur la formule 8, atteignent

$$M_0 = 1123\ 8 \text{ mt} \quad M_1 = 1114{,}2 \text{ mt} \quad M_2 = 1025{,}0 \text{ mt, etc.,}$$

chiffres ainsi grossis par l'ampleur relative de la courbe de départ.

Les poids élastiques $w = M.\Delta x$, qui sont $w_1 = 280{,}0$ m^2.t $w_2 = 268{,}0$ m^2.t, etc., font un total $\Sigma w = 1427{,}9$ m^2.t ; projetés par la distance polaire, portée au centuple,

$$d = 100 \times (E_b.J_t) = 1605 \text{ m}^2\text{.t,}$$

ils donnent le funiculaire de troisième élastique, avec une ordonnée maximum

$$v = 100.1{,}14 \text{ m} = 114 \text{ m.}$$

La composante complémentaire

$$P_c'' = 1123{,}8 \text{ m.t} : 114 \text{ m} = 9{,}85 \text{ t}$$

porte la charge critique à

$$P_c = 30{,}0 + 9{,}85 = 39{,}85 \text{ t}$$

accusant une sécurité au voilement

$$P_c : Z = 39{,}85 : 7{,}2 = 5{,}55.$$

Ce chiffre conduit au moment critique

$$M_c = 5{,}55 \times 3{,}0 \text{ mt} = 16{,}7 \text{ mt.}$$

La formule de Timoshenko, qui s'applique à ce cas simple, donne

$$B_1 = \frac{55.8^3 \text{ cm}^4}{12} \times 300\,000 \text{ kg/cm}^2 = 875.10^6 \text{ kg.cm}^2$$

$$C = \frac{55.8^3 \text{ cm}^4}{3}\left(1 - 0{,}630\,\frac{8}{55}\right) \times 120\,000 \text{ kg/cm}^2 = 102{,}0.10^6 \text{ kg.cm}^2$$

$$M_{cr} = \frac{\pi\sqrt{875.102 \times 10^6}}{400 \text{ cm}} = 2350.10^3 \text{ kg.cm} = 23{,}5 \text{ mt}$$

indiquant une sécurité de 7,85 au lieu des 5,55 trouvés ci-dessus ; ce résultat paraît optimiste dans le cas du béton armé hétérogène.

Le cas non intégrable du moment arbitraire se résoudrait par voie graphique avec un égal degré de probabilité.

* * *

II. Flambage d'une membrure comprimée

La poutre ajourée porteuse du tablier d'un pont bas se comporte, en gros, comme une paroi soumise au voilement ; la torsion de l'ensemble se mue en flexions locales, à quoi s'ajoute une torsion propre des membrures, dont on négligera l'influence favorable.

La charge de service du pont crée une pression axiale dans la membrure supérieure libre ; cette force croît en proportion de la charge du pont ; elle deviendrait à la limite la force critique de la colonne (éq. 6), première composante de la résistance effective au flambage. Cette première étape atteinte, la courbure latérale s'annonce et provoque des réactions transversales aux nœuds supérieurs des montants ; le second stade commence, dont résultera la mesure de la composante complémentaire P_c'' ; la charge critique effective atteindra alors

$$P_c = P_c' + P_c''. \tag{12}$$

Les déplacements y des têtes de poteaux répondent à deux nécessités. C'est d'abord un effet de flexion latérale par flambage de la membrure, représentée à l'épure 8 par l'élastique de départ (c), qui donne des bras de levier à la force P_c'. C'est ensuite l'élasticité des cadres ouverts (fig. 7) exprimée,

en fonction des masses adjointes $m = s/E.J$ des poteaux et entretoises, par l'équation

$$y = H\left(m_p \cdot \frac{h^2}{3} + m_t \cdot h^2\right)$$

que, h désignant la hauteur,

$$m_p = \frac{\varphi}{E_b . J_p} \qquad m_t = \frac{b}{2\,E_b . J_t}$$

transforment en

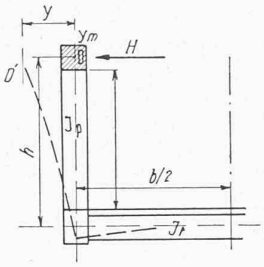


Fig. 7. — Cadre transversal.

$$(13)\quad \begin{cases} y = \dfrac{H\,.\,h^2}{E_b}\left(\dfrac{\varphi}{3\,J_p} + \dfrac{b}{2\,J_t}\right) = \alpha . H \\ \alpha = \dfrac{h^2}{E_b}\left(\dfrac{m_p}{3} + m_t\right) \end{cases}$$

Les réactions H doivent s'équilibrer d'un bout à l'autre de la membrure pour assurer l'équilibre à la rotation ; la condition

$$(14)\qquad \sum_{x=0}^{A} (H) = 0$$

conduit alors à un déplacement parallèle $\triangle y$, qui fait chevaucher la membrure sur son axe primitif, suivant les ordonnées $y - \triangle y$.

La condition d'équilibre

$$(15)\qquad \sum (H) = \sum \frac{y}{\alpha} - \sum \frac{\triangle y}{\alpha}$$

permet le calcul de la correction $\triangle y$, puis celui des forces individuelles par

$$(16)\qquad H = \frac{y - \triangle y}{\alpha}\,.$$

L'élastique définitive, réalisée entre les pressions P et les réactions H, résulte tant de la force critique P'_c agissant de bout en bout, par commodité mais qu'on pourrait répartir aussi s'il en valait la peine, que des forces additionnelles $\triangle P''_c$ introduites par les nœuds successifs. Ces efforts croissent avec la pression axiale statique D, aussi bien des extrémités vers le milieu du pont, que en proportion de l'accroissement des charges au-delà des chiffres de service ; on peut donc écrire en introduisant un facteur de proportionnalité k

$$(17)\begin{cases} P''_c = \triangle P''_1 + \triangle P''_2 + \ldots \triangle P''_A \\ \triangle P''_1 = k . \triangle D_1 \ldots\ldots\ldots \triangle P''_A = k . \triangle D_A . \end{cases}$$

La composante primitive reste

$$(18)\qquad P'_c = \frac{\pi^2}{l^2} E_b . J_t\,.$$

L'équilibre des moments implique la coopération de la force axiale primitive P'_c et des suppléments $\triangle P''_c$ aux nœuds, ainsi que des réactions H ; la force P'_c intervient par ses ordonnées y sur la corde de l'élastique préalable, en fonction de laquelle on calcule les réactions H ; l'aire de moments, qui en résulte, produit un supplément de courbure avec une accentuation des réactions H appelant les suppléments de charge critique, fonctions de la charge utile,

$$\triangle P''_c = k . \triangle D .$$

Cet équilibre se traduit par la condition

$$M_x = \sum_{x=x_1}^{A} H . (x - x_1) - P'_c . y = \sum_{x=x_1}^{A} \triangle P''_c . u$$

qui doit se réaliser en tous points de l'élastique nouvelle u, dès qu'il y aura concordance des deux dernières approximations ; nous trouvons ainsi au sommet de la courbe

$$(19)\qquad M_o = \sum_{x=0}^{A} (H . x) - P'_c . y_o = \sum_{x=0}^{A} \triangle P''_c . u\,.$$

Le moment M_o étant calculé, les conditions (17) permettent d'écrire

$$(20)\qquad M_o = k \sum_{x=0}^{A} \triangle D . u$$

équation déterminante du facteur k à introduire dans les formules (17).

L'ordonnée maximum u_o apparaît au funiculaire (fig. 8/f) tracé sur les poids élastiques (fig. 8/d)

$$(21)\qquad w = M . \triangle x = \frac{\triangle x}{8}(a + 6b + c).$$

La charge critique atteint ainsi

$$(22)\qquad P_c = P'_c + k . \sum_{x=0}^{A} (\triangle D) = P'_c + k . D_o$$

puisque la pression axiale D_o en service est la somme des apports $\triangle D$ aux nœuds dès l'appui jusqu'au milieu de la portée.

* * *

Exemple numérique. Nous avons adapté, dans la figure 8, les dimensions d'un pont-route existant à Hotzenplotz, en Moravie (Manuel d'Emperger, VI, 1911), aux besoins de notre développement. L'ouvrage a une portée théorique de 23,1 m et une largeur utile de 5,0 m. Sous sa charge maximum par chariots et foule, une paroi supporte les moments extérieurs

$M_0 = 290$ mt $M_1 = 287$ mt $M_2 = 265$ mt $M_3 = 225$ mt
$M_4 = 168$ mt $M_5 = 90$ mt $M_6 = 0$.

La pression D dans la membrure libre croît progressivement par les apports successifs

$$\triangle D_1 = \frac{M_0 - M_1}{r} = \frac{290 - 287}{2{,}475} = 1{,}20 \text{ t}$$

puis aux autres montants

$\triangle D_2 = 8{,}85$ t $\triangle D_3 = 16{,}20$ t $\triangle D_4 = 23{,}00$ t
$\triangle D_5 = 31{,}45$ t $\triangle D_6 = 36{,}30$ t

pour atteindre au milieu de la portée

$$D = \Sigma \triangle D = 290 \text{ mt} : 2{,}475 \text{ m} = 117{,}0 \text{ t}$$

Les montants, qui transmettent ces apports $\triangle D$ par leurs efforts tranchants en long du pont, ont en travers les moments d'inertie et les masses adjointes

1 et 2) section 30.40 cm² $J_p = 30 . \dfrac{40^3}{12} = 160.10^3$ cm⁴

$$E_b . m_p = \frac{\varphi}{J_p} = \frac{180 \text{ cm}}{160 \text{ cm}^4}\, 10^{-3} = 1{,}120.10^{-3} \text{ cm}^{-3}$$

3) 40.40 cm² $J_p = 214.10^3$ cm⁴ $E.m_p = 0{,}840.10^{-3}$
4) 50.40 cm² $J_p = 267.10^3$ cm⁴ $E.m_p = 0{,}675.10^{-3}$
5) 60.40 cm² $J_p = 320.10^3$ cm⁴ $E.m_p = 0{,}564.10^{-3}$
6) 80.40 cm² $J_p = 428.10^3$ cm⁴ $E.m_p = 0{,}422.10^{-3}$

Les entretoises ont une inertie propre et une masse adjointe

$$J_t = 1140.10^3 \text{ cm}^4 \qquad E.m_t = \frac{250 \text{ cm}}{2.1140} . 10^{-3} = 0{,}110.10^{-3} \text{ cm}^{-3}$$

On compte le module d'élasticité à

$$E_b = 300 \times 10^3 \text{ kg/cm}^2.$$

La formule 13 donne les facteurs α aux nœuds

1 et 2) $\alpha = \dfrac{247{,}5^2 \text{ cm}^2}{300.10^3 \text{ kg/cm}^2}\left(\dfrac{1{,}120}{3} + 0{,}110\right) . 10^{-3} \text{ cm}^{-3} =$

$$= 0{,}980.10^{-4}\,\frac{\text{cm}}{\text{kg}}$$

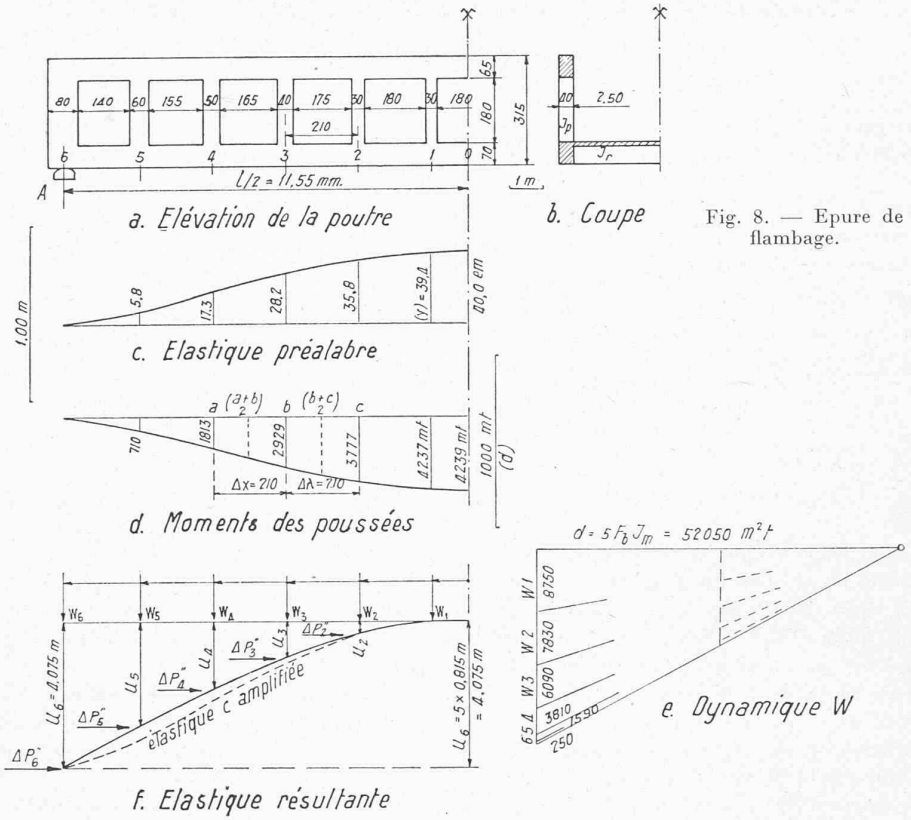


Fig. 8. — Epure de flambage.

3) $\alpha = 0{,}798.10^{-4}$ 4) $\alpha = 0{,}690.10^{-4}$ 5) $\alpha = 0{,}608.10^{-4}$
6) $\alpha = 0{,}512.10^{-4}$.

Les poussées H (éq. 16)

$$H_1 = 10^4\ (39{,}4 - \triangle y) : 0{,}980 = 10^4\ (+\ 40{,}2 - 1{,}02\ \triangle y)$$
$$H_2 = 10^4\ (36{,}6 - 1{,}02\ \triangle y) \qquad H_3 = 10^4\ (35{,}3 - 1{,}25\ \triangle y)$$
$$H_4 = 10^4\ (25{,}0 - 1{,}45\ \triangle y) \qquad H_5 = 10^4\ (\ 9{,}5 - 1{,}65\ \triangle y)$$
$$H_6 = 10^4\ (0 - 1{,}95\ \triangle y)$$

dont la somme s'annule, donnent l'équation

$$10^4\ (+\ 146{,}6\ \text{cm} - 8{,}34\ \triangle y) = 0$$

et par conséquent la correction

$$\triangle y = 17{,}6\ \text{cm}$$

Les réactions, qui correspondent à l'élastique préalable, atteignent ainsi les grandeurs

$$H_1 = (+\ 40{,}2 - 1{,}02.17{,}6)\ 10^4 = +\ 22{,}2.10^4\ \text{kg}$$
$$H_2 = +\ 18{,}6.10^4\ \text{kg} \qquad H_3 = +\ 13{,}3.10^4\ \text{kg}$$
$$H_4 = -\ 0{,}5.10^4\ \text{kg} \qquad H_5 = -\ 19{,}4.10^2\ \text{kg}$$
$$H_6 = -\ 34{,}3.10^4\ \text{kg}$$

faisant ensemble

$$\Sigma\,(H) = (+\ 54{,}1 - 54{,}2)\ 10^4 \sim 0$$

Le moment d'inertie horizontal de la membrure

$$J_m = 65\ \frac{40^3}{12} = 347.10^3\ \text{cm}^4$$

porte sa résistance critique propre à

$$P'_c = \pi^2\ \frac{300\ 000\ \text{kg/cm}^2 \times 347.10^3\ \text{cm}^4}{2310^2\ \text{cm}^2} = 195.10^3\ \text{kg} = 195\ \text{t}.$$

Les moments horizontaux des membrures atteignent, sous les efforts P'_c et H, les chiffres

$$\text{milieu } M_0 = (-\ 22{,}2\ \text{kg}.105\ \text{cm} - 18{,}6.315 - 13{,}3.525 + 0{,}5.735 + 19{,}4.945 + 34{,}3.1155)\ 10^4 - 195\ 000\ \text{kg}.40\ \text{cm} = +\ 42\ 390.10^4\ \text{cm.kg} = +\ 4239\ \text{mt}$$

$$M_1 = +\ 4237\ \text{mt} \qquad M_2 = +\ 3777\ \text{mt} \qquad M_3 = +\ 2929\ \text{mt}$$
$$M_4 = +\ 1813\ \text{mt} \qquad M_5 = +\ 710\ \text{mt} \qquad M_6 = 0$$

Les poids élastiques pour le second funiculaire (fig. 8/f), correspondant aux aires partielles de la formule 21, sont (dynamique 8/e)

$$w_1 = \frac{2{,}10\ \text{m}}{8}\ (+\ 3777 + 6.4237 + 4237)\ \text{mt} = 8750\ \text{m}^2.\text{t}$$

$$w_2 = 7830\ \text{m}^2.\text{t} \qquad w_3 = 6090\ \text{m}^2.\text{t} \qquad w_4 = 3810\ \text{m}^2.\text{t}$$
$$w_5 = 1590\ \text{m}^2.\text{t} \qquad w_6 = \frac{1}{3}\ 2{,}10\ \text{m}.\ \frac{710\ \text{m}.\text{t}}{2} = 250\ \text{m}^2.\text{t}$$

La distance polaire amplifiée

$$d = 5\ E_b\ J_m = 5 \times 300\ 000\ \text{kg/cm}^2 \times 347.10^3\ \text{cm}^4 = 52\ 050.10^7\ \text{cm}^2.\text{t} = 52\ 050\ \text{m}^2.\text{t}$$

fait apparaître un fléchissement médian sur la corde par les extrémités

$$u_6 = 5 \times 0{,}815\ \text{m} = 4{,}075\ \text{m}.$$

Les parts d'effort $\triangle D$ transmises par les montants successifs, agissant chacune par son bras de levier u propre sur l'élastique, donnent le moment

$$\Sigma\,(\triangle D.u) = +\ 1{,}20\ \text{t}.0 + 8{,}85\ \text{t}.0{,}340 + 16{,}20\ \text{t}.0{,}950 + 23{,}00.1{,}920 + 31{,}45.2{,}900 + 36{,}30.4{,}075 = 301{,}60\ \text{mt}$$

L'équation 20 donne par conséquent le facteur

$$k = 4239\ \text{m.t} : 301{,}6\ \text{m.t} = 14{,}1$$

qui porte la charge critique à

$$P_c = 195\ \text{t} + 14{,}1.117{,}0\ \text{t} = 1840\ \text{tonnes}$$

et la sécurité au flambage latéral à

$$1840\ \text{t} : 117\ \text{t} \sim 16.$$

Ce chiffre, suffisamment fort, nous dispense d'une seconde approximation, que l'insuffisante concordance des élastiques (fig. 8/f) eût rendue nécessaire dans d'autres circonstances, par son erreur maximum de 15 %.