À propos de l'étude des fonctions aléatoires

Autor(en): **Blanc, Ch.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin technique de la Suisse romande**

Band (Jahr): **81 (1955)**

Heft 18: **Comptoir Suisse, Lausanne, 10-25 septembre 1955**

PDF erstellt am: **11.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-61347

81e année 10 septembre 1955 N° 18

BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les quinze jours

Abonnements:
Suisse: 1 an, 24 francs
Etranger: 28 francs
Pour sociétaires:
Suisse: 1 an, 20 francs
Etranger: 25 francs
Prix du numéro: Fr. 1.40
Ch. post. « Bulletin technique de la Suisse romande » N° II. 57 75, à Lausanne.
Expédition
Imprimerie « La Concorde » Terreaux 31 — Lausanne.
Rédaction
et éditions de la S. A. du Bulletin technique (tirés à part), Case Chauderon 475
Administration générale
Ch. de Roseneck 6 Lausanne

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des Anciens élèves de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.

A PROPOS DE L'ÉTUDE DES FONCTIONS ALÉATOIRES

par Ch. BLANC, professeur à l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne

La notion de fonction aléatoire n'a été précisée qu'à une époque assez récente; on l'a immédiatement reconnue comme particulièrement apte à donner une description féconde de faits physiques dont l'étude au point de vue de l'analyse certaine se heurtait à des difficultés profondes. On peut même dire que la mode est maintenant aux fonctions aléatoires ; cela ne va pas sans quelques accrocs, dus principalement à ce que l'on croit trop souvent pouvoir se contenter d'une vague idée intuitive de la notion de fonction aléatoire, plus ou moins concrétisée par une courbe d'apparence assez irrégulière, où l'on ne discerne aucune loi simple.

Il semble utile d'attirer l'attention des praticiens sur quelques points, sur quelques confusions à éviter, et sur le sens des opérations que l'on effectue à propos de fonctions aléatoires [1].

[1] Le calcul des probabilités, dont la théorie des fonctions aléatoires forme un chapitre avancé, a passablement évolué dans ces dernières années ; on aura tout avantage, pour l'aborder, à recourir à un livre moderne ; citons (comme ouvrages relativement élémentaires) :
R. Fortet : *Eléments de calcul des probabilités.* C.N.R.S., Paris, 1950.
H. Cramer : *The elements of probability theory and some of its applications.* Wiley, New York, 1955.
Pour les fonctions aléatoires, on trouvera des exposés très complets dans :
A. Blanc-Lapierre et R. Fortet : *Théorie des fonctions aléatoires.* Masson, Paris, 1953.
J. L. Doob : *Stochastics processes.* Wiley, New York, 1953.

Commençons par un exemple très simple, destiné à illustrer la notion essentielle de *variable aléatoire.* Considérons un *dé*, dont les six faces portent les numéros de 1 à 6 ; en lançant ce dé, on obtient un de ces numéros ; on postule que le résultat d'une telle opération (que l'on appellera une *épreuve*) est dû au hasard et que les divers numéros peuvent apparaître avec des probabilités déterminées, nombres positifs dont la somme est égale à l'unité. Ces probabilités sont liées à la fréquence d'apparition des numéros correspondants dans une longue suite d'épreuves. Le calcul des probabilités, dans sa partie élémentaire, étudie en particulier les probabilités attachées à des ensembles d'épreuves (lancer deux dés, lancer plusieurs fois un dé, par exemple), connaissant les probabilités relatives à chaque épreuve ; il s'appuie pour cela sur les axiomes des probabilités totales et des probabilités composées.

Si l'on veut une information, toujours dans le cas de notre dé, sur les probabilités correspondant à chaque face, deux voies se présentent ; la première, que l'on appellera la méthode *analytique*, consiste à partir d'une théorie physique (ici la dynamique des solides), étudier le phénomène avec assez de finesse pour pouvoir conclure ; la seconde, la méthode *statistique*, consiste à faire un certain nombre d'essais, puis à estimer, en fonction des résultats de ces épreuves, les probabilités en question ; cette *estimation* (le terme est consacré par l'usage) résulte d'épreuves faites au hasard, c'est donc aussi une grandeur aléatoire ; on ne peut prétendre, si grand que soit le nombre de coups, arriver à une détermination rigoureuse des probabilités ; on demandera cependant que cette estimation soit acceptable : par exemple, que sa moyenne (au sens probabiliste) soit égale à la grandeur estimée, que la dispersion (l'erreur d'estimation) diminue et tende vers zéro lorsque le nombre des essais croît et tend vers l'infini.

* * *

Une série de coups de dé donne une première idée d'un processus aléatoire, à vrai dire peu intéressant, puisque les coups sont indépendants. Imaginons par contre une série d'épreuves dans laquelle les probabilités pour chaque coup dépendent des résultats obtenus lors des coups précédents ; c'est en somme un processus où le hasard intervient à chaque coup, mais selon une loi variable. Ici encore, si l'on veut s'informer sur le processus aléatoire considéré, on peut soit se placer au point de vue analytique, soit au point de vue statistique ; plus souvent, une théorie d'origine physique nous fournira un modèle, que les épreuves statistiques préciseront ou testeront.

On ne risque guère de commettre des confusions en se représentant une *fonction aléatoire* comme un processus où l'on aurait non plus une suite discrète d'épreuves, mais une suite continue, ou si l'on préfère, une variable aléatoire dépendant d'un paramètre t variant d'une façon continue (ce sera pratiquement le temps).

La description complète de la fonction aléatoire $X(t)$ consisterait dans la donnée, pour tout ensemble fini $t_1, \ldots, t_n$ de valeurs de t, de la loi de probabilité des variables aléatoires $X(t_1), \ldots, X(t_n)$. En fait, dans de nombreux problèmes, on peut se contenter d'une information bien moindre.

* * *

Moyenne et covariance d'une fonction aléatoire. On sait que si une épreuve X peut nous donner les valeurs $x_1, \ldots, x_n$ avec les probabilités $p_1, \ldots, p_n$ (de somme égale à l'unité), la *moyenne* ou *espérance mathématique* EX de X est la grandeur (certaine) $\Sigma p_i x_i$; la généralisation par une intégrale dans le cas d'une épreuve donnant des valeurs appartenant à un continu, est immédiate. Prenons maintenant une fonction aléatoire $X(t)$; pour chaque valeur de t, c'est une variable aléatoire, dont nous pouvons considérer la moyenne $EX(t)$, fonction certaine de t. Cette grandeur constitue une *mesure de localisation* de $X(t)$.

Pour mesurer la dispersion d'une variable aléatoire X autour de sa moyenne EX, la grandeur la plus adéquate dans de nombreux cas est la *variance*, définie comme étant la moyenne de $(X - EX)^2$; sa racine carrée est l'*écart-type*.

Si l'on a deux variables aléatoires X_1 et X_2, leur dépendance mutuelle résulte de la nature de leur loi de probabilité. Elle ne peut en général être décrite complètement par un seul nombre. Toutefois la quantité

$$E(X_1 - EX_1)\,(X_2 - EX_2)$$

appelée *covariance* de X_1 et X_2 constitue une mesure commode et parfois suffisante de cette dépendance ; en tout cas, si deux variables sont indépendantes (au sens des probabilités), leur covariance est nulle (la réciproque n'est pas vraie en général). En divisant cette covariance par le produit des écarts-types de X_1 et X_2, on obtient le *coefficient de corrélation* de X_1 et X_2.

Revenons maintenant à la fonction aléatoire $X(t)$; donnons à t deux valeurs t_1 et t_2 ; nous obtenons ainsi deux variables aléatoires $X(t_1)$ et $X(t_2)$, dont nous pouvons considérer la covariance ; ce sera évidemment une fonction de t_1 et t_2 ; désignons-la par $g(t_1, t_2)$.

* * *

Donner une fonction aléatoire, c'est donner toutes les lois de probabilité correspondantes, donc se donner en particulier la moyenne $EX(t)$ et la covariance $g(t_1, t_2)$; cela fait, on peut poser un grand nombre de problèmes, qui ne se distinguent pas essentiellement de ceux du calcul différentiel et intégral des fonctions certaines. On peut par exemple calculer la dérivée, une primitive, faire des développements en série, intégrer des équations différentielles, etc. Mais pour le praticien, la fonction aléatoire n'est en général pas donnée explicitement par des lois de probabilités. Il ne peut la connaître que par le moyen d'une théorie analytique, reposant sur un modèle plausible, ou par le moyen statistique de l'observation d'échantillons ; mieux, une combinaison des deux chemins d'approche lui permet en général de préciser et tester par des échantillons les hypothèses formulées à partir d'une théorie analytique.

Diverses considérations conduisent souvent à admettre que la fonction considérée est *stationnaire*, c'est-à-dire que les lois de probabilité ne changent pas si on change l'origine du temps. Il en résulte alors, en particulier, que la moyenne est une constante et que la covariance $g(t_1, t_2)$ ne dépend que de la différence $t_2 - t_1$:

$$g(t_1,\ t_2) = R(t_2 - t_1)$$ [1]

Il est possible, en faisant quelques hypothèses sur la nature du processus donnant naissance à la fonction aléatoire, de préciser quelle sera la forme de la covariance ; il restera toutefois des paramètres indéterminés ; de plus, les hypothèses doivent être testées. Il ne reste alors que la méthode statistique, c'est-à-dire l'emploi d'échantillons. On tirera de l'observation d'échantillons des informations sur la fonction aléatoire, de même que l'observation de séries de coups de dé

[1] On dit que la fonction est stationnaire d'*ordre deux* si la moyenne est constante et si $g(t_1, t_2)$ ne dépend que de $(t_2 - t_1)$; cette propriété est dans un sens moins restrictive que la stationnarité proprement dite. Remarquons encore que cette covariance $R(t_1 - t_2)$ est une espérance mathématique, ou, si l'on veut, une moyenne calculée sur des cas possibles. Certains auteurs la désignent (dans le cas stationnaire) sous le nom de *fonction de corrélation*. Par ailleurs, il est utile, et assez naturel, de considérer également la *moyenne temporelle* (pour une fonction de moyenne nulle)

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X(t + \tau)\, X(t)\, dt$$

appelée souvent *fonction d'autocorrélation* de $X(t)$; cette dernière expression est d'un maniement moins commode que celle que nous avons introduite sous le nom de covariance ; elles sont du reste liées (dans le cadre des théories *ergodiques*).

permet d'obtenir des informations sur les probabilités de chaque face. On se gardera bien cependant de confondre la fonction aléatoire elle-même avec les échantillons, si longs soient-ils, qui permettent de faire l'estimation.

* * *

La covariance $R(\tau)$ d'une fonction aléatoire stationnaire est une fonction paire ; elle atteint son maximum (nécessairement positif) pour $\tau = 0$; elle peut changer de signe ; mais sa transformée par l'intégrale de Fourier

$$(1) \qquad s(\nu) = 4 \int_0^\infty R(\tau) \cos 2\pi\nu\tau \, d\tau$$

est toujours positive ; c'est le *spectre* de la fonction aléatoire ; on a, par la théorie de l'intégrale de Fourier

$$(2) \qquad R(\tau) = \int_0^\infty s(\nu) \cos 2\pi\nu\tau \, d\nu$$

Dans de nombreux cas, le praticien désire avoir une estimation de la moyenne, de la covariance et du spectre. Tout naturellement, sa première idée consiste à prendre un échantillon, de longueur finie $(0, T)$, puis à adopter pour estimation de $EX(t)$ la moyenne temporelle

$$(3) \qquad m = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) \, dt$$

pour celle de $R(\tau)$ la moyenne temporelle

$$(4) \qquad r(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T [X(t+\tau) - m] \, [X(t) - m] \, dt$$

et enfin pour celle du spectre $s(\nu)$ la transformée tronquée

$$(5) \qquad A(\nu) = 4 \int_0^a r(\tau) \cos 2\pi\nu\tau \, d\tau$$

(la limite supérieure a étant nécessairement finie, puisque $r(\tau)$ ne peut être connue que dans des limites finies). En se basant sur les théorèmes ergodiques, on pense alors que, si l'échantillon est assez long (T et a assez grands), on peut être assuré d'avoir une estimation admissible. Il serait cependant nécessaire d'examiner ce point avec plus d'attention [1]. Puisque les estimations m, $r(\tau)$, $A(\nu)$ sont le résultat de calculs portant sur un échantillon choisi au hasard, ce sont des grandeurs aléatoires, dont on peut, moyennant des hypothèses assez simples sur la fonction aléatoire $X(t)$, calculer les moments d'ordres *un* et *deux*.

On montre ainsi (nous laissons de côté les calculs) que la moyenne $E\,r(\tau)$ de $r(\tau)$ est donnée par

$$E\,r(\tau) = R(\tau) - \frac{1}{4\pi^2 T^2} \int_{-\infty}^{+\infty} s(\alpha) \, \frac{1 - \cos 2\pi\alpha T}{\alpha^2} \, d\alpha \,;$$

[1] Peu de travaux ont été publiés sur cette question, ce qui laisserait croire qu'elle a été négligée, alors pourtant que l'on construisait à grands frais des appareils analogiques mettant en œuvre les formules (3), (4) et (5). Citons cependant les travaux pleins d'intérêt de MM. U. Grenander et M. Rosenblatt, dans les *Arkiv för Matematik* (Stockholm).

comme l'intégrale n'est en général pas nulle, il en résulte que l'estimation $r(\tau)$ de $R(\tau)$ par (4) est *biaisée : sa moyenne est différente de la grandeur estimée.* La différence peut être assez faible si T est grand ; mais elle est loin d'être négligeable si $s(\nu)$ présente un maximum très accusé pour $\nu = 0$.

On a ensuite, si νa est entier,

$$E\,A(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\alpha) \, \frac{\alpha \sin 2\pi a\alpha}{\pi\,(\alpha^2 - \nu^2)} \, d\alpha \,;$$

la moyenne de $A\ (\nu)$ résulte donc d'un *filtrage* de $s(\nu)$ par un filtre de gain

$$K_1 = \frac{\alpha \sin 2\pi a\alpha}{\pi\,(\alpha^2 - \nu^2)} \,;$$

cette fonction K_1 présente un extremum (comme il convient) vers $\alpha = \nu$, d'autant plus marqué que a est plus grand. Toutefois sa décroissance assez lente lorsque α s'éloigne de ν entraîne que $A(\nu)$ peut-être sensiblement biaisée. C'est en particulier le cas si l'on estime $s(\nu)$ pour une valeur très inférieure à son maximum.

Or il existe une façon beaucoup moins biaisée d'estimer le spectre (et, dans un sens qui sera précisé, la covariance). Prenons, n étant un entier positif,

$$(6) \qquad c_n = \frac{1}{T} \int_0^T X\,(t)\, e^{-\frac{2i\pi nt}{T}} \, dt$$

et

$$(7) \qquad A(\nu) = 2\ T\ |\,c_n\,|^2 \qquad \text{avec } \nu = \frac{n}{T} \,;$$

cette nouvelle quantité $A(\nu)$ fournit aussi une estimation de $s(\nu)$; mais on a ici

$$E\,A(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\alpha) \, \frac{1 - \cos 2\pi\alpha T}{2\pi^2 T\,(\alpha - \nu)^2} \, d\alpha$$

donc un filtrage linéaire, avec un gain

$$K_2 = \frac{1 - \cos 2\pi\alpha T}{2\pi^2 T\,(\alpha - \nu)^2} \,;$$

ici encore, on a un maximum vers $\alpha = \nu$, mais la décroissance est beaucoup plus rapide lorsqu'on s'éloigne de cette valeur ; le filtre est beaucoup plus sélectif, ce qui rend l'estimation moins sensible aux autres valeurs du spectre. Cette sélectivité a pour corollaire une plus grande dispersion ; toutefois, si on s'intéresse non pas à une raie localisée du spectre, mais à la puissance dans tout une bande, la somme des $A(\nu)$ pour cette bande donnera une bonne estimation de la somme des $s(\nu)$ (estimation dont la dispersion diminue et tend vers zéro lorsque T augmente indéfiniment).

Il est possible d'examiner aussi ce qui se passe lorsqu'on remplace les intégrales, pour un calcul approché, par des sommes ; on constate que la moyenne de l'estimation résulte encore d'un filtrage du spectre.

* * *

En conclusion, insistons tout d'abord sur le fait qu'il est risqué de se lancer dans des calculs à propos de fonctions aléatoires sans les soumettre à une étude basée sur un théorie correcte. On devra en particulier toujours tenir compte du fait que les résultats de calculs portant sur les valeurs tirées d'échantillons sont des grandeurs aléatoires ; les écarts entre les estimations et les valeurs exactes ne sont pas tant une conséquence de l'approximation des calculs que de la nature statistique du problème. L'étude rigoureuse de ces écarts devrait accompagner tout procédé (numérique, analogique) d'investigation.

L'étude dont les résultats sont donnés plus haut, montre par exemple que l'estimation du spectre par une intégrale (tronquée) de Fourier, portant sur une estimation de la covariance (formules (3), (4) et (5)) donne un résultat qui peut être fortement biaisé, surtout si on étudie le spectre dans une région où il est très inférieur à son maximum. La méthode proposée ici (formules (6) et (7)), *dont l'application numérique est plus simple*, donne des résultats beaucoup plus sûrs [1].

Notons encore ceci : lorsqu'il considère la covariance d'une fonction aléatoire, le praticien songe en général à la contribution $R_1(\tau)$ d'une bande (ν_1, ν_2) seulement du spectre. Pour estimer cette fonction, il aura tout intérêt à commencer par estimer la région utile du spectre par (6) et (7), puis à calculer une estimation $r_1(\tau)$ de $R_1(\tau)$ en substituant à (2) la relation

$$(8) \qquad r_1(\tau) = \int_{\nu_1}^{\nu_2} A(\nu) \cos 2\pi\nu\tau \, d\nu$$

ou même une expression approchée par une somme finie. Quoi qu'il en soit, il est évident qu'un échantillon de longueur finie ne peut en aucun cas donner une information valable sur la contribution des valeurs du spectre dans le voisinage de $\nu = 0$. L'avantage de la méthode proposée ici consiste en particulier dans ce qu'on y tient explicitement compte de ce fait.

Ecole polytechnique
de l'Université de Lausanne
Institut de mathématiques
appliquées.

[1] Elle a été éprouvée sur des cas concrets. Voir, par exemple, D. Gaden : *Essai d'un procédé pour caractériser la clientèle d'un réseau selon la variabilité de sa consommation.* Bull. Assoc. suisse des Electriciens, 1955, n° 2.

LA VENTILATION MÉCANIQUE DES IMMEUBLES LOCATIFS

ROBERT GOERG, ing. SIA, directeur TECHNICAIR S.A.

Ventilation naturelle

Dans la plupart de nos grandes villes, les lois cantonales pour l'aération des locaux sanitaires et cuisines prescrivent l'aménagement de gaines verticales du sous-sol du bâtiment, avec prise d'air extérieure, jusqu'à la toiture. A mi-hauteur du local à ventiler, le canal est cloisonné ; une grille dans la partie inférieure sert à l'admission d'air, une autre sous le plafond évacue l'air vicié. Afin d'éviter la propagation d'émanations quelconques d'un étage à l'autre, chaque local à ventiler possède une gaine individuelle.

L'aération des locaux est naturelle. Son intensité dépend essentiellement des conditions atmosphériques : température de l'air, vitesse et direction du vent.

C'est la différence de densité entre la colonne d'air intérieure et extérieure — généralement plus froide — qui provoque une circulation dans la gaine verticale. Le degré d'aération varie donc, au cours de l'année. Si, en hiver, la ventilation est, la plupart du temps, suffisante, en mi-saison par contre elle est souvent inopérante, en raison des températures sensiblement égales de l'air intérieur et extérieur.

En été, il arrive même que le tirage soit inversé, la température des parois des gaines pouvant être plus basse que celle qui règne au dehors.

La hauteur de l'immeuble influence l'intensité du tirage et celui-ci varie selon l'étage où se trouvent les locaux à ventiler. La ventilation n'est donc pas uniforme dans l'ensemble de l'immeuble.

Le système de ventilation naturelle présente en outre de multiples inconvénients :

complication de la construction ;
frais d'aménagement élevés, surtout pour les immeubles à grand nombre d'étages ;
nombreuses percées de toiture et aspect souvent inesthétique de celle-ci ;
diminution de la place utile à l'habitation, donc augmentation du prix du m³ de construction ;
gaines de petites sections (généralement 10×15 cm), souvent obstruées et peu étanches ;
disposition des orifices d'amenée et de sortie d'air peu rationnelle pour une bonne ventilation, de sorte que le danger d'admission d'odeurs dans l'appartement subsiste ;
possibilité de chute d'air frais sur les occupants des locaux, si le tirage est inversé du haut vers le bas, suivant les conditions atmosphériques ;
en hiver, l'air frais non réchauffé pénètre directement dans les salles de bains, ce qui est très gênant.

Il suffit de consulter les locataires d'un immeuble locatif, construit même récemment, pour se rendre compte que ces inconvénients n'ont rien d'exagéré. Les architectes les connaissent. Ils savent également les soucis que leur causent le tracé des nombreuses petites gaines individuelles, l'aménagement de prises d'air frais — spécialement lorsque le rez-de-chaussée est occupé par des magasins — et la surveillance fastidieuse sur les chantiers.

Etant donné les imperfections du système de ventilation naturelle, il est compréhensible que des ingénieurs aient cherché une solution techniquement supérieure et répondant aux exigences des locataires.

Ventilation mécanique

Si quelques installations de ventilation mécanique ont été réalisées, ces dernières années en Suisse, dans des appartment-houses, bâtiments commerciaux et hôtels, on s'étonne que ce système ne soit pas encore appliqué en grand dans nos immeubles locatifs, alors qu'aux Etats-Unis et dans les pays nordiques il fait depuis longtemps l'objet d'une loi d'application.