

# Sur de nouvelles méthodes de calcul en topographie

Autor(en): **Ansermet, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin technique de la Suisse romande**

Band (Jahr): **83 (1957)**

Heft 4

PDF erstellt am: **08.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-62773>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Les nomogrammes des figures 10 (pour  $L \leq 6,00$  m) et 11 (pour  $L \geq 6,00$ ) permettent de calculer rapidement la valeur

$$A = a (1,032 L + 30 \Phi) \quad (24)$$

Pour un essai donné, il suffit alors d'introduire cette valeur dans l'une des deux formules des figures 10 et 11 et d'y remplacer également les valeurs mesurées pour trouver la valeur de  $k$ .

Les formules des figures 10 et 11 ne sont pas homogènes car  $k$  s'indique en cm/s, alors qu'on mesure  $h_m$ ,  $d$  et  $\Delta h$  en m,  $Q$  en l/min et  $\Delta t$  en min.

Exemple :  $L = 4,00$  m  $\Phi = 0,20$  m.

On tire de la figure 10 :  $A = 9,54$ .

$$\text{Essai à niveau constant : } k = \frac{1}{600 \cdot 9,54} \cdot \frac{Q}{h_m}$$

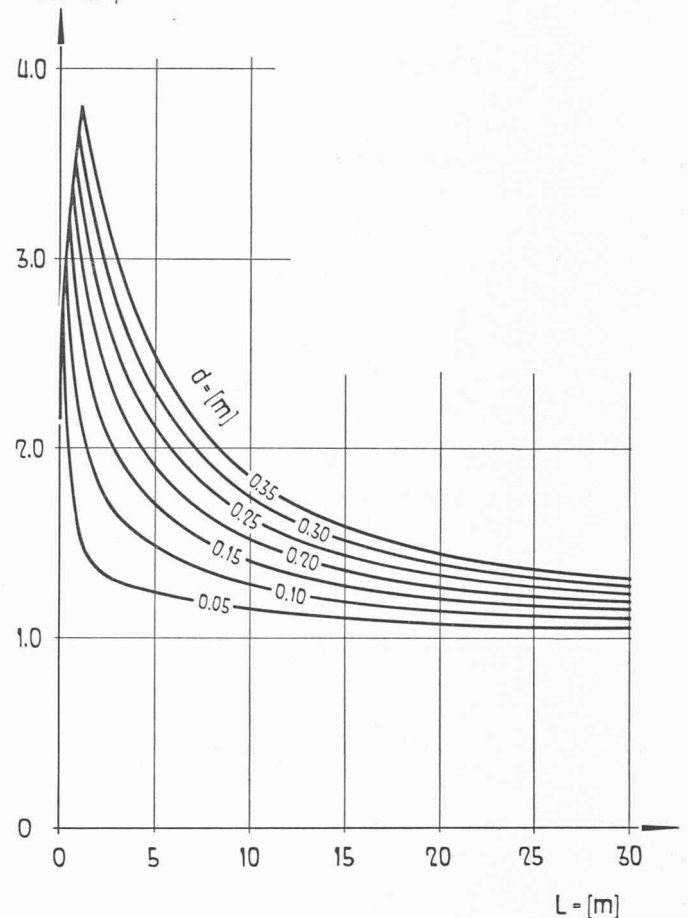
$$\text{Essai d'abaissement : } k = \frac{1,308}{9,54} \cdot \frac{d^2 \Delta h}{h_m \Delta t}$$

#### 6. Comparaison entre les résultats des formules simplifiées et ceux du nomogramme

Cette comparaison est représentée dans la figure 12. La différence est surtout marquée pour les faibles longueurs et les grands diamètres. La comparaison n'a pas été poussée pour des  $L < 3,1 \Phi$ , car les formules simplifiées présentent une contradiction. Le débit de l'essai ponctuel est en effet supérieur au débit de la formule de superposition tant que  $L < 3,1 \Phi$  ce qui est évidemment impossible.

$$\frac{Q}{k_{\text{relax}}} \cdot \frac{Q}{k_{\text{simpl.}}}$$

Fig. 12.



## SUR DE NOUVELLES MÉTHODES DE CALCUL EN TOPOGRAPHIE

par A. ANSERMET, ingénieur, professeur à l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne

Au cours de ces dernières années, une certaine évolution s'est manifestée dans le domaine de la topographie, portant notamment sur

- 1° la substitution, dans bien des cas, de mesures linéaires aux mesures angulaires ;
- 2° des changements de variables dans les calculs de compensation ;
- 3° l'emploi de moyens graphiques pour calculer les réseaux.

Le terme topographie est pris ici dans son sens le plus large.

Considérons un réseau de points  $P_i$  ( $i = 1, 2 \dots n$ ) non encore compensé ; un premier calcul sommaire fournira des valeurs approchées, provisoires, des divers éléments à déterminer. Cela amène à distinguer, en dehors des quantités mesurées, des valeurs provisoires des longueurs, angles, coordonnées, qu'il ne faut pas confondre avec les éléments définitifs, compensés.

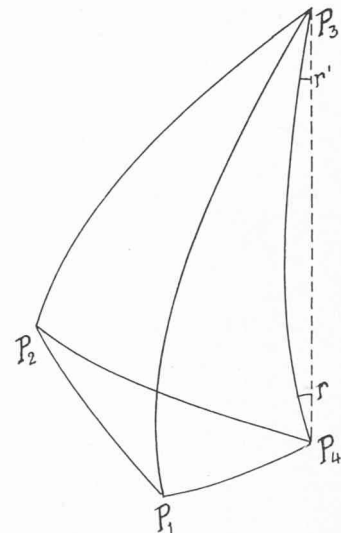


Fig. 1.

En particulier les coordonnées des sommets, connues approximativement, sont corrigées de quantités  $dx_i$  et  $dy_i$  lors de la compensation. C'est la méthode classique de la variation des coordonnées.

Le quadrilatère complet (fig. 1) est un élément essentiel d'un réseau ; en représentation plane conforme, qui est de règle, un côté quelconque  $P_3P_4$  forme avec sa corde deux petits angles  $r$  et  $r'$  dont il est fait pour le moment abstraction.

Désignons par  $A_1, A_2, \dots, A_k \dots, A_n$ , les angles mesurés ; une fois la compensation achevée,  $A_k$  prendra la valeur  $\underline{A_k}$  et on aura

$$(1) \quad \nu_k = (\underline{A_k} - A'_k) + (A'_k - A_k) = dA_k + f_k$$

avec la condition  $[p\nu\nu] = \text{minimum} = \Sigma(p\nu\nu)$

les  $p$  étant les poids respectifs des angles.  $A'_k$  est donc une valeur transitoire, provisoire, qui doit cependant être calculée avec précision. Fréquemment on mesure non pas des angles mais des directions ; ce cas est ici laissé de côté pour ne pas trop allonger le présent article. Les termes absolus  $f_k$  sont assimilés à des quantités directement mesurées pour l'attribution des poids, car  $A'_k$  est indépendant des observations ; certains  $f_k$  peuvent être nuls.

*Formation du système résiduel*

C'est l'opération essentielle, parfois un peu complexe. Sur les  $2n$  coordonnées, quatre peuvent être choisies arbitrairement au point de vue de la compensation si le réseau est libre. Dans le cas de mesures linéaires, trois coordonnées seulement ont des valeurs arbitraires.

Considérons l'angle  $P_1P_2P_3$  (fig. 1), par exemple :

$$dA_2 = d \text{ arc tg } \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} (m_1 \text{ et } m_2 \text{ coeff. angulaires})$$

$$(2) \quad \begin{cases} dA_2 = -f_2 + \nu_2 = F_2 (dx_1, dy_1, dx_2, dy_2, dx_3, dy_3) \\ dA_3 = -f_3 + \nu_3 = F_3 (\dots\dots\dots) \\ dA_4 = -f_4 + \nu_4 = F_4 (\dots\dots\dots) \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Les  $dA, dx, dy \dots$  ne sont pas des différentielles mais des accroissements et on néglige les termes en  $dx^2, dy^2, dx dy \dots$  dans les développements  $F_2, F_3, F_4 \dots$ . Le calcul est effectué en radians ou plutôt en secondes et les praticiens dressent en général des abaques pour calculer rapidement les coefficients des  $dx, dy$ .

A partir du système (2), on peut concevoir diverses solutions, selon la nature du problème.

I. *Les inconnues du problème sont les  $dx, dy$ .* Les  $dA$  ne jouent pas de rôle. Le système d'équations normales est :

$$(3) \quad \frac{\partial [p\nu\nu]}{\partial dx_1} = 0, \quad \frac{\partial [p\nu\nu]}{\partial dy_1} = 0, \quad \frac{\partial [p\nu\nu]}{\partial dx_2} = 0 \dots$$

solution qui fut déjà traitée sous tous ses aspects ([3] p. 117-142).

II. *Les inconnues sont les résidus  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n'$ .*

Il y a autant de conditions qui lient ces inconnues que de mesures surabondantes. Les équations y relatives sont déduites directement de la figure ou aussi,

étant implicitement contenues dans le système (2), obtenues en opérant des éliminations dans ce système. Le degré de surdétermination du réseau fournit le nombre de conditions. Entre les quatre angles intérieurs du quadrilatère  $P_1P_2P_3P_4$  par exemple, on aura :

$$dA_1 + dA_2 + dA_3 + dA_4 = 0 = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 - (f_1 + f_2 + f_3 + f_4)$$

où le terme absolu  $w = -(f_1 + f_2 + f_3 + f_4)$  exprime une discordance.

Dans les équations en  $dA_1, dA_2, dA_3 \dots$  il n'y a pas de termes absolus, car entre les réseaux provisoire et définitif (compensé), la figure a subi une déformation laissant subsister les relations angulaires ou autres fournissant les conditions ; du reste le système (2) le montre clairement.

On peut aussi établir des relations entre les sinus des angles, notamment en appliquant le théorème de Céva généralisé. Dans le quadrilatère, il n'y a pas moins de quinze manières de combiner ces sinus pour former des équations ([4] p. 188) ; une seule est à retenir ; des critères connus permettent au praticien de faire un choix. On aboutit à des développements tels que :

$$(4) \quad \begin{aligned} a_1 dA_1 + a_2 dA_2 + a_3 dA_3 + \dots = \\ = a_1 \nu_1 + a_2 \nu_2 + a_3 \nu_3 + \dots + w' = 0 \end{aligned}$$

où  $w' = -(a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 + \dots)$

Ce terme absolu étant déduit du système (2) où, le plus souvent, exprimé en fonction des angles ou de lignes trigonométriques de ceux-ci ; le calcul de ce terme est parfois assez fastidieux. D'autre part, sans connaître ces  $w, w' \dots$  il est possible d'effectuer la compensation en ce qui concerne les poids des inconnues et de fonctions de celles-ci.

Désignons encore par  $p_k$  les poids primitifs, par  $p'_k$  ceux des binômes  $(-f_k + \nu_k)$  c'est-à-dire les poids nouveaux, amplifiés grâce à la compensation ; on sait ([3] p. 159) que

$$(5) \quad [p : p']_1^{n'} = \text{nombre des mesures non surabondantes.}$$

Ainsi pour  $k = 1$  on a :

$$(6) \quad \frac{1}{p'_1} = \frac{1}{p_1} - \frac{\left(\frac{a_1}{p_1}\right)^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} - \frac{\left[\frac{b_1}{p_1} \cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p} \cdot 1\right]} - \frac{\left[\frac{c_1}{p_1} \cdot 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p} \cdot 2\right]} - \frac{\left[\frac{d_1}{p_1} \cdot 3\right]^2}{\left[\frac{dd}{p} \cdot 3\right]} - \dots$$

où les  $a, b, c, d \dots$  sont les coefficients des  $\nu_1, \nu_2, \nu_3 \dots$  dans les équations de condition ; certains coefficients sont nuls.

*Application :*

Le petit réseau de Schwerd (Speyer-Mannheim) est typique, étant caractérisé par une disparité de poids extrême

$$7 < p_k < 101$$

le calcul donne :  $0,06 < (p_k : p'_k) < 0,69$ .

C'est le poids primitif le plus fort qui est le moins amplifié (0,69), tandis que l'angle le plus petit bénéficie du quotient  $p : p'$  le plus favorable (0,06).

III. Les inconnues sont les variations angulaires  $dA_k$ .

Cette solution est assez nouvelle (voir [5]). C'est un cas où les inconnues sont liées par des conditions dont les équations ont la forme :

$$(7) \quad [a_k dA_k] = 0 = [b_k dA_k] = [c_k dA_k] = \dots$$

Bien entendu, tous les  $dA_k$  ne figurent pas dans une même équation. Parmi les solutions à envisager, on peut en retenir deux :

- 1° On commence par éliminer, en faisant un choix judicieux, des éléments mesurés qui sont en sur-nombre. Le problème se présente alors sous une forme familière dont la solution est aisée.
- 2° La compensation sera fractionnée et comprendra deux phases. Dans le système résiduel (2), le nombre d'inconnues  $dA_k$  doit être inférieur à celui des équations, ce qui implique des éliminations et, dans chaque cas, le calculateur est juge. Le cas se présente aussi où, après avoir terminé une compensation, le praticien procède à des mesures complémentaires.

La solution par fractionnement en deux phases a ceci de particulier qu'elle donne lieu à trois valeurs pour l'erreur moyenne quadratique pour une observation de poids un. La méthode est aussi dite *mixte*.

Mesures linéaires

Le problème des mesures linéaires est devenu actuel mais n'a pas encore été traité dans toute son ampleur, surtout en ce qui concerne le calcul des réseaux déterminés par ce moyen. En particulier la question des poids à attribuer aux mesures se révèle assez complexe ([1] p. 22).

Considérons encore le quadrilatère  $P_1P_2P_3P_4$  ; sur les six côtés un est surabondant, d'où le système résiduel ([4] p. 171) :

$$(8) \quad \begin{cases} dl_1 = -f_1 + v_1 = a'_1(dx_2 - dx_1) + \\ \quad \quad \quad + b'_1(dy_2 - dy_1) \\ dl_2 = -f_2 + v_2 = a'_2(dx_3 - dx_1) + \\ \quad \quad \quad + b'_2(dy_3 - dy_1) \\ \dots\dots\dots \\ dl_6 = -f_6 + v_6 = a'_6(dx_4 - dx_3) + \\ \quad \quad \quad + b'_6(dy_4 - dy_3) \end{cases} \quad a_i'^2 + b_i'^2 = 1$$

les  $dl$  jouant ici le rôle des  $dA$ . On peut poser  $dx_1 = dy_1 = dx_2 = 0$  au point de vue de la compensation. Si l'on ajoute un point  $P_5$ , le nombre des côtés mesurés peut être porté à dix, sur lesquels trois sont surabondants.

L'établissement des équations de condition est plus laborieux que dans le cas d'observations angulaires, surtout en ce qui concerne le terme absolu  $\omega$  (discordance). Le réseau est fractionné en quadrilatères complets si c'est possible.

En principe il y a deux modes de calcul :

- 1° Les équations de condition étant implicitement contenues dans le système résiduel, on procède à des éliminations judicieusement conçues. L'emploi des machines à calculer modernes facilite ces éliminations.
- 2° L'examen de la figure permet de poser de suite les conditions, en exprimant par exemple qu'un

certain angle est susceptible d'être déterminé de deux façons différentes ([1] p. 31) en fonction d'éléments linéaires.

Si les points  $P_1P_2P_3P_4$  sont situés à peu près sur un même cercle, on a :

$$(9) \quad P_1P_3 \times P_2P_4 \cong P_1P_2 \times P_3P_4 + P_2P_3 \times P_1P_4$$

(formule de Ptolémée)

ce qui suffit en général pour calculer les coefficients des  $v_1, v_2, v_3 \dots$  mais pas le terme absolu, d'où une complication. La détermination des poids après compensation est du reste indépendante des  $\omega$ .

Il n'y a qu'à appliquer la formule (6) en remarquant que :

$$(10) \quad \sum p_i \frac{\left(\frac{a_i}{p_i}\right)^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} = \sum p_i \frac{\left[\frac{b_i}{p_i} \cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p} \cdot 1\right]} = \sum p_i \frac{\left[\frac{c_i}{p_i} \cdot 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p} \cdot 2\right]} = \dots = 1$$

les  $a_i, b_i, c_i$  étant les coefficients des  $v_i$  ([3] p. 159).

Application :

Considérons cinq points  $P_1P_2 \dots P_5$  constituant un pentagone à peu près régulier et les dix longueurs mesurées entre ces points pris deux à deux.

- 1° Admettons des poids  $p_1 = p_2 = \dots = p_{10} = 1$   
( $i = 1, 2, \dots 10$ ).

Il résulte de la formule (6) :

$$(p : p') = 0,75 \text{ pour les cinq côtés}$$

$$(p : p') = 0,65 \text{ pour les cinq diagonales}$$

$$\sum_1^{10} (p : p') = 7 = \text{nombre de mesures non surabondantes.}$$

- 2° Admettons  $p_1 : p_2 : p_3 \dots : p_{10} = \frac{1}{l_1} : \frac{1}{l_2} : \frac{1}{l_3} \dots : \frac{1}{l_{10}}$   
(poids inverses des longueurs mesurées)

on trouve  $(p : p') = 0,80$  pour chacun des cinq côtés  
et  $(p : p') = 0,60$  pour chacune des cinq diagonales

$$\sum_1^{10} (p : p') = 7.$$

Dans les deux cas, ce sont les poids des diagonales qui sont amplifiés dans la plus forte proportion.

Encore une fois, l'élément complexe du problème est la formation des poids  $p_1, p_2, \dots p_{10}$ . Parmi les suggestions faites à ce sujet, il y a lieu de citer la suivante : les points  $P_1, P_2, P_3 \dots$  seraient choisis sur une même droite et constitueraient donc une ponctuelle rectiligne, les longueurs mesurées étant toujours  $P_1P_2, P_1P_3 \dots P_1P_5, P_2P_3, P_2P_4 \dots P_4P_5$ , ce qui implique une compensation. A partir d'un point  $S$ , situé en dehors de la ponctuelle, on mesurerait angulairement, avec une haute précision, les directions  $SP_1, SP_2 \dots SP_5$  ou les angles compris entre ces rayons pris deux à deux. Une correspondance projective est ainsi établie

$$P_1P_2 \dots P_5 \bar{\wedge} S(P_1P_2 \dots P_5).$$

On forme des groupes de quatre éléments en calculant les rapports anharmoniques  $(P_1P_2P_3P_4) \dots (P_2P_3P_4P_5)$  et en confrontant ces valeurs avec celles obtenues par voie angulaire (faisceaux de rayons). Les poids des valeurs angulaires seraient considérés comme connus, tandis que diverses hypothèses seraient faites pour les poids des mesures linéaires. Il ne serait pas difficile d'établir laquelle de ces hypothèses donne lieu à la meilleure concordance entre les rapports anharmoniques déterminés en fonction d'éléments angulaires et linéaires. Cette question des poids étant élucidée, et si les  $dl_1, dl_2, dl_3 \dots$  sont choisis comme inconnues, il faut éventuellement fractionner la compensation. Tout dépend de la nature du problème.

*Compensations fractionnées*

Le lecteur trouvera un cas concret de ce mode de calcul dans [5]. Sous une forme générale le système initial est

$$(11) \quad v_i = a_i x + b_i y + c_i z - l_i \quad (p_i = 1, i = 1, 2, 3 \dots n)$$

$$(12) \quad \text{d'où } [av] = [bv] = [cv] = 0.$$

$$(13) \quad \begin{cases} x = [\alpha l], & y = [\beta l], & z = [\gamma l] \\ [a\alpha] = [b\beta] = [c\gamma] = 1 \\ [a\beta] = [a\gamma] = [b\alpha] = \dots = 0 \\ [a\alpha'] = 0 = [\beta\alpha'] = [\gamma\alpha'] \end{cases} \quad ([3] \text{ p. 77-87})$$

Les  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  étant des multiplicateurs connus.

2<sup>e</sup> phase : Il y a encore des équations de condition dont on a fait jusqu'ici abstraction (fonctions  $F_1 = 0, F_2 = 0 \dots$  liant les inconnues).

Il en résulte des accroissements  $v'_i$  pour les  $v_i$  et  $\xi, \eta, \zeta$  pour les inconnues qui deviennent  $x + \xi, y + \eta, z + \zeta$ .

$$(14) \quad V_i = v_i + v'_i; \quad [VV] = [vv] + [v'v'] \\ \text{car } [vv'] = 0 \quad ([4] \text{ p. 118}).$$

$$V_i = v_i + a_i \xi + b_i \eta + c_i \zeta \\ \text{et en tenant compte de (13)}$$

$$(15) \quad \xi = [\alpha v'], \quad \eta = [\beta v'], \quad \zeta = [\gamma v']$$

expressions qui, introduites dans

$$F_1(x + \xi, y + \eta, z + \zeta) = 0 \\ F_2(x + \xi, y + \eta, z + \zeta) = 0$$

nous ramènent à une forme connue de compensation mais avec des développements un peu plus longs. On peut calculer le poids de fonctions

$$[\varphi_i(l_i + v'_i)]$$

où les facteurs  $\varphi_i$  sont connus.

De plus, il faut confronter les trois valeurs :

$$[vv] : (n - u), \quad [v'v'] : r \quad \text{et} \\ [VV] : (n - u + r) \quad \text{ici } u = 3; r = 2$$

suivant que l'on considère chaque phase séparément ou l'ensemble de la compensation. Théoriquement, ces trois résultats devraient concorder.

D'autres problèmes peuvent être posés, tels que le tracé des ellipses d'erreur relatives aux sommets du réseau ; dans la littérature ces ellipses sont en général

considérées isolément, individuellement, tandis que dans la pratique elles sont parfois groupées et mutuellement liées. Il faut tenir compte de cette corrélation et la géométrie synthétique est applicable avec avantage dans certains cas (voir [5]).

*La déformation des réseaux en représentation plane conforme*

Il a été fait abstraction jusqu'ici de la courbure des côtés  $P_1P_2, P_1P_3 \dots$ . La figure 1 montre, pour un de ces côtés, en quoi consistent les corrections ou réductions  $r, r'$  ; celles-ci sont négligeables en général pour les réseaux très secondaires. Des abaques fournissent de suite ces réductions ou, de préférence, les somme  $(r + r')$ , différence  $(r - r')$ , quotient  $(r : r')$  en faisant abstraction des signes. Le cas où la courbure change de signe entre deux sommets consécutifs est ici laissé de côté.

*Formules initiales*

L'équation d'une surface rapportée à son plan tangent et à des tangentes principales est

$$z = \frac{x^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2} + \dots$$

où  $R_1$  et  $R_2$  sont les rayons principaux de courbure

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + \left( \frac{xdx}{R_1} + \frac{ydy}{R_2} \right)^2 + \dots$$

A l'élément  $ds$  correspond dans le plan l'élément  $dS = mds$

$$dS^2 = dX^2 + dY^2 \quad (X, Y \text{ coordonnées planes}) \\ X = x + u_3 + \dots \quad Y = y + v_3 + \dots$$

$u_3$  et  $v_3$  désignant les groupes de termes de 3<sup>e</sup> ordre dont le rôle est prépondérant

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 + \\ + 2 \left( \frac{\partial u_3}{\partial x} dx^2 + \frac{\partial u_3}{\partial y} dx dy + \frac{\partial v_3}{\partial x} dx dy + \frac{\partial v_3}{\partial y} dy^2 \right) + \dots = \\ = m^2 ds^2 = (1 + 2m_0) (dx^2 + dy^2 + \frac{1}{R^2} (xdx + ydy)^2) + \dots$$

où  $R^2 = R_1 R_2$ , tandis que  $m_0$  désigne le groupe homogène de 2<sup>e</sup> ordre dans  $m$ . En identifiant mutuellement les coefficients respectifs de  $dx^2, dx dy, dy^2$  dans ces développements puis intégrant on obtient :

$$(16) \quad m_0 = \frac{x^2 + y^2}{4R^2} + A(x^2 - y^2) + 2Bxy$$

relation dans laquelle on peut substituer les  $(X, Y)$  aux  $(x, y)$  (voir [5]) et

$$(17) \quad \begin{cases} u_3 = \frac{x^3 + xy^2}{4R^2} + \frac{A}{3} (x^3 - 3xy^2) + \frac{B}{3} (3x^2y - y^3) \\ v_3 = \frac{y^3 + x^2y}{4R^2} - \frac{A}{3} (y^3 - 3yx^2) + \frac{B}{3} (3y^2x - x^3) \end{cases}$$

$$(18) \quad X + iY = X_0 + iY_0 + \\ + \frac{1}{3} (A - Bi) (X_0 + iY_0)^3 + \dots \quad i = \sqrt{-1}.$$

*Cas où les variables sont dissociées*

C'est le plus fréquent en pratique ; un seul paramètre  $n$  définit la projection ( $|n| \leq 1$ ).

$$(19) \quad m - 1 \cong \frac{1}{4R^2} \left( (1 - n)X^2 + (1 + n)Y^2 \right).$$

Pour  $m$  donné et  $n$  variable, c'est l'équation d'un faisceau circonscrit à un carré. La courbure  $C$  des côtés du réseau se déduit de (19) par la formule de C. M. Schols ([2] p. 150 et [5]). On trouve

$$(20) \quad C = \frac{\partial \text{Log} m}{\partial N} = \frac{1}{m} \left( \frac{\partial m}{\partial X} \sin V - \frac{\partial m}{\partial Y} \cos V \right) \cong \frac{1}{2R^2} \left( (1 - n) X \sin V - (1 + n) Y \cos V \right)$$

$$dS \sin V = dY, \quad dS \cos V = dX \quad ([5], [2] \text{ p. } 149).$$

où  $N$  désigne la direction normale à l'arc de transformée.

On vérifie sans peine que pour un contour fermé tel que  $P_1P_2P_3P_4P_1$ , la variation totale de courbure

$$\oint C dS$$

est indépendante du paramètre  $n$  définissant le système de projection conforme.

Il y a corrélation entre les formules de Schols et de Gauss-Bonnet. En un point, il y a trois directions, pour lesquelles  $C = 0$ ,  $C = \text{maximum}$  et  $X \sin V + Y \cos V = 0$  ( $C$  indépendant de  $n$ ) ; ces deux dernières directions peuvent coïncider en certains points.

De plus, pour un côté quelconque  $P_3P_4$ , l'expression

$$(21) \quad (r + r') = \int_{P_3}^{P_4} C dS$$

est indépendante du paramètre  $n$  si  $P_3P_4$  est la corde d'une hyperbole ayant les axes de coordonnées comme asymptotes

tandis que le quotient  $r : r'$  se déduit de  $r : r' \cong C' : C''$  ( $C'$ ,  $C''$  courbures aux premier et second tiers du côté). (22)

Enfin pour le maximum de  $C$  on a (voir [5]) :

$$(23) \quad C_{\max} = \frac{1}{2R^2} \sqrt{(1 - n)^2 X^2 + (1 + n)^2 Y^2}.$$

En appliquant la formule (19), on trouve pour le territoire suisse :  $m \leq 1,000112$  pour  $n = -0,45$ . Si l'on cherche à réduire le plus possible le maximum de courbure  $C_{\max}$ , il faut adopter le paramètre  $n = -0,24$  et alors  $m \leq 1,000159$ .

Une suggestion formulée par G. Darboux tend à rendre minima la valeur moyenne du carré du gradient de  $\text{Log. } m$  pour le territoire considéré. Cette valeur  $M$  s'exprime par :

$$(24) \quad M = \int \int \left\{ \left( \frac{\partial \text{Log } m}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial \text{Log } m}{\partial Y} \right)^2 \right\} dXdY : \int \int dXdY.$$

Le numérateur de cette fraction pouvant être converti en une intégrale curviligne, le contour fermé étant une des courbes définies par la formule (19).

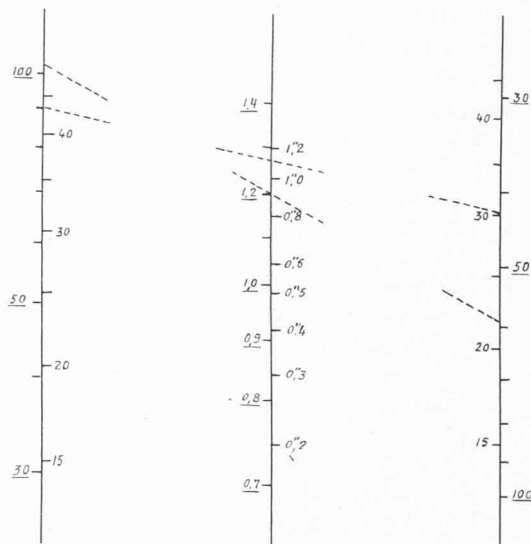


Fig. 2.

Et l'on constate que les termes en  $n$  s'éliminent dans  $M$  pour toutes les courbes appartenant à un même faisceau  $m = \text{const}$ . Les considérations qui précèdent contribuent à fixer le choix du paramètre  $n$ . Si les variables ne sont pas dissociées, les résultats acquis ci-dessus subsistent. On voit combien les systèmes conformes se prêtent bien au calcul des réseaux. Le calcul graphique des réductions  $r, r'$  est immédiat.

Un côté primordial du réseau suisse est Feldberg-Lägern (F-L)

$$X_F - X_L = 43,35 \text{ km.} \quad Y_L - Y_F = 30,2 \text{ km.}$$

$$(r = 6'',76, r' = 5'',65).$$

L'abaque donne immédiatement :  $r - r' = 1'',11$   
 $n = -1$  ; (sexag.)

tandis que pour  $X_F = 102,75 \text{ km}, X_L = 59,4 \text{ km}$   
 on lit  $r : r' = 1,20$  (chiffres soulignés).

D'autres abaques existent pour  $(r + r')$ , toujours en valeurs absolues (voir [5]). Pratiquement, leurs échelles seront en corrélation avec la précision désirée.

Les lignes qui précèdent donnent un aperçu très sommaire de méthodes nouvelles ; en particulier pour les compensations on recourt parfois à des symboles. Au point de vue didactique, cela peut présenter de l'intérêt ; ces symboles ne procurent aucun résultat nouveau et n'apportent aucun allègement lors d'applications numériques.

LITTÉRATURE

[1] BAESCHLIN, C. F. : *Die Berechnung von Streckennetzen* (1951).  
 [2] FRANK, A. : *Beiträge zur winkeltreuen Abbildung* (Zeitschr. für Vermessungswesen, 1940).  
 [3] GROSSMANN, W. : *Ausgleichsrechnung* (Springer, Berlin).  
 [4] JORDAN, W. : *Vermessungskunde I* (Stuttgart, 1893).  
 [5] ANSERMET, A. : *Les compensations par les méthodes mixtes. — Le calcul semi-graphique de réseaux.* (Revue suisse des mensurations, 1956, nos 2, 8).