

# Étude photoélasticimétrique de la résistance d'une ferme des tribunes du stade d'Yverdon

Autor(en): **Rescher, O.-J.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin technique de la Suisse romande**

Band (Jahr): **87 (1961)**

Heft 11

PDF erstellt am: **08.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-65030>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

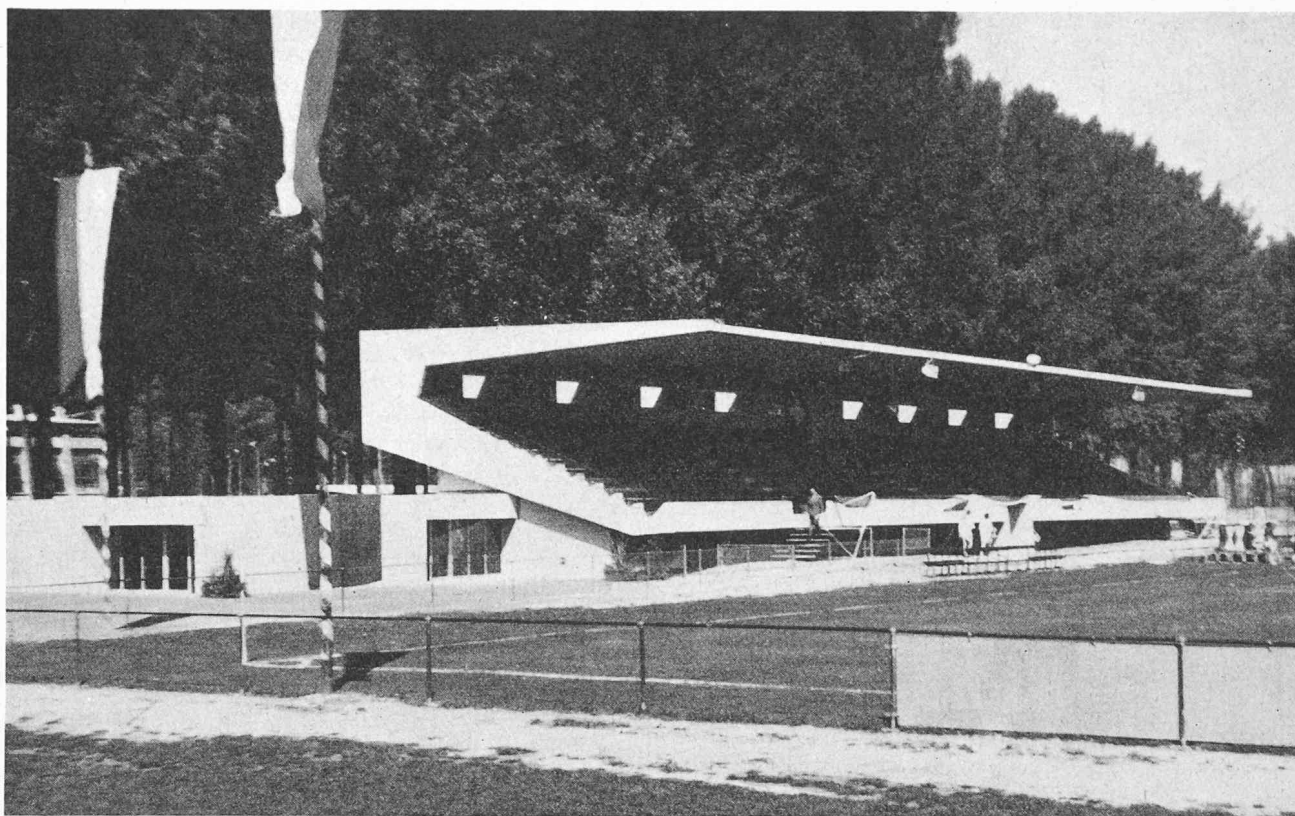


Fig. 9. — L'ouvrage terminé le jour de l'inauguration.

#### 4. Flèche de la toiture

Lors du décoffrage de la toiture, celle-ci devait prendre une flèche composée par les trois termes suivants :

- $f_1$  = flèche due au poids propre des consoles.
- $f_2$  = contreflèche due à la précontrainte des consoles.
- $f_3$  = contreflèche due à la deuxième étape de précontrainte des gradins.

La valeur de la flèche :  $f = f_1 + f_2 + f_3$  donnée par le

calcul était pratiquement nulle. Cette valeur a été confirmée lors du décoffrage.

Les travaux ont été exécutés par l'entreprise E. Gabella d'Yverdon ; ils ont duré de septembre 1959 à juillet 1960.

La maison Précontrainte S.A. à Lausanne s'est chargée de la précontrainte (câbles Freyssinet) et de la fourniture des appuis STUP.

L'inauguration eut lieu le 11 septembre 1960 (fig. 9).

## ÉTUDE PHOTOÉLASTICIMÉTRIQUE DE LA RÉSISTANCE D'UNE FERME DES TRIBUNES DU STADE D'YVERDON

par O.-J. RESCHER, Dr ès sc. techn., chargé de cours à l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne

### 1. Objet des essais

La structure porteuse du stade d'Yverdon est constituée par une succession de fermes en béton armé et béton précontraint écartées de 5,50 m (fig. 1). Chaque ferme est formée d'une poutre formant avant-toit solidaire de la poutre supportant les gradins par l'intermédiaire d'une paroi verticale dont la largeur est du même ordre de grandeur que la hauteur ; elle repose sur deux appuis et constitue un système statiquement déterminé.

La forme définie par l'architecte et l'ingénieur a posé des problèmes de calculs de contraintes dépassant le cadre des méthodes de calcul de résistance habituelles, ceci en particulier dans la zone de l'appui extérieur,

partie particulièrement importante pour assurer le bon comportement statique de la construction.

Ces raisons ont amené l'auteur du projet, le bureau d'ingénieurs J. Boss et le maître de l'œuvre à recourir aux essais par photoélasticité pour lever les incertitudes du calcul dans une partie importante de l'ouvrage.

Les essais avaient pour objet de déterminer :

1. L'état de contrainte de l'ouvrage dans la partie située au-dessus de l'appui extérieur et dans la paroi porteuse.
2. L'influence des câbles de précontrainte situés dans la partie des gradins sur l'état de sollicitation de l'ouvrage.

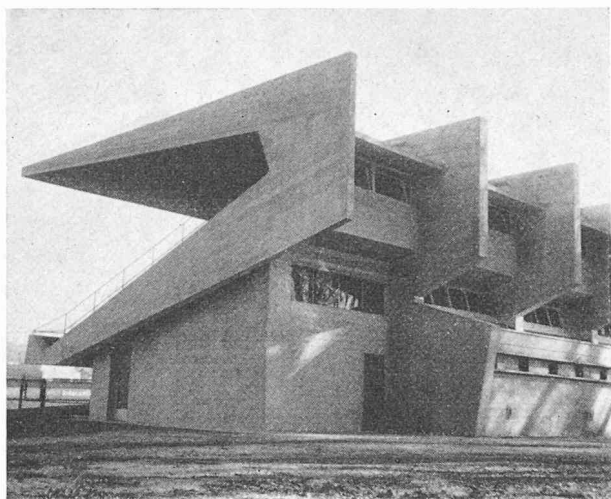


Fig. 1. — Photographie des tribunes du Stade d'Yverdon. Vue de l'ouvrage achevé.

## II. Description des essais

Les dimensions géométriques de l'ouvrage et du modèle sont indiquées sur la figure 2. Pour la fabrication du modèle, nous avons utilisé la résine CR 39 appartenant au groupe des résines allyliques. L'échelle du modèle a été choisie à 1 : 50. L'épaisseur de la plaque du modèle était de 9,55 mm. Les essais ont été effectués au *Laboratoire de statique des constructions de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne*.

L'observation des lignes isochromes et des lignes isoclines se faisait à l'aide de l'appareil de photoélasticité du Laboratoire, équipé de filtres polarisants d'un diamètre de 40 cm. Nous avons limité le modèle à la partie intéressant l'étude, en respectant la similitude géométrique entre le modèle et l'ouvrage. C'est pour cette raison que nous avons réduit la distance entre appuis en déplaçant l'appui intérieur légèrement vers l'extérieur,

pour éviter de trop grandes flèches de la poutre des gradins. Nous avons également raccourci l'avant-toit, étant donné que cette partie de l'ouvrage ne pose pas de problème de résistance. Il est évident que cette disposition du modèle n'influence aucunement la partie intéressant l'étude, soit la paroi verticale et la partie de la poutre des gradins située au-dessus de l'appui extérieur. Les charges appliquées au modèle sont assimilables à celles de l'ouvrage pour la partie étudiée. La charge appliquée sur les gradins a été calculée de telle sorte que sa réaction sur appui extérieur soit semblable à celle qui s'exerce sur l'ouvrage réel.

A la suite des résultats obtenus de l'essai effectué sur modèle I, il est apparu qu'une modification de formes était désirable pour diminuer les sollicitations de l'ouvrage dans la région située au-dessus de l'appui extérieur. En outre, il a paru indiqué d'améliorer l'état de contrainte sous l'effet défavorable de deux angles rentrants.

Un deuxième modèle — modèle II — a été réalisé. Afin d'économiser temps et matière, nous avons transformé le modèle dans la région de l'appui par un collage. La matière du modèle étant plus âgée a montré un effet de bord un peu plus accentué que pour le modèle I. Toutefois, une observation correcte a été possible. Le cas de charge du modèle II est le même que celui étudié sur modèle I.

Enfin, nous avons étudié sur modèle II l'effet d'une précontrainte dans la poutre des gradins. Pour chaque cas de charge, nous avons relevé les spectres des lignes isochromes et des lignes isoclines.

Parallèlement aux essais principaux, nous avons effectué un essai d'étalonnage de flexion pure et de traction simple, afin de déterminer la valeur de la constante photoélasticimétrique :

$$C = 17,50 \frac{\text{kg/cm}^2}{\text{ordre}} \cdot \text{cm}$$

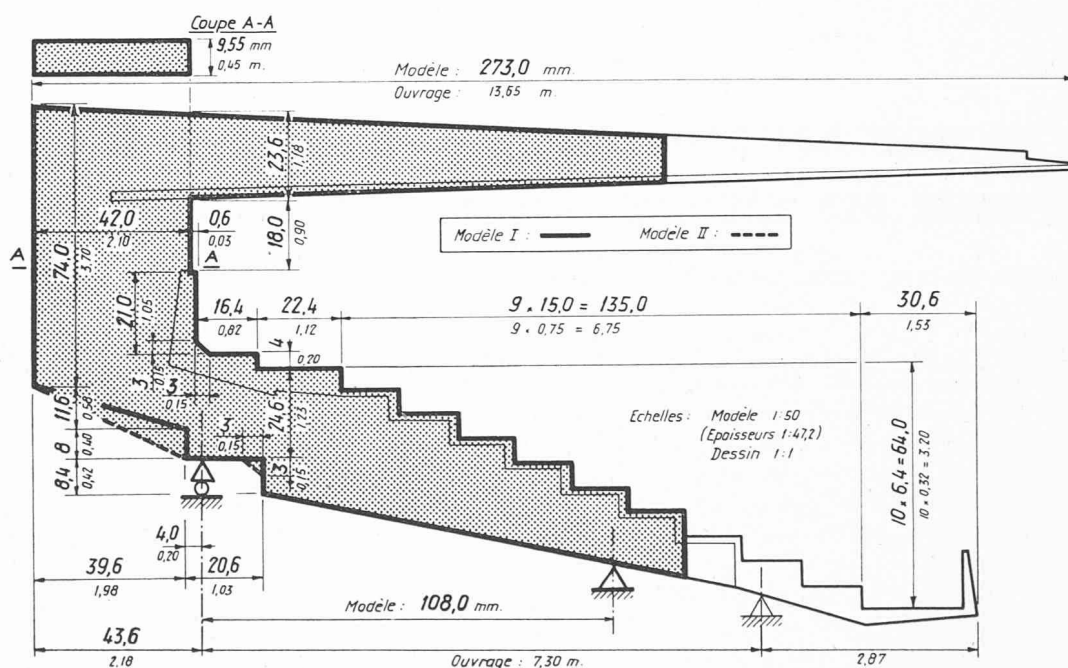


Fig. 2. — Dimensions géométriques des modèles et de l'ouvrage.

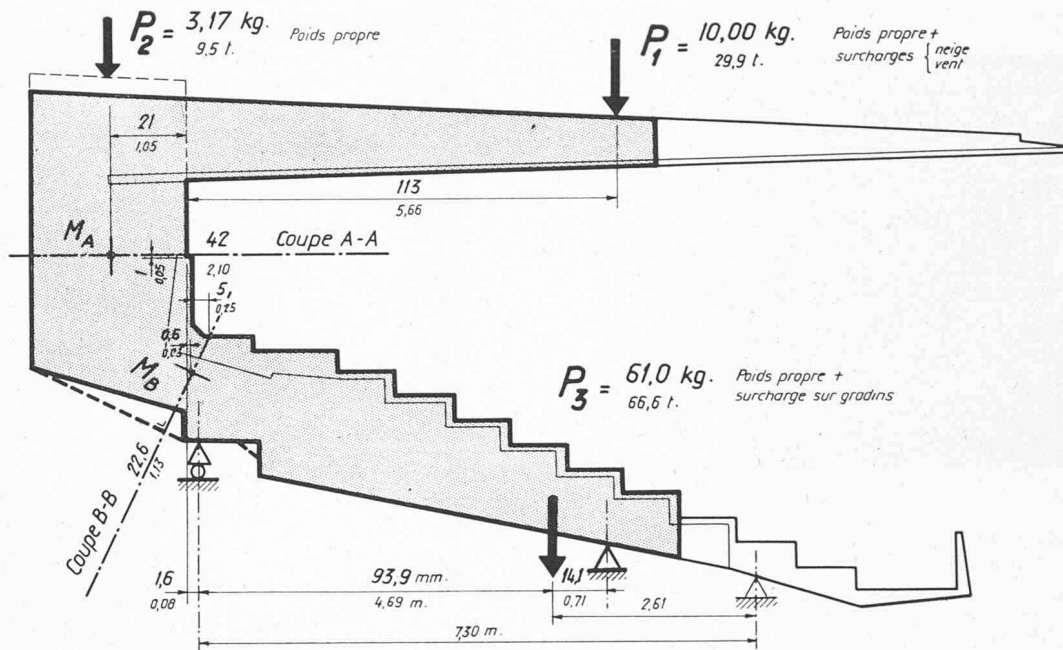


Fig. 3. — Modèle I: Plan de charges.

### III. Bref rappel des bases théoriques des essais photoélastométriques à deux dimensions

Deux réseaux de lignes caractérisent les essais de photoélasticité appliqués aux problèmes d'un intérêt technique, les lignes isochromes et les lignes isoclines.

Une ligne isochrome est le lieu géométrique de tous les points d'égale différence des contraintes principales  $(\sigma_I - \sigma_{II}) = \text{constant}$ . Elle peut être aussi interprétée comme ligne d'égale contrainte tangentielle maximum, étant donné que  $\tau_{\max}$  agissant dans le plan du modèle est égal à  $\frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{II})$ .

Toutefois nous devons retenir que cette contrainte tangentielle n'est un maximum des contraintes de cisaillement qu'aux cas où les contraintes principales  $\sigma_I$  et  $\sigma_{II}$  ont des signes différents. Si  $\sigma_I$  et  $\sigma_{II}$  sont à signes égaux,  $\tau_{\max}$  devient égale à  $\frac{\sigma_I}{2}$ , si  $|\sigma_I| > |\sigma_{II}|$ . L'exploitation du réseau des lignes isochromes est basée sur une application de la loi fondamentale de la photoélasticité sous la forme suivante :

$$(\sigma_I - \sigma_{II}) = m \frac{C}{e}$$

où :  $m$  = différence de marche relative des composantes de la lumière sortant de l'analyseur.

$e$  = épaisseur du modèle.

$C$  = constante photoélastométrique (constante de la matière).

Correspondant au nombre entier des déphasages des deux composantes de la lumière sortant de l'analyseur, ces lignes isochromes portent le numéro d'ordre «  $m$  ». Ainsi la différence des contraintes d'une ligne isochrome à l'autre est égale à la valeur de la constante photoélastométrique calculée pour l'épaisseur du modèle.

Avec la restriction mentionnée ci-dessus, le réseau des lignes isochromes peut être considéré comme une carte topographique indiquant les lignes d'égale sollicitation si nous pouvons admettre comme critère la contrainte de cisaillement maximum. Ainsi considéré, le réseau des lignes isochromes fournit une image vivante de l'état de sollicitation. Nous distinguons facilement sur modèle les endroits fortement sollicités caractérisés par une zone où les lignes isochromes sont très serrées et le numéro d'ordre est très élevé. Ces régions sont généralement sujettes à des études plus approfondies.

Les lignes isoclines ou isogones relient tous les points sur lesquels l'orientation des contraintes principales est la même. Généralement, elles sont également relevées par voie photographique. Travaillant avec la lumière blanche et une polarisation linéaire, nous obtenons une photographie par ligne isocline suivant l'orientation du système polariscopique. En

principe, nous relevons les isoclines tous les 5 ou tous les 10 degrés. A l'aide de celles-ci, il est facile de construire les trajectoires qui nous fournissent une image parlante du jeu des efforts intérieurs. Ces renseignements sont particulièrement intéressants pour une pose judicieuse d'armatures dans des ouvrages en béton armé et béton précontraint.

Le procédé fondamental de la photoélasticité à deux dimensions consiste donc en l'observation et l'exploitation des lignes isochromes et des lignes isoclines. Les renseignements que nous obtenons sont les suivants :

- 1° un aperçu général sur l'état de sollicitation ;
- 2° dans tout le champ des contraintes :
  - a) les valeurs de la différence des contraintes principales  $(\sigma_I - \sigma_{II})$  ;
  - b) les valeurs des contraintes de cisaillement maximum  $\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{II})$  ;
  - c) la direction des contraintes principales (trajectoires) ;
- 3° sur le pourtour du champ de contrainte : les valeurs des contraintes principales ;
- 4° les points de moment nul dans des éléments poutres.

Dans la plupart des cas, les renseignements fournis par exploitation du réseau des lignes isochromes sont déjà suffisants pour pouvoir prendre des décisions constructives, étant donné que généralement les plus grandes contraintes apparaissent sur les pourtours du modèle.

Si nous désirons connaître l'état de contrainte complet à l'intérieur du champ, nous devons déterminer les contraintes principales,  $\sigma_I$  et  $\sigma_{II}$ , séparément ou indiquer les composantes de contraintes  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$ . Nous connaissons à l'intérieur du champ seulement la différence des contraintes principales  $(\sigma_I - \sigma_{II})$  à l'aide des lignes isochromes et leur direction à l'aide des lignes isoclines. Pour le calcul de l'état de contrainte complet, nous avons à notre disposition un grand nombre de méthodes.

Une méthode efficace applicable pour beaucoup de cas de la pratique est la « méthode d'intégration graphique basée sur la différence des contraintes tangentielles » que nous avons aussi utilisée dans notre cas.

La transmission des résultats obtenus sur modèle se fait sur la base des lois de similitude en admettant que la loi d'élasticité de Hook est valable pour le modèle ainsi que pour l'ouvrage.

### IV. Commentaires généraux des résultats, transmission des résultats de l'ouvrage

Le plan de charge du modèle I est représenté sur la figure 3. Les résultats obtenus pour le modèle I sont résumés sur les figures 4 à 12.



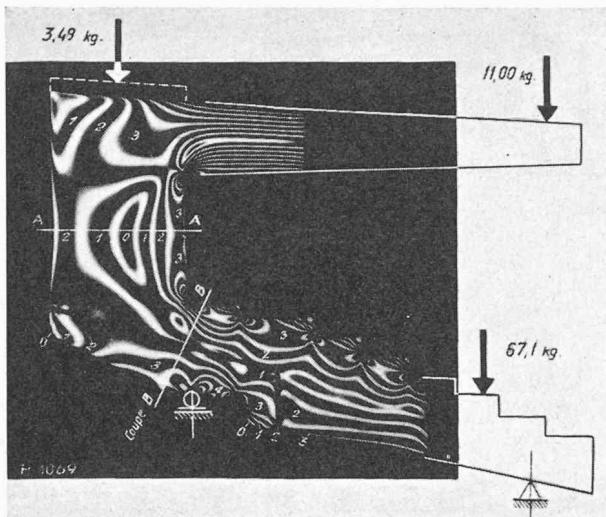


Fig. 4. — Modèle I : Lignes isochromes.  
 $(\sigma_I - \sigma_{II}) = \text{const.}$

Lumière de sodium, polarisation circulaire.  
 Cas de charge : poids propre + surcharges.  
 Contraintes sur l'ouvrage :  $\sigma \text{ kg/cm}^2 = 23,30 \cdot m$ .  
 $m = \text{ordre des lignes isochromes.}$

Sur la photographie des lignes isochromes (fig. 4), nous remarquons en particulier dans la partie de l'avant-toit, l'image typique pour une sollicitation due à une flexion et à un effort tranchant. Pour d'autres sections à l'intérieur du modèle, soit dans la partie de la paroi porteuse faisant liaison entre l'avant-toit et la poutre des gradins, des renseignements détaillés sur la répartition des contraintes ne peuvent pas être donnés immédiatement. Toutefois, nous remarquons l'effet défavorable des deux angles rentrants au voisinage de l'appui extérieur, où l'on se trouve dans une zone tendue.

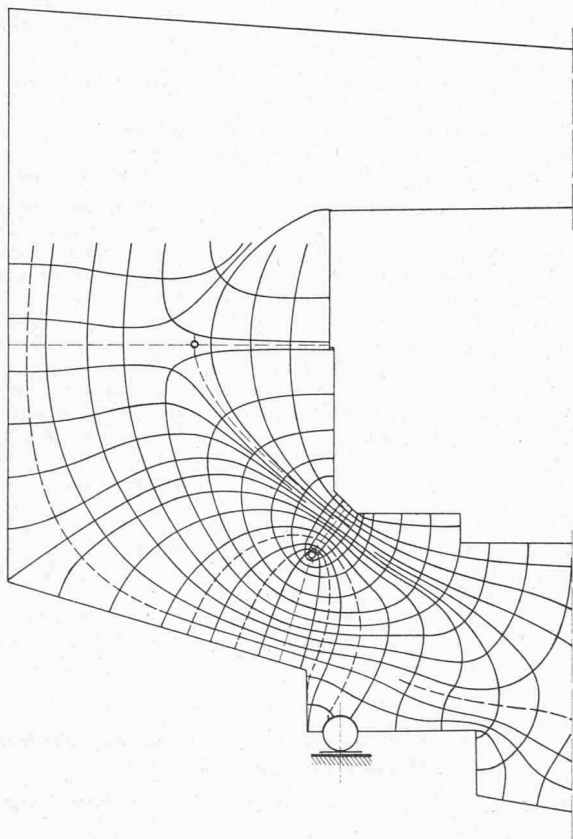


Fig. 6. — Modèle I : Trajectoires.

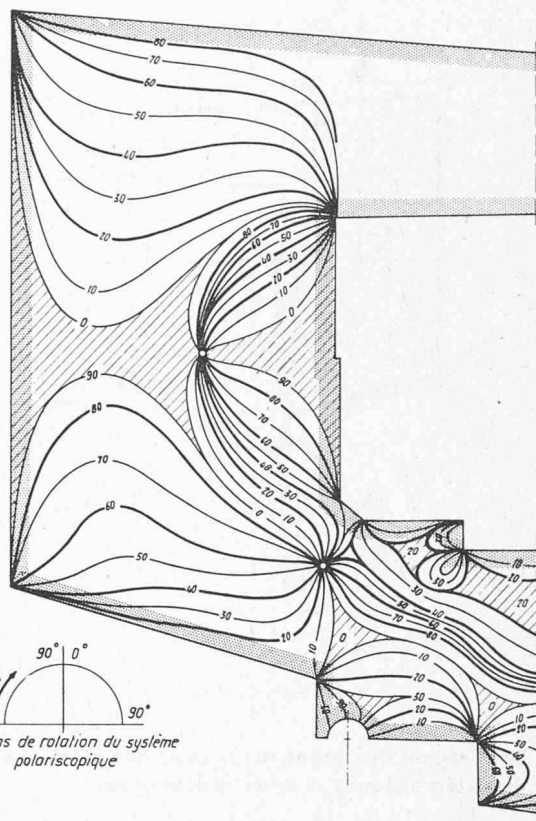


Fig. 5. — Modèle I : Lignes isoclines.

Le réseau des lignes isoclines, figure 5, est aussi peu habituel. C'est seulement dans la zone de l'avant-toit que ces lignes ont des formes connues. Nous distinguons à l'intérieur du modèle deux points singuliers situés dans la paroi porteuse. Ces points représentent des lieux où les contraintes tangentielles deviennent zéro, et les contraintes normales sont égales. Cela signifie que le cercle de Mohr devient un point et qu'aucune direction des contraintes principales n'est définie. Sur la base du réseau des lignes isoclines, nous pouvons sans difficulté construire les trajectoires, fig. 6. D'autre part, nous pouvons déterminer les trajectoires de traction ou de compression. A titre d'exemple, nous montrons sur la

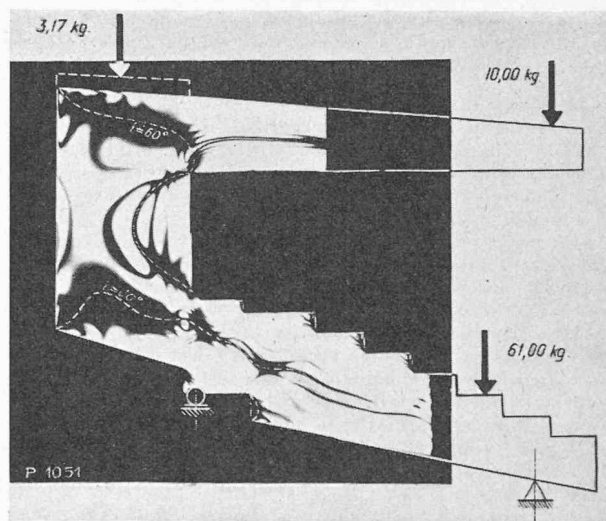


Fig. 7. — Modèle I : Ligne isocline  $i = 60^\circ$ .  
 Lumière blanche, polarisation linéaire.  
 Cas de charge : poids propre + surcharge.

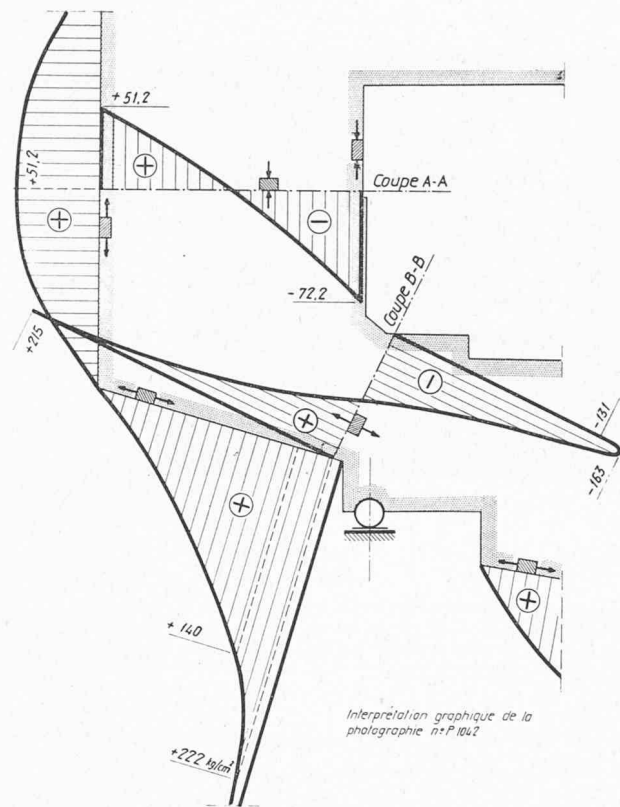


Fig. 8. — Modèle I: Contraintes en  $\text{kg/cm}^2$  sur l'ouvrage.  
 a) Contraintes parallèles aux bords (contraintes principales).  
 b) Contraintes normales dans les sections A-A et B-B.

figure 7 la reproduction d'une photographie d'une ligne isocline, qui se distingue plus nettement sur le négatif que sur le positif.

Pour transmettre les contraintes du modèle sur l'ouvrage, nous nous basons sur les lois de similitude. Elles sont traitées en détail dans de nombreuses publications<sup>1</sup>. Nous avons indiqué sur la figure 4 le facteur

<sup>1</sup> MÖNCH, I.: Die Ähnlichkeits- und Modellgesetze bei spannungsoptischen Versuchen. Z. angew. Phys., Bd. 1 (1949), S. 306, et d'autres.

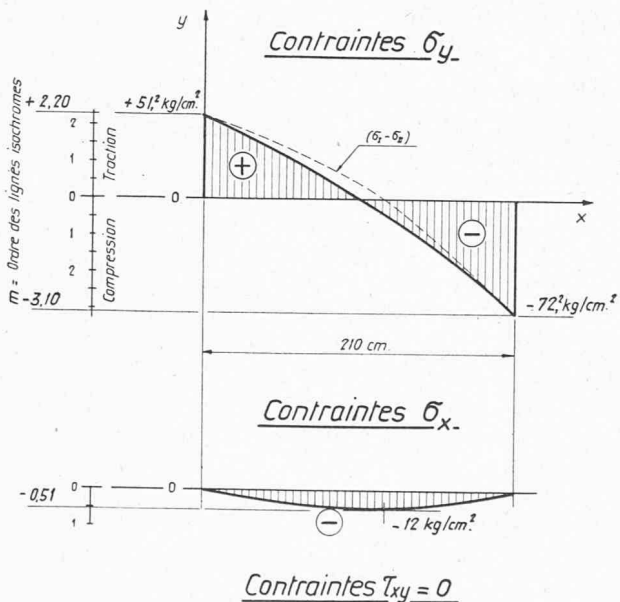


Fig. 9. — Modèle I, coupe A-A: Contraintes sur l'ouvrage.

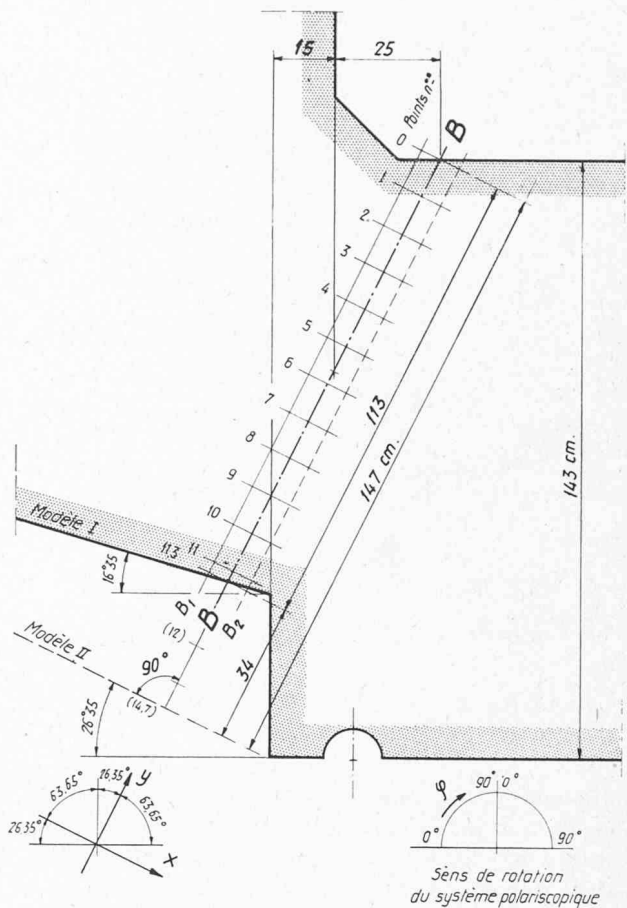


Fig. 10. — Modèle I, coupe B-B: Dimensions sur l'ouvrage.

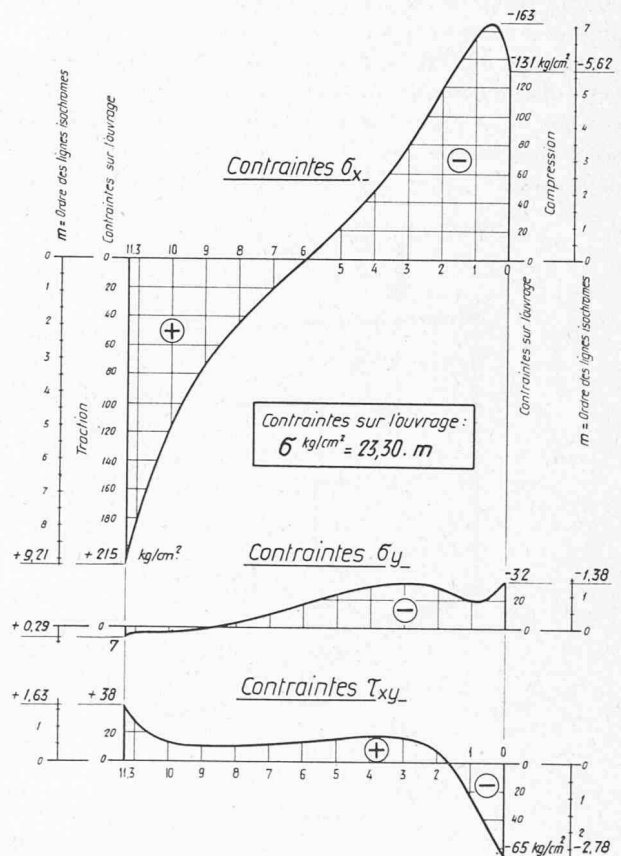


Fig. 11. — Modèle I, coupe B-B: Contraintes sur l'ouvrage.

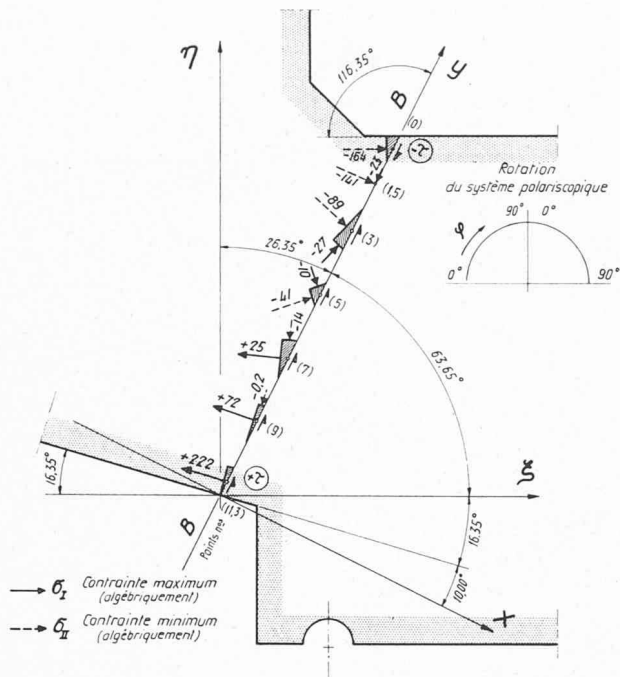


Fig. 12. — Modèle I, coupe B-B : Contraintes principales sur l'ouvrage.

multiplicatif qui permet de passer de la charge appliquée sur le modèle à la charge réelle sur l'ouvrage ; ceci permet d'obtenir des contraintes sur l'ouvrage en partant de numéros d'ordre des lignes isochromes.

La figure 8 nous donne les contraintes en kg/cm<sup>2</sup> sur le pourtour de l'ouvrage intéressant l'étude. En faisant abstraction de la pointe de contrainte, la traction sur le bord inférieur de la paroi porteuse devient + 222 kg/cm<sup>2</sup> près de l'angle rentrant.

Au cours de l'étude, il s'est révélé nécessaire de définir l'état de contrainte complet dans une section caractéristique de la paroi porteuse, section A-A, et dans une section de liaison entre la paroi porteuse et la poutre des gradins, section B-B. Pour ces deux sections, nous

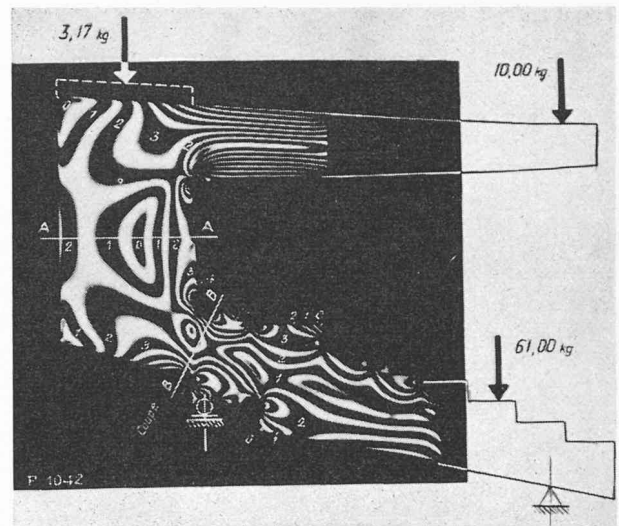


Fig. 14. — Modèle II : Lignes isochromes.  
( $\sigma I - \sigma III$ ) = const.

Lumière de sodium, polarisation circulaire.  
Cas de charge : poids propre + surcharges.  
Contraintes sur l'ouvrage :  $\sigma$  kg/cm<sup>2</sup> = 21,15 . m.  
m = ordre des lignes isochromes.

avons effectué un calcul plus complet. Les résultats de ce calcul sont représentés sur les figures 9 à 12.

Au vu de ces résultats, nous avons décidé d'examiner dans quelle mesure une légère modification des dimensions de la ferme, dans la partie située au-dessus de l'appui extérieur, pourrait améliorer l'état de contrainte dans cette partie. Cette modification comportait la suppression de l'angle rentrant de la paroi porteuse et l'exécution d'un gousset dans l'angle rentrant de la poutre des gradins (fig. 2).

Le plan de charge du modèle I modifié, modèle II, est représenté sur la figure 13. Le réseau des lignes isochromes est donné par la figure 14. Une comparaison des photographies des lignes isochromes des deux modèles (fig. 4 et 14), nous montre clairement la suppression des pointes de contrainte dans les deux angles

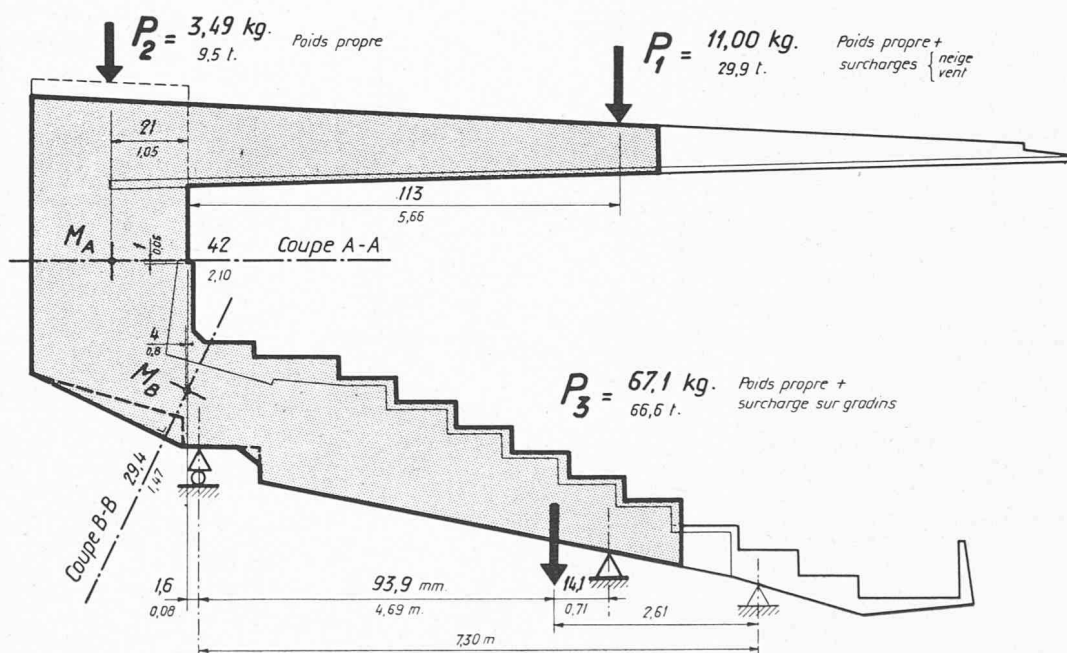


Fig. 13. — Modèle II : Plan de charges.

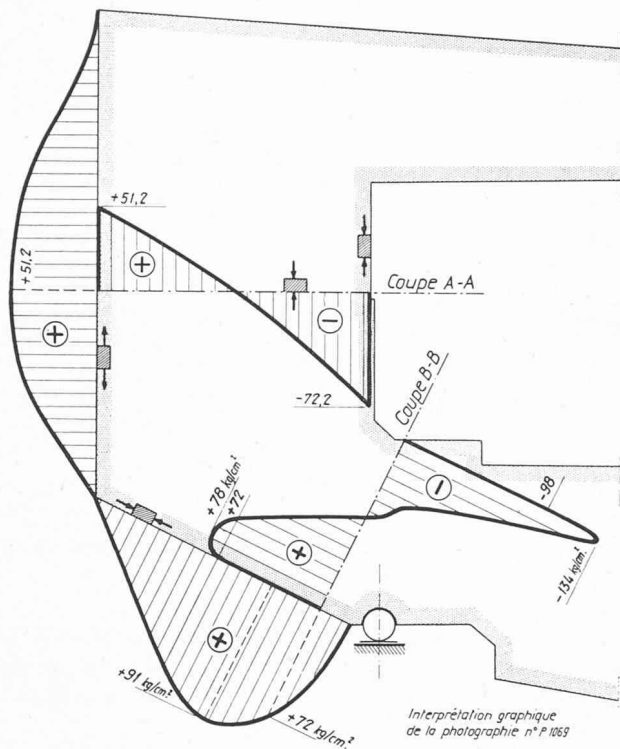


Fig. 15. — Modèle II : Contraintes en kg/cm<sup>2</sup> sur l'ouvrage.  
 a) Contraintes parallèles aux bords (contraintes principales).  
 b) Contraintes normales dans les sections A-A et B-B.

reentrants. Nous constatons aussi que les contraintes de traction sur le bord inférieur de la paroi porteuse ont fortement diminué et leur répartition est devenue nettement plus favorable (fig. 15). La contrainte de traction maximum de + 91 kg/cm<sup>2</sup> ne se trouve plus dans l'angle près de l'appui, mais est déplacée vers le centre du bord inférieur de la paroi porteuse. Les contraintes normales dans la section A-A n'ont subi aucune modification ; par contre, celles de la section B-B ont été nettement changées. Les valeurs extrêmes ont été fortement réduites. Les résultats du calcul de l'état de contrainte complet pour la section B-B sont indiqués sur les figures 16 et 17. Nous remarquons que les sollicitations de l'ouvrage dans la partie située au-dessus de l'appui extérieur sont devenues beaucoup plus favorables grâce à une petite augmentation de la section.

Toutefois, il paraissait encore intéressant d'examiner l'effet d'une précontrainte de la poutre des gradins dont la réalisation sur le modèle était relativement simple. Nous avons appliqué sur modèle deux forces égales en sens opposé. La figure 18, photographie des lignes isochromes, montre l'effet de la précontrainte. Après examen de la photographie, nous constatons que dans la coupe B-B la répartition des contraintes normales est à peu près linéaire, étant donné la distance sensiblement égale entre les lignes isochromes. D'autre part, l'image des lignes isoclines a montré que sur toute la largeur de la section, les contraintes principales s'orientent pratiquement parallèles à la direction définie par la force exerçant la précontrainte. De ce fait, le diagramme de contraintes normales  $\sigma_x$  sera très peu différent de celui de la différence de contraintes principales ( $\sigma_I - \sigma_{II}$ ). En effet, en planimétrant la surface du diagramme de ( $\sigma_I - \sigma_{II}$ ) pour effectuer un contrôle de l'effort normal de la section B-B, nous constatons un écart de 8 %. Nous

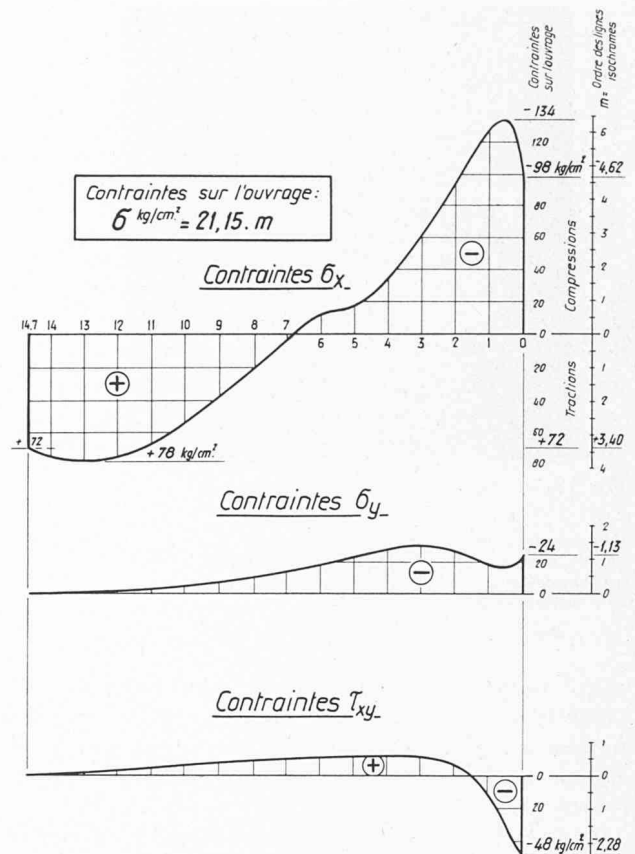


Fig. 16. — Modèle II, coupe B-B : Contraintes sur l'ouvrage.

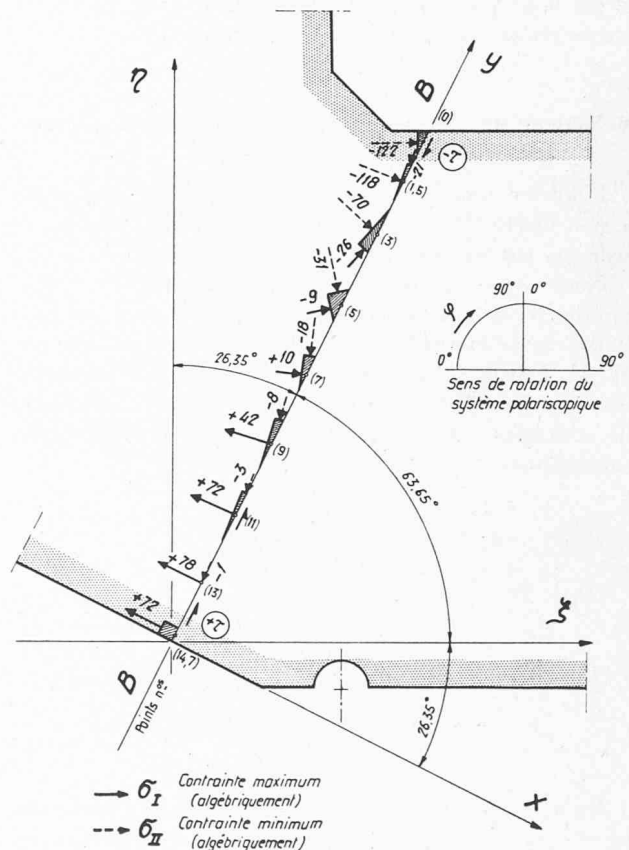


Fig. 17. — Modèle II, coupe B-B : Contraintes principales sur l'ouvrage.



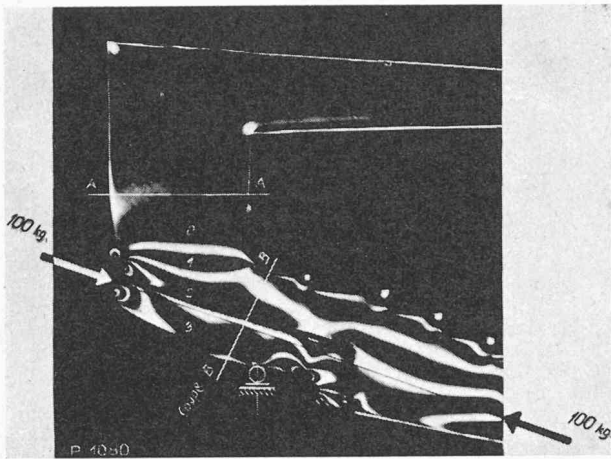


Fig. 18. — Modèle II : Lignes isochromes.  
( $\sigma_I - \sigma_{II}$ ) = const.

Lumière de sodium, polarisation circulaire.  
Cas de charge : précontrainte de la poutre des gradins.  
Contraintes sur l'ouvrage :  $\sigma_{kg/cm^2} = 23,30 \cdot m$ .  
 $m$  = ordre des lignes isochromes.

nous sommes donc bornés à ce calcul sommaire de l'état de contrainte. Nous remarquons aussi sur les photographies des zones entièrement occupées par l'isochrome d'ordre zéro, zones non sollicitées par la précontrainte.

Les résultats de cet essai sont reproduits sur la figure 19. Les diagrammes des contraintes montrent l'effet favorable de la précontrainte. La répartition des contraintes de compression sur le bord inférieur de la paroi porteuse est assez semblable au diagramme des contraintes de tractions dues au cas de charge normal. Il est donc possible de supprimer pratiquement toutes les tractions dans cette partie de l'ouvrage.

#### V. Calcul de l'état de contrainte pour des sections caractéristiques

Pour les deux modèles — modèles I et II — nous avons étudié l'état de contrainte complet dans deux sections caractéristiques, sections A-A et B-B.

Nous avons utilisé une méthode d'intégration graphique basée sur la différence de contraintes tangentielles. Cette méthode a été adaptée pour la pratique par M. M. Frocht<sup>2</sup>. Nous rappelons qu'elle est basée sur les équations différentielles d'équilibre dans un champ de contrainte situé dans un système de coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0$$

d'où

$$\sigma_y = \sigma_{y,0} - \int_0^y \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \cdot dy.$$

Il s'agit donc d'une méthode d'intégration à partir des points connus du pourtour. Sur la base des réseaux des

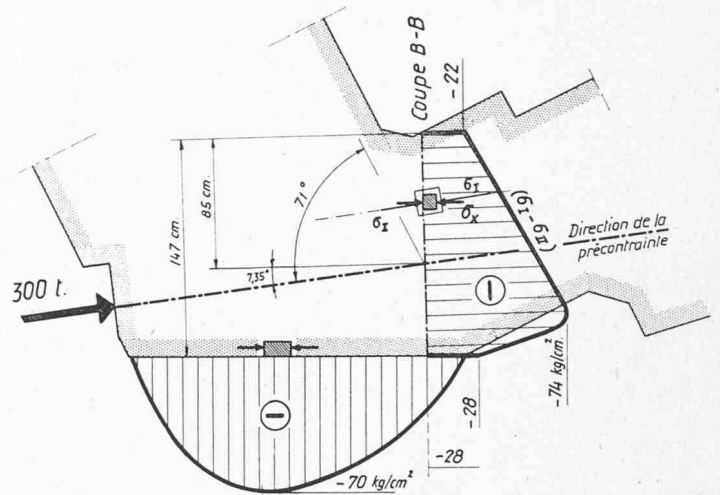


Fig. 19. — Modèle II : Contraintes dues à l'effet des câbles de précontrainte.

lignes isochromes et isoclines les valeurs de ( $\sigma_I - \sigma_{II}$ ) et de  $\varphi$  sont aussi connues à l'intérieur du champ de contrainte. Nous pouvons donc partout calculer facilement  $\tau_{xy}$ , en appliquant la formule

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2} (\sigma_I - \sigma_{II}) \sin 2\varphi.$$

Il est donc en principe possible de calculer en chaque point les termes  $\frac{\partial \tau}{\partial x}$  et  $\frac{\partial \tau}{\partial y}$ . Pour pouvoir déterminer les termes  $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$  avec suffisamment de précision nous effectuons un calcul par différences finies en prévoyant deux coupes auxiliaires (coupes B<sub>1</sub>-B<sub>1</sub> et B<sub>2</sub>-B<sub>2</sub>) parallèles à la coupe principale B-B, figure 10. L'intégration s'effectue le mieux par voie graphique.

A titre d'exemple, nous exposons brièvement la marche du calcul appliqué au modèle I. Le calcul de l'état de contrainte de la coupe A-A n'offre pas de difficultés particulières, étant donné que la direction de la coupe coïncide avec l'orientation O du système polariscopique.

Pour la coupe B-B, la direction de la coupe ne coïncide pas avec l'orientation du système polariscopique. En effet, elle est inclinée de 26,35° par rapport à la verticale (axe principal  $\eta$  du système polariscopique, système de coordonnées ( $\xi\eta$ )) (voir fig. 10 et 12). Pour obtenir les constantes d'intégration aux limites, c'est-à-dire aux bords extérieur et intérieur Pts (0) et (11,3), nous devons décomposer les contraintes principales suivant les axes du système de coordonnées ( $xy$ ) définis par la direction de la coupe. Les valeurs des contraintes principales dans ces points sont données par les lignes isochromes, le calcul des contraintes  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$  peut s'effectuer suivant les formules habituelles ou à l'aide d'un cercle de Mohr.

La première étape du calcul consiste à déterminer les contraintes tangentielles  $\tau_{xy}$  pour la coupe principale et les deux coupes auxiliaires. Pour cela, nous devons disposer des valeurs précises dans tous les points de calcul de la section. Pour cette raison, il est indiqué de reporter les valeurs ( $\sigma_I - \sigma_{II}$ ) et  $\varphi$  graphiquement, figure 20. L'orientation des contraintes principales dans le nouveau système de coordonnée est défini par l'angle  $\varepsilon$ . Pour une

<sup>2</sup> FROCHT, M. M. : *Photoelasticity*. John Wiley & Sons, Inc., New York, Vol. I : 1941 ; Vol. II : 1948.

direction quelconque de la coupe, cet angle se calcule selon la formule suivante :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varphi \pm \alpha \\ &= \varphi \pm \alpha + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

où  $\varepsilon$  = angle définissant la direction des contraintes principales dans le système de coordonnées  $(xy)$  ;  
 $\varphi$  = angle définissant la direction des contraintes principales par rapport à la verticale (ou horizontale) du système polariscopique (système de coordonnées  $\xi\eta$ ) ;  
 $\alpha$  = angle formé entre la verticale (axe  $\eta$  du système polariscopique et la direction de la coupe (axe  $y$ ) (voir fig. 12).

Ainsi, les contraintes  $\tau_{xy}$  sont déterminées d'après la formule :

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2} (\sigma_I - \sigma_{II}) \sin 2\varepsilon.$$

La deuxième étape du calcul consiste à déterminer les termes  $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}$  par différences finies et de calculer  $\sigma_y$  (fig. 21) :

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \sigma_{y,0} - \sum_0^n \frac{\Delta \tau_{xy}}{\Delta x} \cdot \Delta y \\ \Delta \sigma_y &= - \frac{\Delta \tau_{xy}}{\Delta x} \cdot \Delta y = - (\tau_{B_2} - \tau_{B_1}) \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Etant donné que les valeurs de  $\sigma_y$  sont connues dans le point (0), contrainte  $\sigma_{y,0}$ , et dans le point (11,3), contraintes  $\sigma_{y,11,3}$ , l'intégration peut être vérifiée. Pour effectuer ce calcul avec précision, nous devons introduire des valeurs moyennes de  $\Delta \tau$  sur la longueur du pas d'intégration. Avec une bonne approximation, nous pouvons utiliser les valeurs de  $\Delta \tau$  mesurées au milieu de  $\Delta y$ . D'autre part, il est pratique de choisir  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$ .

Enfin, la troisième étape est destinée au calcul des contraintes  $\sigma_x$ , soit par l'application du cercle de Mohr ou de l'équation suivante :

$$\sigma_x = \sigma_y \pm \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 - 4\tau_{xy}^2}.$$

Les résultats du calcul pour la coupe B-B sont graphiquement représentés sur les figures 11 et 12. La dernière nous montre également la définition des signes adoptés pour les contraintes tangentielles.

Dans la figure 11, les contraintes sont indiquées en  $\text{kg/cm}^2$  sur l'ouvrage et en numéro d'ordre des lignes isochromes, permettant de passer facilement de l'ouvrage au modèle.

Finalement, le tableau 1 nous donne les contraintes principales sur l'ouvrage et leur orientation à chaque point du calcul de la section considérée. La contrainte de compression maximum de  $-181 \text{ kg/cm}^2$  est atteinte au point (0,5), la contrainte de traction maximum de  $+222 \text{ kg/cm}^2$  au point (11,3).

Pour nous rendre compte de la précision de la méthode, nous avons procédé à un contrôle de l'équilibre entre les forces extérieure et intérieure.

TABLEAU 1

Coupe B-B  
Valeurs et directions des contraintes principales sur l'ouvrage

Point n°	$\sigma_I$ kg/cm <sup>2</sup>	$\sigma_{II}$ kg/cm <sup>2</sup>	$\varphi_{II}$ degrés
0	0	-164	+ 0
0,5	- 4	-181	+ 8
1	- 16	-160	+ 17
1,5	- 23	-141	+ 25
2	- 29	-122	+ 31
3	- 27	- 89	+ 42
4	- 18	- 59	+ 56
5	- 10	- 41	- 20
6	+ 6	- 25	+ 84,5
7	+ 25	- 14	+ 96
8	+ 47	- 6	+ 104
9	+ 73	- 0,2	+ 108
10	+ 116	+ 2	+ 110
11	+ 188	+ 0,5	+ 108
11,3	+ 222	0	+ 106,3

$\varphi_{II}$  = angle définissant la direction de la contrainte principale  $\sigma_{II}$  par rapport à l'horizontale.

Pour vérifier la précision du calcul des contraintes des sections A-A et B-B, nous avons établi l'équilibre sur le modèle entre les forces extérieure et intérieure en

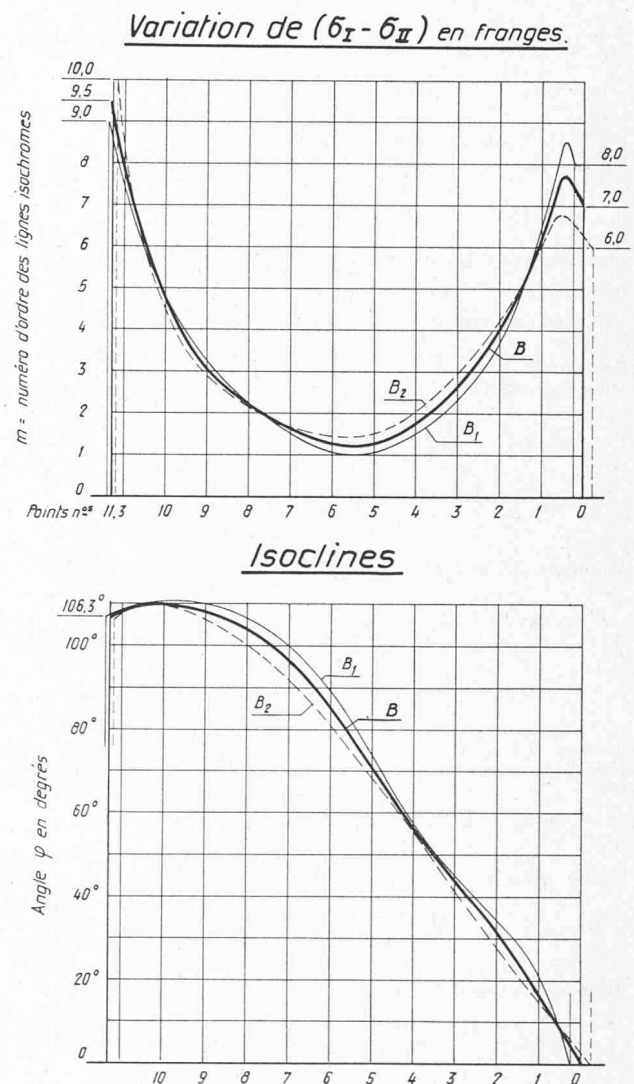


Fig. 20. — Modèle I, coupe B-B : Diagramme de variation du nombre d'ordre de lignes isochromes ( $m$ ) et du paramètre de lignes isoclines ( $\varphi$ ).

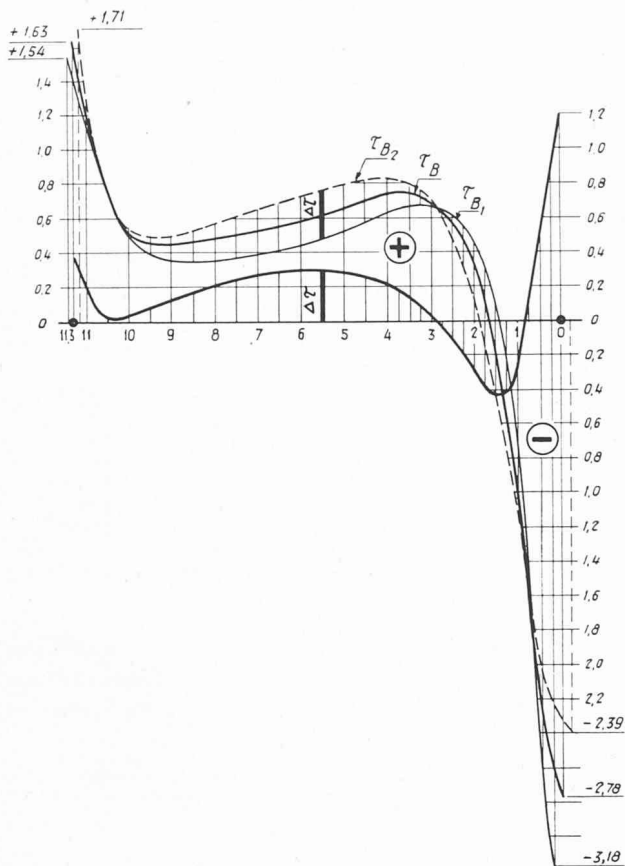


Fig. 21. — Modèle I, coupe B-B :  
Diagramme de contraintes  $\tau_{xy}$  et détermination graphique de  $\Delta\tau_{xy}$ .

planimétrant les surfaces des contraintes et en déterminant leurs centres de gravité. Les moments ont été calculés par rapport au centre de la section considérée.

#### Section A-A

Effort normal :

$$\begin{aligned}\Delta N &= \frac{N_{\text{ext}} - N_{\text{int}}}{N_{\text{ext}}} = \\ &= \frac{13,17 \text{ kg} - 12,70 \text{ kg}}{13,17} \cdot 10^{+2} = -3 \%\end{aligned}$$

Moments fléchissants :

$$\begin{aligned}\Delta M_A &= \frac{M_{\text{ext}} - M_{\text{int}}}{M_{\text{ext}}} = \\ &= \frac{134,0 \text{ kgcm} - 133,7 \text{ kgcm}}{134,0} \cdot 10^{+2} = -0,2 \%\end{aligned}$$

#### Section B-B

Effort normal :

$$\Delta N = \frac{+5,83 \text{ kg} - 6,10 \text{ kg}}{5,83} \cdot 10^{+2} = +4,6 \%$$

Effort tranchant :

$$\Delta T = \frac{+11,80 \text{ kg} - 11,90 \text{ kg}}{11,80} \cdot 10^{+2} = +0,8 \%$$

Moment fléchissant :

$$\Delta M_B = \frac{105,5 \text{ kgcm} - 106,5 \text{ kgcm}}{106,5 \text{ kgcm}} \cdot 10^{+2} = +0,9 \%$$

Des calculs semblables ont été effectués pour les coupes A-A et B-B du modèle II. Les essais ont montré que pour la coupe A-A, comme on pouvait s'y attendre, les contraintes ne sont pas modifiées par rapport à celles du modèle I (fig. 9). Les contraintes pour la coupe B-B sont résumées sur les figures 16. Grâce à l'augmentation de la section, les contraintes normales dans la coupe B-B sont devenues également beaucoup plus petites. Leur répartition est devenue également plus favorable. En effet, la contrainte de compression atteint son maximum de  $-141 \text{ kg/cm}^2$  au point (0,5) et la traction maximum de  $+78 \text{ kg/cm}^2$  s'établit au point (13). La figure 17 nous montre les contraintes principales et leurs directions pour la coupe B-B.

## VI. Résumé

L'exposé d'un essai de photoélasticité pour une ferme en béton précontraint du stade d'Yverdon nous donne un exemple de l'application pratique de la photoélasticité pour résoudre d'une manière précise des problèmes de contraintes à deux dimensions qui échappent aux méthodes du calcul conventionnel. La transmission des résultats du modèle sur l'ouvrage réel peut se faire avec une bonne précision. Le temps nécessaire pour interpréter des résultats d'essais par photoélasticité dépend du genre de l'ouvrage et surtout du nombre des cas de charge à considérer. De ce fait, ce temps est variable. Dans certains pays, les normes autorisent l'ingénieur à remplacer le calcul de résistance par les résultats d'essais de photoélasticité.

Généralement, les plus grandes sollicitations s'établissent aux pourtours de l'ouvrage. Il est donc en général suffisant pour un ouvrage avec structure métallique, de se borner à l'exploitation du réseau de lignes isochromes, travail qui peut s'effectuer très rapidement.

Pour les constructions en béton armé ou en béton précontraint, il est souvent nécessaire de calculer dans quelques sections déterminantes l'état de contraintes complet, pour pouvoir limiter les zones de traction et de compression. En appliquant une méthode d'intégration graphique basée sur la différence des contraintes tangentielles, utilisée dans cet exposé, ce travail peut être schématisé pour diminuer le temps des calculs nécessaires. Ce fait est appréciable, car souvent le constructeur ne dispose que de très peu de temps pour établir son projet d'exécution. Toutefois, dans beaucoup de cas, surtout si les charges appliquées ne sont pas très importantes, il sera suffisant de procéder à un relevé des lignes isoclines et de déterminer le réseau des trajectoires de traction et de compression. Ceci permet de déterminer la meilleure position des barres d'armatures.

L'exemple exposé montre que par une légère modification de la forme initialement prévue, l'état des sollicitations a pu être considérablement amélioré.

Ainsi utilisée, la photoélasticité représente, pour l'ingénieur, un moyen intéressant pour pouvoir prendre des décisions constructives.