

**Zeitschrift:** Bulletin technique de la Suisse romande  
**Band:** 90 (1964)  
**Heft:** 19: Association amicale des anciens élèves de l'École polytechnique de l'Université de Lausanne, Congrès mondial, Lausanne, 18-22 septembre 1964

**Artikel:** Nouvelle solution mathématique à la théorie des surfaces actives et passives  
**Autor:** Robert, Ph. / Vittoz, B.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-67001>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 21.12.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

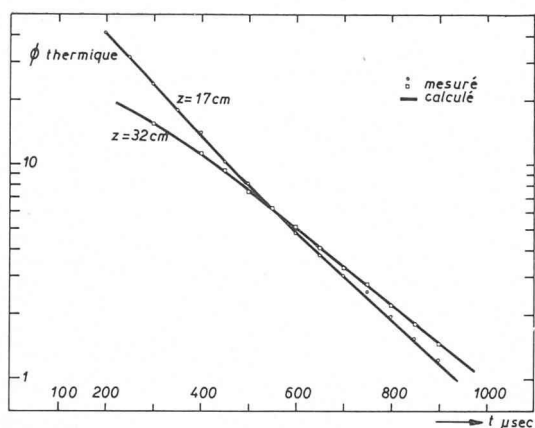


Fig. 2. — Variation du flux thermique en fonction du temps, en deux altitudes différentes.

Pour chaque harmonique d'indice  $n$ , la solution de (8) est de la forme :

$$T(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} \quad (9)$$

avec

$$r_2 = \frac{1}{2} \left[ -\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right)^2 + \frac{4(k_e - 1)}{l_1 l_2}} \right]$$

$r_2 \ll r_1 \ll 0$ .

Le terme  $e^{r_1 t}$  représente la variation du flux due aux neutrons prompts. La forme générale du flux, pendant cette variation, sera :

$$\phi(r, z, t) = J_0(\alpha r) \sum_n C_n \sin \gamma_n z e^{r_1 n t} \quad (10)$$

On vérifie que, dans notre géométrie, il n'y a qu'une harmonique radiale ; les coefficients  $C_n$  sont déterminés par les conditions initiales. En  $t = 0$ , le flux a la répartition stationnaire, due à une source de neutrons rapides

sous le cœur. Si la distribution radiale de la source de neutrons est en  $J_0(\alpha r)$ , le flux thermique stationnaire ne contient qu'une harmonique, et a la forme :

$$\phi_2(r, z) = E J_0(\alpha r) \left[ sh \beta (H - z) - \frac{sh \beta H}{sh \beta' H} sh \beta' (H - z) \right]. \quad (11)$$

$\beta$  et  $\beta'$  sont des constantes propres du cœur, que l'on peut mesurer lorsque le flux est stationnaire. Lorsque le régime stationnaire est supprimé par arrêt brusque de la source de neutrons, le flux décroît dans le temps selon la loi (10). Par raison de continuité, les fonctions (10) et (11) doivent représenter la même courbe au temps  $t = 0$ . On peut donc déterminer les  $C_n$  en analysant la fonction  $sh \beta (H - z) - \frac{sh \beta H}{sh \beta' H} sh \beta' (H - z)$  en série de Fourier des termes  $C_n \sin \gamma_n z$ .

On obtient :

$$C_n = sh \beta H \left( \frac{\gamma_n}{\beta^2 + \gamma_n^2} + \frac{\gamma_n}{\beta'^2 + \gamma_n^2} \right)$$

Les mesures ont été faites sur un cœur nu de 50 cm de diamètre et de 75 cm de hauteur, composé de 225 barres d'uranium enrichi à 0,96 % en U 235. Les courbes théoriques de variation de flux dans le temps ont été calculées avec les constantes données par le formulaire de Saclay sur les réseaux à eau légère (rapport CEA n° 807), puis mesurées à l'aide d'une source de neutrons pulsée Philips. Les résultats sont reportés sur la figure 2. On peut simplifier l'interprétation des mesures en plaçant le détecteur à un zéro de certaines harmoniques. Ainsi, un détecteur placé en  $z = \frac{H}{2}$  ne mesurera que les harmoniques impaires. La détermination expérimentale des coefficients  $r_{1n}$  permet de retrouver la réactivité du réseau, donc la taille qu'il faudrait lui donner pour le rendre critique.

## NOUVELLE SOLUTION MATHÉMATIQUE À LA THÉORIE DES SURFACES ACTIVES ET PASSIVES<sup>1</sup>

par Ph. ROBERT, ingénieur physicien EPUL, et B. VITTOZ, professeur EPUL, Laboratoire de génie atomique de L'EPUL

### 1. Introduction

Pour des raisons technologiques, la plupart des réacteurs atomiques sont du type hétérogène : le combustible est disposé selon un réseau, périodique ou non, et le modérateur occupe le volume du cœur laissé libre par le combustible. On peut aborder le calcul d'un tel réacteur de deux manières :

1° Au moyen d'une théorie dite homogène, dans laquelle on cherche à remplacer le milieu hétérogène combustible-modérateur par un milieu homogène équivalent, avant de lui appliquer une théorie de diffusion à plusieurs groupes de neutrons, par exemple.

2° En conservant au problème sa nature hétérogène, ce qui revient à traiter individuellement le combustible et le modérateur.

<sup>1</sup> Subside n° 2807 du Fonds national suisse de la Recherche scientifique.

La théorie des surfaces actives et passives [réf. 1], développée au Laboratoire de génie atomique, appartient à la seconde catégorie et le but de cet article est de présenter un procédé mathématique permettant d'appliquer cette méthode plus commodément dans certains cas. Mais rappelons tout d'abord les principes de base de la méthode.

Considérons un milieu multiplicateur hétérogène dans lequel les axes des éléments combustibles sont répartis sur des cylindres concentriques (fig. 1).

Pour calculer le comportement neutronique de ce milieu, on assimile chaque couronne d'éléments combustibles à une surface active cylindrique de rayon  $R_i$ . Il faut maintenant doter cette surface fictive de propriétés qui traduisent exactement la présence du combustible. En théorie, à deux groupes de neutrons il

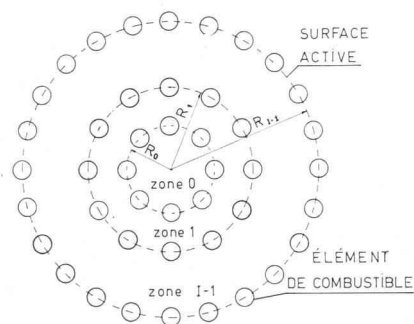


Fig. 1. — Configuration des barres d'uranium en  $I$  couronnes concentriques.

$R_0$  = rayon de la première couronne.  
 $R_{I-1}$  = rayon de la dernière couronne.

suffit de trois paramètres :  $\beta'_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\eta_2$  qu'on peut définir de la manière suivante :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \beta'_1 \varnothing_1 = \text{nombre net de neutrons rapides absorbés} \\ \text{par cm}^2 \text{ de surface active et par seconde.} \\ \text{(Compte tenu des fissions rapides)} ; \\ \beta_2 \varnothing_2 = \text{nombre de neutrons thermiques absorbés} \\ \text{par cm}^2 \text{ de surface active et par seconde ;} \\ \eta_2 = \frac{\text{nombre de neutrons émis à la suite de} \\ \text{fissions thermiques}}{\text{nombre de neutrons thermiques absorbés}} \end{array} \right.$$

En introduisant un facteur  $\psi$  représentant la « concentration » de barres sur une couronne, l'expérience confirme qu'on peut garder  $\beta'_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\eta_2$  comme des caractéristiques indépendantes du nombre de barres sur chaque couronne (dans des limites raisonnables), et du nombre de couronnes. Ces paramètres caractérisent donc bien le combustible lui-même. Les calculs relatifs au modérateur se trouvant entre les surfaces actives, basés sur la théorie de la diffusion, ne demandent pas de commentaires particuliers.

## 2. Equations des flux de neutrons

En théorie de diffusion à deux groupes de neutrons, pour un milieu multiplicateur sous-critique, les équations des flux rapides et thermiques s'écrivent, dans chaque zone d'indice  $i$  :

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \varnothing_{1i} = \{ A_{1i} I_0(\alpha_{1i} r) + C_{1i} K_0(\alpha_{1i} r) \} e^{-\gamma z} \\ \varnothing_{2i} = S_{3i} \varnothing_{1i} + \{ A_{2i} I_0(\alpha_{2i} r) + C_{2i} K_0(\alpha_{2i} r) \} e^{-\gamma z} \end{array} \right.$$

Les coefficients  $A_{1i}$ ,  $C_{1i}$ ,  $A_{2i}$ ,  $C_{2i}$  ( $A$ ,  $C$  pour simplifier l'écriture) sont déterminés par les conditions de couplage de flux et de courants sur chaque couronne :

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} \varnothing_{1i}(r = R_i) = \varnothing_{1(i+1)}(r = R_i) \\ J_{1i}^{\text{net}} + S_{fi} = J_{1(i+1)}^{\text{net}} \end{array} \right.$$

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} \varnothing_{2i}(r = R_i) = \varnothing_{2(i+1)}(r = R_i) \\ J_{2i}^{\text{net}} - \mathcal{A}_i = J_{2(i+1)}^{\text{net}} \end{array} \right.$$

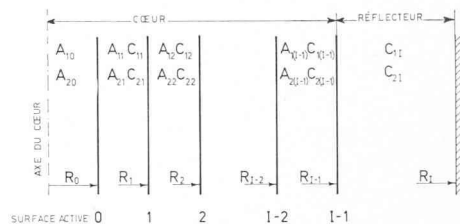


Fig. 2. — Coefficients des répartitions du flux rapide et du flux thermique, dans les différentes zones.

$S_{fi}$  représente la source de neutrons rapides constituée par 1 cm<sup>2</sup> de surface active ;

$\mathcal{A}_i$  représente le taux d'absorption de neutrons thermiques relatif à 1 cm<sup>2</sup> de surface active.

Les définitions (1) permettent en effet de considérer formellement que les surfaces actives produisent des neutrons rapides et n'absorbent que des neutrons thermiques, sans pour autant négliger les absorptions de résonances et les fissions rapides.

Considérons maintenant une coupe du réacteur par un plan vertical passant par l'axe du cœur et supposons que le modérateur est le même dans chaque zone et dans le réflecteur. Pour permettre une vérification sur l'Assemblage sous-critique de l'EPUL nous prenons l'eau légère comme modérateur et l'oxyde d'uranium faiblement enrichi comme combustible (fig. 2).

Le calcul des coefficients  $A$  et  $C$  nécessite la connaissance préalable, pour chaque zone  $i$  des facteurs :

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{1i}, \alpha_{2i} : \text{laplaciens radiaux dans l'eau légère ;} \\ D_{1i}, D_{2i} : \text{coefficient de diffusion de l'eau légère ;} \\ S_{3i} : \text{coefficient de couplage des flux rapides} \\ \text{et thermiques ;} \end{array} \right.$$

et  $\gamma$  laplacien axial (identique dans toutes les zones).

Si l'on suppose les facteurs (5) identiques dans toutes les zones (cas idéal où le volume des barres de combustible tend vers zéro), on peut trouver des règles de récurrence permettant un calcul assez simple des coefficients  $A$  et  $C$ . Ce procédé donne de bons résultats si, dans chaque cellule cylindrique, le volume occupé par le combustible est faible en regard du volume du modérateur. Dans le cas où deux couronnes ont des rayons relativement voisins, le volume réel du modérateur, compte tenu de la présence du combustible, s'écarte trop du volume théorique, compris entre les deux surfaces actives. Il en résulte un « défaut de modulation » dont il faut tenir compte. Cette correction est d'autant plus importante que le réseau est déjà sous-modéré localement. Par contre, la différence entre les propriétés diffusantes de l'eau légère et de l'oxyde d'uranium pour des neutrons déjà thermalisés ne justifie pas une correction des constantes nucléaires thermiques du modérateur.

## 4. Correction des constantes rapides du modérateur

Le volume réel du modérateur étant plus faible que le volume théorique, on adopte des constantes macroscopiques  $\Sigma_1$  et  $L_1^2$  correspondant à un modérateur de

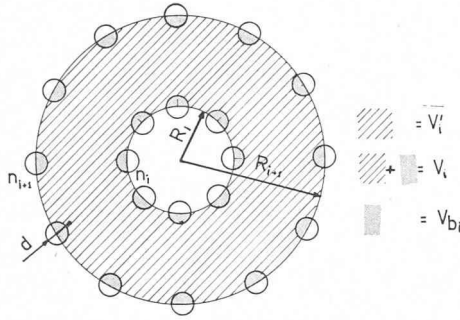


Fig. 3. — Répartition du combustible dans une zone pour l'étude du défaut de modération.

$n_i$  = nombre de barres sur la couronne  $i$ .  
 $V_i$  = volume total de la zone.  
 $V_i'$  =  $V_i - V_{bi}$  = volume réel du modérateur.  
 $V_{bi}$  = volume du combustible dans la zone.

densité fictive plus petite que la densité réelle, selon le rapport  $V_i'/V_i$ , défini par la figure 3.

$$(6) \quad \frac{V_i'}{V_i} = \frac{V_i - V_{bi}}{V_i} \quad \text{où} \quad V_i = \pi (R_{i+1}^2 - R_i^2)$$

$$V_{bi} = \frac{\pi d^2}{4} \left( \frac{n_i}{2} + \frac{n_{i+1}}{2} \right).$$

Cela revient à considérer que le combustible n'est absolument pas modérateur. Cette approximation est très bonne dans le cas d'un modérateur hydrogéné, comme l'eau légère.

On peut donc poser :

$$L_{1i} = L_1 \frac{V_i}{V_i'}$$

$$D_{1i} = D_1 \frac{V_i}{V_i'}$$

$L_1$  et  $D_1$  étant les valeurs relatives à l'eau légère. On peut maintenant calculer les  $\alpha_{1i}$  et  $S_{3i}$  par les relations classiques

$$\alpha_{1i}^2 = \frac{1}{L_{1i}^2} - \gamma^2$$

$$S_{3i} = \frac{D_{1i}/D_2 \cdot L_{1i}^2}{1/L_2^2 - 1/L_{1i}^2}$$

#### 4. Calcul des coefficients A et C

Occupons-nous d'abord des coefficients A et C relatifs au flux rapide. Sur chaque couronne, les couplages de flux et courants rapides donnent des équations du type

$$(8) \quad \begin{cases} a_{1i} A_{1i} + b_{1i} C_{1i} + c_{1i} A_{1(i+1)} + d_{1i} C_{1(i+1)} = e_{1i} \\ a'_{1i} A_{1i} + b'_{1i} C_{1i} + c'_{1i} A_{1(i+1)} + d'_{1i} C_{1(i+1)} = e'_{1i} \end{cases}$$

où :

$$\begin{aligned} a_{1i} &= I_0 (\alpha_{1i} R_i) \\ b_{1i} &= K_0 (\alpha_{1i} R_i) \\ c_{1i} &= -I_0 (\alpha_{1(i+1)} R_i) \\ d_{1i} &= -K_0 (\alpha_{1(i+1)} R_i) \\ e_{1i} &= 0 \\ a'_{1i} &= D_{1i} \alpha_{1i} I_1 (\alpha_{1i} R_i) \\ b'_{1i} &= -D_{1i} \alpha_{1i} K_1 (\alpha_{1i} R_i) \\ c'_{1i} &= -D_{1(i+1)} \alpha_{1(i+1)} I_1 (\alpha_{1(i+1)} R_i) \\ d'_{1i} &= D_{1(i+1)} \alpha_{1(i+1)} K_1 (\alpha_{1(i+1)} R_i) \\ e'_{1i} &= S_{fi} \end{aligned}$$

En écrivant le système (8) sur les  $I$  couronnes, on obtient  $2I$  équation à  $3I + 2$  inconnues : les  $A_{1i}$ ,  $C_{1i}$ ,  $S_{fi}$ . Mais le flux rapide,

- 1° reste fini au centre du réacteur ( $r = 0$ ) d'où  $C_{10} = 0$  ;
- 2° s'annule en  $r = R_I$  (frontière du réacteur). Dans l'eau légère un réflecteur de 80 cm seulement peut être considéré comme infini d'où  $A_{1I} = 0$ .

Il reste encore à déterminer  $I$  inconnues d'une manière indépendante et nous allons voir qu'une méthode itérative permet de présenter les calculs d'une manière bien adaptée à la résolution du problème par calculatrice électronique digitale. En effet, si l'on pose arbitrairement  $S_{fi} = 1$ , le système (8) devient soluble. Les  $A_{1i}$  et  $C_{1i}$  calculés de cette manière seront inexacts, mais il faut remarquer que la matrice des coefficients des  $A_{1i}$  et  $C_{1i}$  est indépendante de la valeur des  $S_{fi}$ . Or c'est la formation et la triangulation de cette matrice qui prend la majeure partie du temps nécessaire à la résolution du système (8). Donc, si l'on trouve une loi permettant, à partir des  $A_{1i}$ ,  $C_{1i}$  précédemment calculés, de trouver une meilleure approximation des  $S_{fi}$ , les nouveaux  $A_{1i}$ ,  $C_{1i}$  seront très rapidement recalculés. Si la valeur de  $S_{fi}$  converge rapidement, le temps nécessaire à la résolution du système restera très raisonnable.

#### 4. Recherche d'une loi d'itération

Appelons  $A_{1i}^j$  et  $C_{1i}^j$  les valeurs des coefficients  $A_{1i}$  et  $C_{1i}$  après la  $j^{\text{ième}}$  itération. On a vu comment calculer  $A_{1i}^0$  et  $C_{1i}^0$ , ce qui détermine une première approximation du flux rapide  $\varphi_{1i}^0$ . Occupons-nous maintenant du flux thermique. Les équations de couplage des flux et courants thermiques conduisent à un système d'équation analogue au système (8). La matrice des coefficients de  $A_{2i}$ ,  $C_{2i}$  est identique à celle des coefficients de  $A_{1i}$ ,  $C_{1i}$ , à ce détail près que les  $\alpha_{1i}$  et  $D_{1i}$  sont remplacés par  $\alpha_{2i}$  et  $D_{2i}$ . Il est donc inutile de l'écrire ici. Seuls les termes connus sont différents. On a :

$$(9) \quad \begin{cases} e_{2i} = (S_{3(i+1)} - S_{3i}) \varphi_{1i} \\ e'_{2i} = S_{3(i+1)} \cdot D_{2(i+1)} \left( \frac{\partial \varphi_{1(i+1)}}{\partial r} \right)_{r=R_i} - \\ \quad - S_{3i} D_{2i} \left( \frac{\partial \varphi_{1i}}{\partial r} \right)_{r=R_i} - \mathcal{Q}_i \end{cases}$$

Les valeurs de  $e_{2i}$  et  $e'_{2i}$  sont entièrement déterminées par l'approximation correspondante de  $\varphi_{10}^j$ .

En effet, la connaissance du flux rapide permet de calculer le taux d'absorption des neutrons thermiques. En vertu des définitions (1) on peut écrire :

$$(10) \quad \alpha_i^j = \frac{S_{fi}^j + \beta_1' \psi_i \varphi_{1i}^j}{\eta_2}$$

D'autre part,  $A_{1i}$  et  $C_{1i}$  déterminent également les dérivées du flux rapide. On peut donc calculer les coefficients  $A_{2i}$  et  $C_{2i}$ , et connaître les flux thermiques dans chaque zone  $i$ . Le coefficient  $\beta_2$  détermine alors le taux d'absorption des neutrons thermiques, d'une manière indépendante de l'équation (10), par la relation :

$$\alpha_i^{j*} = \beta_2 \psi_i \varphi_{2i}^j.$$

D'une façon générale, on trouvera

$$(11) \quad \alpha_i^{j*} - \alpha_i^j \neq 0$$

et l'équation (11) donne une mesure de l'erreur commise dans le choix de  $S_{fi}$ . Une meilleure approximation de  $S_{fi}$  pourra se calculer par une relation du type :

$$S_{fi}^{j+1} = S_{fi}^j + \theta (\alpha_i^{j*} - \alpha_i^j)$$

où  $\theta$  est un paramètre permettant d'accélérer la convergence de  $S_{fi}^j$ .

### Conclusions

Des essais préliminaires ont montré qu'on pouvait obtenir une convergence rapide de  $S_{fi}$  (trois itérations pour un milieu multiplicateur de quatre couronnes). Cette méthode est donc préférable à la méthode analytique quand chaque zone a des propriétés nucléaires différentes.

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] CH. MANDRIN : *Exponential and Critical Experiments*, Vol. 1, p. 403-443. Agence internationale de l'Energie atomique (Vienne, 1964).

OKA 223.61/0.62

# LA DÉTERMINATION DES PARAMÈTRES DU RALENTISSEMENT ET DE LA DIFFUSION DES NEUTRONS DANS UN MODÉRATEUR AU MOYEN D'UNE SOURCE PULSANTE <sup>1</sup>

par E. RUTGERS, ingénieur physicien EPUL, Laboratoire de génie atomique EPUL

## 1. Introduction et résumé

L'observation de l'évolution dans le temps de la population de neutrons d'un réacteur peut fournir des renseignements sur ses qualités neutroniques. On sait par exemple que la période stable est directement reliée à la réactivité.

Dans les assemblages sous-critiques, l'établissement de régimes cinétiques intéressants, c'est-à-dire se prêtant relativement bien à une description théorique, devint possible il y a une dizaine d'années avec la mise au point, dans des exécutions assez réduites, des générateurs de neutrons pulsants.

Le but du travail que nous décrivons est d'établir une méthode cinétique de mesure, faisant appel à l'emploi d'une source pulsante, qui donne le plus grand nombre de renseignements possible sur les propriétés neutroniques d'un modérateur pur. L'exposé de la méthode est suivi d'une application à l'étude de l'eau légère à 20°C.

## 2. La description théorique de l'expérience

Le modèle théorique doit être assez schématique et simple pour être accessible au calcul et assez juste pour permettre la prévision des phénomènes physiques avec la précision désirée. Nous proposons l'essai de la théorie élémentaire de la diffusion à deux groupes de

neutrons, nous fondant sur les résultats satisfaisants qu'elle donne en régime stationnaire. Dans le paragraphe 5 on trouvera un aperçu des difficultés qu'on rencontre en cherchant à appliquer la théorie de l'âge à la description de régimes non stationnaires.

Rappelons les équations cinétiques de la diffusion dans un modérateur en théorie à deux groupes :

$$(1a) \quad \nabla^2 \varphi_1(\vec{r}; t) - \frac{1}{L_1^2} \varphi_1(\vec{r}; t) = \frac{1}{v_1 D_1} \frac{\partial \varphi_1(\vec{r}; t)}{\partial t}$$

$$(1b) \quad \nabla^2 \varphi_2(\vec{r}; t) - \frac{1}{L_2^2} \varphi_2(\vec{r}; t) + \frac{\Sigma_1}{D_2} \varphi_1(\vec{r}; t) = \frac{1}{v_2 D_2} \frac{\partial \varphi_2(\vec{r}; t)}{\partial t}$$

Les indices 1 et 2 caractérisent respectivement les neutrons rapides et thermiques. La longueur de ralentissement  $L_1$ , la longueur de diffusion  $L_2$ , les sections efficaces  $\Sigma_i$ , les coefficients de diffusion  $D_i$  et les vitesses moyennes  $v_i$  sont des constantes.

Ce système d'équations possède des solutions plus ou moins compliquées suivant la nature des conditions aux

<sup>1</sup> Subside n° 2807 du Fonds national suisse de la Recherche scientifique.