Le calcul des déformations des systèmes articulés hyperstatiques

Autor(en): **Ansermet, A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin technique de la Suisse romande**

Band (Jahr): **90 (1964)**

Heft 19: **Association amicale des anciens élèves de l'École polytechnique de l'Université de Lausanne, Congrès mondial, Lausanne, 18-22 septembre 1964**

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-67009

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

tore en ferrite, les courbes pour les fréquences entre 800 et 4000 Hz ne se distinguent guère. Ainsi on n'a porté dans le diagramme que les valeurs pour $f = 800$ Hz.

La figure 5 montre la variation de la perméabilité et de l'angle de pertes de ces trois bobines et de deux bobines à pot ferrite avec entrefer en fonction de la température. Les mesures ont été faites à 800 Hz et pour un champ faible, c'est-à-dire pour un champ beaucoup plus faible que la force coercitive du noyau étudié. Pour la perméabilité, on a porté dans le diagramme des valeurs relatives en mettant la perméabilité à 0°C égale 100 %.

On peut tirer de ces premières mesures la règle générale, qu'une baisse de la température a pour conséquence une baisse de la perméabilité et pour les noyaux en ferrite une augmentation de l'angle de pertes. Mais ces variations sont très différentes d'une matière à l'autre. Tandis que les caractéristiques du noyau comprimé et de l'isoperm ne changent que peu jusqu'à —180°C, ceux du ferrite changent fortement [1]. Mais retenons que les perméabilités initiales à température ambiante des deux premiers sont relativement faibles (env. 140, resp. 90) mais celle du ferrite beaucoup plus élevée (env. 2500).

Comme nous l'avons dit plus haut, nos mesures n'ont fait que commencer. D'autres matériaux sont déjà à l'étude et des mesures à plus basses températures (hydrogène liquide) sont en préparation. Nous en reparlerons dans un exposé ultérieur.

Je ne voudrais pas manquer de remercier ici la Fondation Hasler, qui a mis le « nervus rerum » à disposition, nous permettant ces études ; les Câbleries et Tréfileries de Cossonay, qui ont fourni les bobines ; le Laboratoire du génie atomique de l'EPUL, professeur Vittoz, qui nous a livré l'azote liquide, et mes collaborateurs, MM. P. Tacier et Ph. Zyromsky, étudiants, qui ont effectué ces mesures.

[1] J. Rozes : Etudes des variations en fonction de la fréquence des caractéristiques électriques et magnétiques d'une ferrite de nickel-zinc. *Câbles et transmissions* 13 (1959) 1, p. 26.

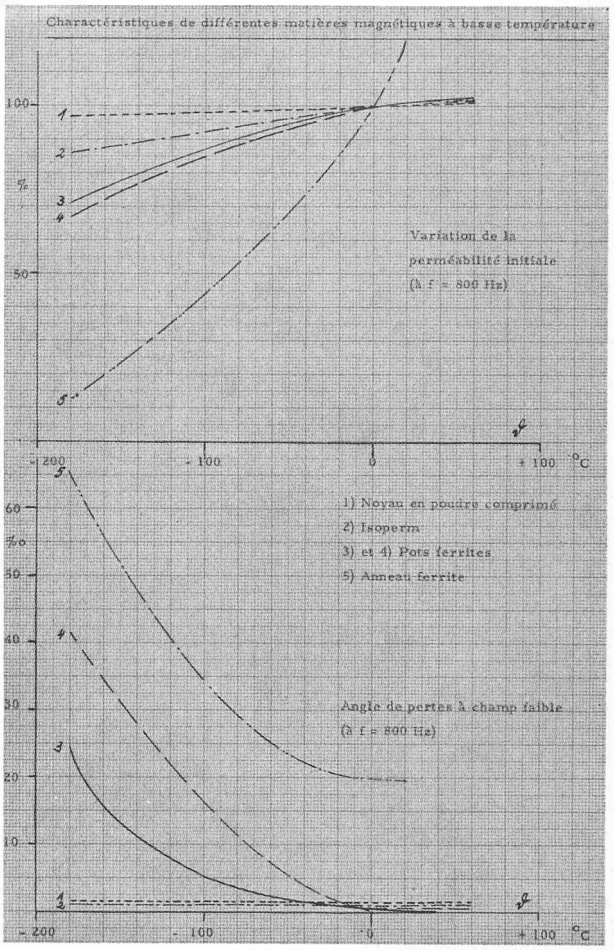


Fig. 5. — Perméabilité et angle de pertes en fonction de la température pour différentes matières magnétiques à $f = 800$ Hz et à champs faibles.

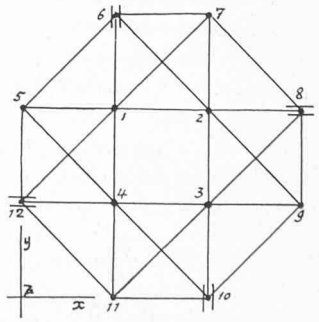
LE CALCUL DES DÉFORMATIONS DES SYSTÈMES ARTICULÉS HYPERSTATIQUES

par A. ANSERMET, ingénieur, professeur

Le *Bulletin technique* a déjà consacré quelques pages à ce problème mais les exemples traités étaient simples. Grâce à l'appui accordé à titre bénévole par le centre de calcul électronique de l'EPUL (Prof. Blanc), il est possible de porter son choix sur des structures plus compliquées. La résolution de systèmes linéaires et surtout l'inversion de matrices ne donnent plus lieu à des calculs laborieux.

L'exemple choisi est inspiré par la thèse de Yung mais en ajoutant des barres surabondantes, ce qui confère au problème un tout autre caractère. C'est une coupole d'après Zimmermann (Reichstag), les dimensions étant ici un peu différentes. Certains ingénieurs, outre-Rhin, ont fait remarquer l'analogie existant avec le calcul de réseaux radiotélémétriques ; les mêmes formules et équations sont applicables en principe, circonstance bienvenue.

Nœuds	x	y	z
1	1	2	1
2	2	2	1
3	2	1	1
4	1	1	1
5	0	2	0
6	1	3	0
7	2	3	0
8	3	2	0
9	3	1	0
10	2	0	0
11	1	0	0
12	0	1	0



L'unité de mesure est arbitraire : 10, 12, 15... mètres. Toutes les valeurs sont positives à cause du choix des axes de coordonnées.

Par hypothèse il y a 12 liaisons simples ([5] p. 59)

$$dz_1 = dz_2 = dz_3 \ldots\ldots = dz_8 = 0$$
$$dx_6 = dx_{10} = 0 \qquad dy_8 = dy_{12} = 0$$

Admettons de plus que, par voie graphique ou analytique (voir [5]), l'état fondamental (Grundsystem, voir [7]), est calculé ; les forces de remplacement pour les barres coupées sont arbitraires (1^T par exemple). Cette étape du calcul ne donne lieu à aucun commentaire ; elle fournira les termes absolus des équations aux déformations f. Celles-ci peuvent revêtir deux formes pour une barre d'indice i reliant les nœuds g et h :

$$(1) \qquad \begin{gathered} v_i = a_i\,(\delta x_g - \delta x_h) + b_i\,(\delta y_g - \delta y_h) + c_i\,(\delta z_g - \delta z_h) \\ (a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1) \end{gathered}$$

v_i étant l'allongement ou le raccourcissement de la barre ; c'est la solution de B. Mayor qui ne se prête pas au calcul de la dérivée de l'énergie ; l'éminent professeur a suivi une autre voie.

Dérivées du travail ou de l'énergie

Choix des variables

A la base du calcul on a la condition :

$$(2) \qquad \sum \left\{ \frac{ES}{2l} \left(\frac{Tl}{ES} \right)^2 \right\} = \text{minimum} = \Sigma\,(pv^2) = [pvv]$$

où E est le module d'élasticité, S la section transversale et l la longueur de la barre, T l'effort axial. Les poids p sont proportionnels à $\frac{ES}{l}$.

Pour certains auteurs, il n'y a guère qu'une solution : former les dérivées de l'énergie par rapport aux inconnues hyperstatiques X_1, X_2, X_3... ; d'autres auteurs formulent des réserves (voir [6]), surtout si le degré d'hyperdétermination est élevé. Une solution qui a fait ses preuves en télémétrie consiste à former les dérivées de $[pvv]$ par rapport aux variations de coordonnées figurant dans l'équation :

(3)

$$v_i = f_i + a_i\,(dx_g - dx_h) + b_i\,(dy_g - dy_h) + c_i\,(dz_g - dz_h).$$

Pour le calcul des déformations, les avantages sont manifestes. Le nombre des dérivées ne sera en général pas le même dans les deux solutions. Remarquons enfin que, dans le système (3), on pourrait éliminer les variations dx, dy, dz...

En d'autres termes, l'état fondamental, caractérisé par la valeur $[pff] \geqq [pvv]$, est initial pour la variation des coordonnées des nœuds. Ce mode de calcul est depuis longtemps courant pour les réseaux géodésiques ; il a fait ses preuves. Les coordonnées varient à partir d'une solution appelée en général « provisoire ».

Le tableau ci-contre fournit les coefficients des équations (3) ; on pourrait les déterminer graphiquement (géométrie cotée). Le nombre de barres pourrait être plus élevé ainsi que le degré d'hyperdétermination. Autrefois le nombre d'équations normales jouait un grand rôle pour le choix des variables ; grâce au calcul

Tableau des coefficients a_i, b_i, c_i

Barres	dx_1	dy_1	dz_1	dx_2	dy_2	dz_2	dx_3	dy_3	dz_3	dx_4	dy_4	dz_4	dx_5	dy_5	dy_6	dx_7	dy_7	dx_8	dx_9	dy_9	dy_{10}	dx_{11}	dy_{11}	dx_{12}
1-2	−1			+1																				
2-3					+1			−1																
3-4		+1					+1			−1														
4-1	+0,707		+0,707								−1													
1-5		−0,707	+0,707		−0,707								−0,707											
1-6															+0,707									
2-7				+0,707		+0,707											+0,707							
2-8				+0,707		+0,707												+0,707						
3-9							−0,707		+0,707										+0,707					
3-10								+0,707	+0,707												−0,707			
4-11											+0,707	+0,707											−0,707	
4-12										+0,707														
1-7	−0,577	−0,577	+0,577		−0,577	+0,577										+0,577	+0,577							
2-6				+0,577		+0,577									+0,577					−0,577				
2-9				+0,577	+0,577	+0,577	−0,577	−0,577	+0,577									+0,577						
3-8							+0,577	+0,577	+0,577									+0,577						
3-11											+0,577	+0,577									−0,577		−0,577	
4-10										−0,577	+0,577	+0,577												
4-5										+0,577	−0,577	+0,577												
1-12	+0,577	+0,577	+0,577										−0,577	+0,577										−0,577
5-6													−0,707	−0,707	+0,707									
6-7																+1 −0,707	+0,707							
7-8																	+0,707	+0,707						
8-9																			+0,707	−1 +0,707				
9-10																					−0,707		−0,707	
10-11																						−1 +0,707		
11-12																							−0,707	−0,707
12-5														+1										

électronique ce n'est plus guère le cas. Avant de poursuivre le calcul de la coupole, considérons (voir [8]) le cas simple où il n'y a que trois inconnues et un seul nœud libre :

$$(4) \qquad -f_i + v_i = a_i\,dx + b_i\,dy + c_i\,dz \quad (\text{poids } p_i).$$

Dérivées de l'énergie :

$$\frac{\partial [pvv]}{\partial\, dx} = 2p_1 v_1 \frac{\partial v_1}{\partial\, dx} + 2\, p_2 v_2 \frac{\partial v_2}{\partial\, dx} + \ldots$$

d'où l'équation :

$$(5) \qquad [pav] = 0, \quad \text{et de même} \quad [pbv] = [pcv] = 0$$

ce sont des demi-dérivées. Les termes absolus sont : $[paf]$, $[pbf]$, $[pcf]$ avec la matrice symétrique des coefficients :

$$(6) \begin{bmatrix} [paa] & [pab] & [pac] \\ & [pbb] & [pbc] \\ & & [pcc] \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{et} \\ \text{son inverse :} \\ \text{(voir [8])} \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} \\ & Q_{yy} & Q_{yz} \\ & & Q_{zz} \end{bmatrix} (7)$$

Si les éléments non diagonaux sont nuls ou négligeables le calcul est particulièrement simple. Dans cette hypothèse, ces coefficients de poids des inconnues Q_{xx}, Q_{yy}, Q_{zz} sont proportionnels aux carrés des axes de l'ellipsoïde de déformation pour ce nœud. Dans le voisinage du point pour lequel $[pvv]$ = minimum, choisi comme nouvelle origine de coordonnées ξ, η, ζ on a :

$$(8) \qquad v_i' = v_i + a_i\,\xi + b_i\,\eta + c_i\,\zeta$$

et, toujours en admettant la même hypothèse,

$$(9) \qquad \begin{gathered} [pv'v'] = [pvv] + [paa]\,\xi^2 + [pbb]\,\eta^2 + [pcc]\,\zeta^2 \\ [paa]\,Q_{xx} = [pbb]\,Q_{yy} = [pcc]\,Q_{zz} = 1. \end{gathered}$$

Si $i = 1, 2, \ldots 6$ (6 barres) on a aussi trois dérivées de l'énergie en se basant sur les inconnues hyperstatiques X_1, X_2, X_3 mais cette solution ne se prête guère à une étude générale des déformations.

La matrice (6), au lieu de trois éléments diagonaux, en comportera ici 24, tous positifs. De nombreux coefficients sont nuls. Par voie électronique la résolution du système (10) est rapide ; les variations de coordonnées étant connues, on en déduit les v_i puis la déformation quadratique moyenne relative à l'unité de poids : $m_o^2 \cong [pvv] : 4$.

Par hypothèse les poids p sont ici égaux : $p_i = 1$, ce 1 ayant une dimension donnée par l'équation (2). A titre de contrôle, on calcule à double ($[pvv] - [pff]$ (voir [2]). Dans la matrice inverse (11) il n'a pas paru nécessaire de donner tous les éléments non diagonaux. Ce tableau permet de calculer les poids des inconnues et de fonctions de celles-ci, en particulier les poids à posteriori des barres et leurs déformations.

Exemples : nœud 1.

Admettons provisoirement $m_o^2 = 1$ (dimension de m_o^2 donnée par [2])

Matrice symétrique des coefficients des équations normales

2,167																							
+ 0,667	2,167																						
+ 0,500	− 0,500	1,667																					
− 1,00	0	0	2,167																				
0	0	0	− 0,667	2,167																			
0	0	0	− 0,500	− 0,500	1,667																		
0	0	0	0	0	0	2,167																	
0	0	0	0	0	− 1,000	0	+ 0,667	2,167															
0	0	0	0	0	0	− 0,500	− 0,500	+ 0,500	1,667														
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,167													
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	− 1,00	0	0	2,167										
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	− 0,667	2,167									
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+ 0,500	+ 0,500	1,667										
− 0,500	0	− 0,500	0	0	0	0	0	0	0	0	− 0,667	2,167											
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+ 0,500	+ 0,500	1,667										
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,167									
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	− 1,00	0	0	2,167					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	− 0,667	2,167					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+ 0,667	− 0,500	1,667				
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,167			
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1,833		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1,833	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	− 0,167	1,333
− 0,333	− 0,333	− 0,333	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	− 0,500
− 0,333	− 0,333	− 0,333	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+ 0,500
+ 0,333	+ 0,333	+ 0,333	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1,333

(10)

$$\sqrt{Q_{xx}} = \sqrt{2{,}44} = \pm\, 1{,}56$$
$$\sqrt{Q_{yy}} = \sqrt{2{,}42} = \pm\, 1{,}55$$
$$\sqrt{Q_{zz}} = \sqrt{1{,}72} = \pm\, 1{,}31$$

Valeurs qui fournissent trois paires de plans respectivement normaux aux axes des x, y, z et tangents à l'ellipsoïde de déformation du nœud ; $Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} = 6{,}58 = K_1 + K_2 + K_3$ est un invariant exprimant une propriété géométrique connue, les K étant les racines de l'équation :

$$(12) \quad \begin{vmatrix} (Q_{xx} - K) & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{xy} & (Q_{yy} - K) & Q_{yz} \\ Q_{xz} & Q_{yz} & (Q_{zz} - K) \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(voir [4])}$$

Equation connue mais avec les notations de la méthode des moindres carrés ; les $\sqrt{K_1}$, $\sqrt{K_2}$, $\sqrt{K_3}$ sont les demi-axes principaux toujours pour $m_o^2 = 1$.

$$Q_{xy} = -1{,}56, \quad Q_{xz} = -1{,}20, \quad Q_{yz} = +1{,}03,$$

Les éléments diagonaux sont toujours positifs.

$$\textit{Nœud 9.} \quad \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} \\ & Q_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}55 & -0{,}315 \\ & 0{,}92 \end{bmatrix}$$

Il n'y a plus qu'une ellipse de déformation. Cette courbe est inscrite dans le rectangle défini par les valeurs :

$$\sqrt{1{,}55} = \pm\, 1{,}24 \qquad \sqrt{0{,}92} = \pm\, 0{,}96$$

$1{,}55 + 0{,}92 = 2{,}47$ est aussi un invariant (cercle orthoptique)

$$K_1 = 1{,}68 \quad K_2 = 0{,}79 \quad K_3 = 0. \quad K_1 K_2 = Q_{xx} Q_{yy} - Q_{xy}^2$$

$$\sqrt{K_1} = 1{,}30 \quad \sqrt{K_2} = 0{,}89 \qquad \text{(voir [4], [2]).}$$

On pourrait calculer les directions des axes principaux ; la valeur m_o caractérise l'ellipse dite moyenne. La forme de cette courbe présente de l'intérêt. Une prochaine publication sera consacrée à un système articulé comportant un nombre plus élevé de barres surabondantes.

LITTÉRATURE

[1] Absi, E. : *Systémes hyperstatiques de degré élevé* (Paris, 1963).
[2 Baeschlin, F. : *Ausgleichungsrechnung* (Cours ETH).
[3] Friedrich, K. : *Methode der kleinsten Quadrate aus den Grundsätzen der Mechanik abgeleitet* (Zeitschr. f. Vermessungwesen, 1943).
[4] Holsen, J. : *Das Fehlerellipsoïd* (Schweiz. Zeitschr. f. Vermessung, 1956).
[5] Mayor, B. : *Introduction à la statique des systèmes de l'espace* (Payot, Lausanne).
[6] Salles, F. : *Initiation à la théorie de l'énergie élastique* (Dunod, Paris).
[7] Stüssi, F. : *Baustatik I, II* (Birkhäuser, Bâle).
[8] Ansermet, A. : *Déformations en hyperstatique spatiale* (Bulletin technique, 1963).
[9] Grossmann, W. : *Grundzüge der Ausgleichungsrechnung* (Springer, Berlin).
[10] Zurmühl R. : *Matrizen* (Springer Verlag).

Matrice symétrique aux coefficients de poids (inverse de la précédente)
(Etablie par la centrale de l'EPUL pour le calcul électronique)

(11)

	2,442	— 1,562	— 1,201	+ 1,948	+ 1,528	+ 0,728																— 0,164	— 0,335	— 0,098
		2,423	+ 1,034	— 1,430	— 1,044	— 0,936																		+ 0,723
			1,720	— 0,940	— 1,021	— 0,320																		+ 0,703
nœud 1				2,377	+ 1,650	+ 0,971	— 1,086																	— 0,176
					2,578	+ 1,153	— 1,572	+ 2,066																
						1,717	— 1,015	+ 0,901	— 0,299															
nœud 2							2,601	— 1,694	+ 1,181	+ 2,091														
								2,471	— 1,001	— 1,522	— 1,044													
									1,711	+ 0,923	+ 0,975	— 0,271												
nœud 3										2,497	+ 1,696	— 0,995	+ 0,107											
											2,434	— 1,022	— 0,303	+ 0,505										
												1,573	+ 0,474	— 0,311	— 0,232									
nœud 4													1,454	+ 0,117	+ 0,533	+ 0,169								
														0,861	+ 0,690	+ 0,047	+ 0,187							
															1,992	+ 0,200	+ 0,564	— 0,057						
nœud 5																0,919	+ 0,326	+ 0,596	+ 0,151					
																	1,564	— 0,223	— 0,106	+ 0,163				— 0,090
																		1,813	+ 0,510	— 0,163	+ 0,097			+ 0,090
nœud 7																			1,548	— 0,315	+ 0,234	+ 0,164		+ 0,299
																				0,916	+ 0,600	+ 0,001	+ 0,149	— 0,149
																					1,833	+ 0,165	+ 0,517	— 0,100
nœud 9																						0,918	+ 0,322	+ 0,599
																							1,540	— 0,207
nœud 11																								1,803