Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 91 (1965)
Heft: 9

Artikel: Le calcul de coupoles à degré d'hyperdétermination élevé
Autor: Ansermet, A.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-67656

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

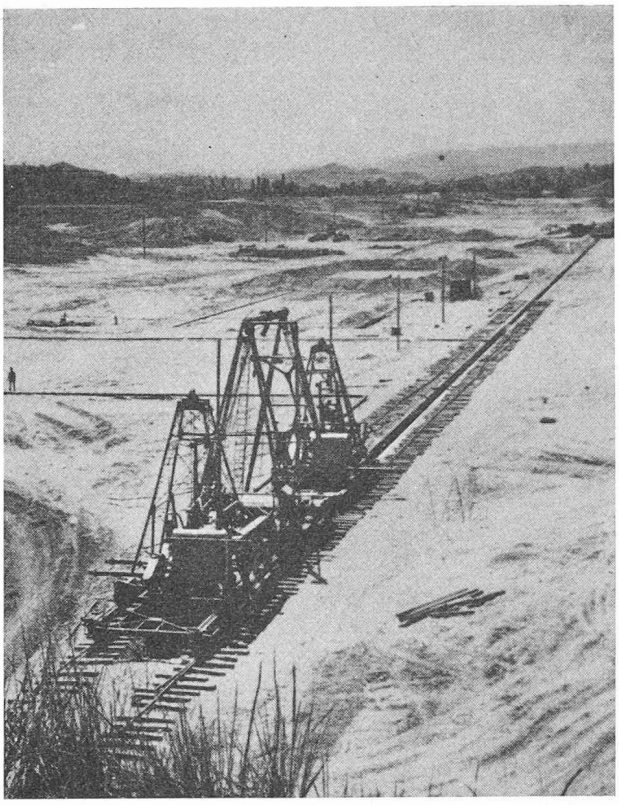


Fig. 4. — Disposition chantier Pinios.

quatre heures. L'installation à cet effet comprenait deux groupes « excavation-bétonnage ».

La tête du diaphragme était construite en béton armé conventionnel, de façon à pénétrer dans un chapeau

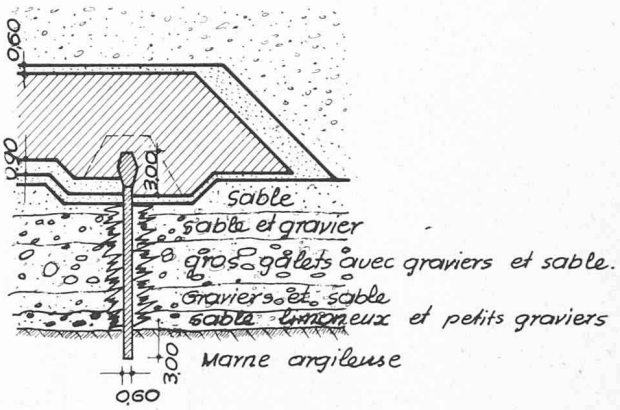


Fig. 5. — Tête de tapis argileux.

argileux plastique de couverture sur une longueur de 3 m environ. (Fig. 5.)

Pour le contrôle de son efficacité, on a procédé à une série de mesures piézométriques en amont et en aval du diaphragme. Il est intéressant de signaler que même en cours de construction (série impaire de panneaux seulement), l'on pouvait déjà déceler un rabattement de la nappe souterraine, ce qui montre bien que les niveaux amont et aval de la nappe d'eau, au droit du panneau considéré, étaient indépendants.

De pareils diaphragmes ont été exécutés en Grèce également comme enceinte de fouilles à ciel ouvert pour réduire les venues d'eau dans la zone d'excavation, et comme murs de quai en pleine mer jusqu'à 10 m de profondeur d'eau, l'un des côtés de ce diaphragme-mur étant remblayé par la suite pour former la plate-forme du quai.

LE CALCUL DES COUPOLES À DEGRÉ D'HYPERDÉTERMINATION ÉLEVÉ

624.915
Bor 5 Ref

par A. ANSERMET, ingénieur, professeur

Lorsque dans un système articulé (coupoles, etc.) le nombre des éléments surabondants (liaisons, barres) est peu élevé, le praticien ne se heurte en général pas à de grandes difficultés ; il peut choisir entre la solution judicieusement développée à l'aide du calcul matriciel dans le « Baustatik » du Prof. Dr Stüssi ou celle, analytique mais très différente, de B. Mayor (voir [1]) basée surtout sur des équations aux déformations.

Si le degré d'hyperdétermination est élevé, le problème est plus complexe ; la solution par les inconnues hyperstatiques n'est pas nécessairement la meilleure. Dans certaines publications même récentes ([2] p. 77-92) on préconise le fractionnement du calcul pour éviter des calculs trop laborieux ; dans les réseaux télémétriques on procède parfois de même et on sait l'analogie existant entre ces deux problèmes [1]. Cette conception est maintenant plus ou moins dépassée grâce aux progrès réalisés en calcul électronique. En général il y a lieu d'inverser des matrices symétriques et, dans ce domaine, on réalise de véritables performances par voie électronique.

Un élément de base est encore la condition connue étendue à toutes les barres

$$(1)\quad A = \sum\left(\frac{S^2 s}{2EF}\right) = \sum\left\{\left(\frac{Ss}{EF}\right)^2\left(\frac{EF}{2s}\right)\right\} = \Sigma\,(\varrho^2 p) =$$
$$= [p\varrho\varrho] = \text{minimum} \quad (\text{voir } [3]).$$

Il est assez rare que les praticiens de la méthode des moindres carrés bénéficient de poids p à priori aussi bien définis. L'interprétation est aisée :

S = efforts axiaux dans les barres (Stabkräfte) ;
E = coefficients d'élasticité ;
s = longueurs des barres ;
F = sections transversales des barres ;
ϱ = allongements ou raccourcissements des barres ;
A = énergie de déformation.

[1] « Die Analogie zwischen den Stabfachwerken und Streckennetzen wurde bald erkannt », dit-on outre-Rhin.

Publication au bénéfice de subsides du Fonds national de la Recherche scientifique et de la Société académique vaudoise.

On a de plus :

(dx), (dy), (dz)	Variations des coordonnées des nœuds (solution B. Mayor) ;
dx, dy, dz	Variations des coordonnées des nœuds (pour réaliser la condition (1)) ;
p, P	poids respectivement à priori et à postériori.

Avant de poursuivre il convient de rendre hommage à B. Mayor pour sa solution analytique portant sur une combinaison d'équations d'équilibre et d'équations aux déformations. Ces dernières sont linéaires et homogènes par rapport aux inconnues (dx), (dy) (dz), S, ce qui les caractérise. Mais le nombre d'inconnues peut être élevé (il y a encore les réactions). Les équations aux déformations en dx, dy, dz ne sont pas homogènes, car l'état initial, à partir duquel les coordonnées varient, n'est pas le même.

Liaisons. La forme générale est linéaire et homogène :

$$F(dx, dy, dz) = 0$$

En pratique on choisira un système de coordonnées apportant des simplifications par exemple, pour la coupole du Reichstag :

Nœuds	x	y	z
1	13,5	22,88	14,9
2	26,7	22,88	14,9
3	26,7	11,12	14,9
4	13,5	11,12	14,9
5	2,0	22,88	0
6	13,5	32,0	0

Nœuds	x	y	z
7	26,7	32,0	0
8	38,2	22,88	0
9	38,2	11,12	0
10	26,7	2,0	0
11	13,5	2,0	0
12	2,0	11,12	0

$dz = 0$ pour les nœuds 5 à 12
$dx = 0$ » » 6 et 10
$dy = 0$ » » 8 et 12

donc en tout douze liaisons simples.

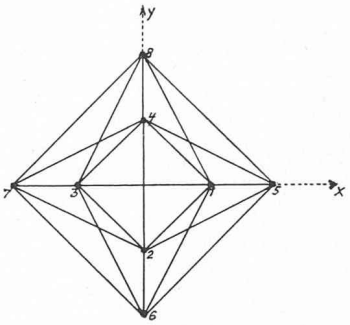
Il y a des ellipsoïdes de déformation pour les nœuds 1 à 4, des ellipses pour les nœuds 5, 7, 9, 11.

Etats transitoires. Dans les réseaux radiotélémétrés on coupe les côtés surabondants ; dans les systèmes articulés on fait de même avec les barres. Au point de vue théorique il est essentiel de remarquer que ces états sont arbitraires. Le calcul du système, après qu'on a remplacé les barres coupées par des forces, donne lieu à à l'application de la représentation plane d'après B. Mayor ; ce fut une idée géniale de matérialiser les nœuds par des plaques mobiles. Cette étape du calcul fournit les termes absolus des équations aux déformations ; mais ces éléments ne sont pas même nécessaires lorsqu'on veut savoir si les ellipsoïdes de déformation sont plus ou moins aplatis ou allongés. C'est ce que le cas concret ci-après montrera.

Calcul d'une coupole Schwedler

Cet exemple est tiré de la « Baustatik » ([3] p. 305) ; il ne donnera lieu qu'à dix barres surabondantes mais le calcul gagnera en clarté.

Par voie électronique l'inversion de la matrice symétrique des coefficients des équations normales dure 45 secondes seulement ; on peut donc envisager une vraie révolution dans le choix des méthodes de calcul. Les coordonnées des nœuds sont choisies arbitrairement :



Nœuds	x	y	z
1	+ 1	0	+ 1
2	0	— 1	+ 1
3	— 1	0	+ 1
4	0	+ 1	+ 1
5	+ 2	0	0
6	0	— 2	0
7	— 2	0	0
8	0	+ 2	0

L'unité est quelconque 8^m, 10^m, 12^m .....

C'est un exemple de caractère didactique. Il n'est fait aucune hypothèse sur les forces extérieures.

A la base du calcul il y a une équation aux déformations par barre comme dans la solution analytique de B. Mayor ; au maximum il y a 28 barres et au moins 6 liaisons, donc 6 variations de coordonnées nulles au lieu de 12 pour la coupole du Reichstag. L'état fondamental (Grundsystem) donne lieu à l'application de la représentation plane, solution connue (voir [1]).

C'est la condition du minimum pour $[p\nu\nu]$ qui importe

$$(2) \qquad \nu_i = a_i(dx_g - dx_h) + b_i(dy_g - dy_h) + c_i\,(dz_g - dz_h) + f_i \text{ (poids } p_i)$$

pour la barre $g - h$ d'indice i, les variations de coordonnées étant les inconnues. On verra que dans la première partie des calculs les termes absolus n'interviennent pas ; quant aux poids à priori ils sont proportionnels à (E_iF_i/s_i). Ils furent choisis ici pour réduire l'influence des éléments non diagonaux de la matrice inverse ; le cas idéal, à certains égards, est celui où cette matrice est diagonale, mais ce n'est pas facile à réaliser. Pour réduire à 12 le nombre des inconnues, admettons 12 liaisons, c'est-à-dire que les dx, dy, dz des 4 nœuds 5, 6, 7, 8 sont nuls. Seuls les nœuds 1, 2, 3, 4 sont libres ; il y a 22 barres, 10 de celles-ci étant surabondantes. Le nombre des inconnues pourrait être inférieur à celui des barres surabondantes.

Le calcul est rapide : on forme successivement les coefficients a_i, b_i, c_i puis les équations normales (demi-dérivées de l'énergie) et enfin la matrice aux coefficients de poids (en diagonale les quadratiques). Ce problème fut déjà traité (voir [4] et [5]) sous divers aspects.

Coefficients : $[paa]$, $[pbb]$..... $[pab]$, $[pac]$..... *Termes absolus* $[paf]$, $[pbf]$.....	Déformation quadratique moyenne relative à l'unité de poids : $m_0^2 \cong [p\nu\nu] : 10$. Provisoirement on pose parfois : $m_0^2 = 1$

Valeurs indépendantes des f_i
$$\begin{cases} \sqrt{0{,}339} = 0{,}582 \\ \sqrt{0{,}535} = 0{,}731 \\ \sqrt{0{,}935} = 0{,}967 \end{cases}$$

Grâce au choix des axes de coordonnées on obtient les demi-axes principaux des quatre ellipsoïdes de déformation (pour $m_0^2 = 1$) soit 0,582, 0,731, 0,967 la somme $(0{,}339 + 0{,}535 + 0{,}935 = 1{,}809)$ est un invariant. Le

Tableau des coefficients des équations aux déformations et des poids

Barres	dx_1	dy_1	dz_1	dx_2	dy_2	dz_2	dx_3	dy_3	dz_3	dx_4	dy_4	dz_4	p_i	Barres
1-2	+ 0,707	+ 0,707		— 0,707	— 0,707								0,80	1-2
2-3				+ 0,707	— 0,707		— 0,707	+ 0,707					0,80	2-3
3-4							— 0,707	— 0,707		+ 0,707	+ 0,707		0,80	3-4
4-1	+ 0,707	— 0,707								— 0,707	+ 0,707		0,80	4-1
1-3	+ 1,00						— 1,00						0,70	1-3
2-4					— 1,00						+ 1,00		0,70	2-4
1-5	— 0,707	0,00	+ 0,707										1,27	1-5
1-6	+ 0,41	+ 0,815	+ 0,41										1,00	1-6
1-7	+ 0,949	0,00	+ 0,316										1,00	1-7
1-8	+ 0,41	— 0,815	+ 0,41										1,00	1-8
2-5				— 0,815	— 0,41	+ 0,41							1,00	2-5
2-6				0,00	+ 0,707	+ 0,707							1,27	2-6
2-7				+ 0,815	— 0,41	+ 0,41							1,00	2-7
2-8				0,00	— 0,949	+ 0,316							1,00	2-8
3-5							— 0,949	0,00	+ 0,316				1,00	3-5
3-6							— 0,41	+ 0,815	+ 0,41				1,00	3-6
3-7							+ 0,707	0,00	+ 0,707				1,27	3-7
3-8							— 0,41	— 0,815	+ 0,41				1,00	3-8
4-5										— 0,815	+ 0,41	+ 0,41	1,00	4-5
4-6										0,00	+ 0,949	+ 0,315	1,00	4-6
4-7										+ 0,815	+ 0,41	+ 0,41	1,00	4-7
4-8										0,00	— 0,707	+ 0,707	1,27	4-8

Matrice symétrique des coefficients des équations normales (Résolution par calcul électronique)

3,37	0,00	0,00	— 0,40	— 0,40	0,00	— 0,70	0,00	0,00	+ 0,40	+ 0,40	0,00
	2,14	0,00	— 0,40	— 0,40	0,00	0,00	0,00	0,00	+ 0,40	— 0,40	0,00
		1,07	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
			2,14	0,00	0,00	— 0,40	+ 0,40	0,00	0,00	0,00	0,00
				3,37	0,00	+ 0,40	— 0,40	0,00	0,00	— 0,70	0,00
					1,07	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
						3,37	0,00	0,00	— 0,40	— 0,40	0,00
							2,14	0,00	— 0,40	— 0,40	0,00
								1,07	0,00	0,00	0,00
									2,14	0,00	0,00
										3,37	0,00
											1,07

Matrice symétrique aux coefficients de poids (inverse de la précédente)
(Calcul par le centre de calcul électronique de l'EPUL)

0,339	0	0	+ 0,079	+ 0,025	0	+ 0,083	0	0	+ 0,079	— 0,025	0
	0,535	0	+ 0,102	+ 0,079	0	0	— 0,102	0	— 0,008	+ 0,079	0
		0,935	0	0	0	0	0	0	0	0	0
			0,535	0	0	+ 0,079	— 0,102	0	— 0,008	0	0
				0,339	0	— 0,025	+ 0,079	0	0	+ 0,008	0
					0,935	0	0	0	+ 0,079	+ 0,025	0
						0,339	0	0	+ 0,102	+ 0,079	0
							0,535	0	0	0	0
								0,935	0,535	0,339	0
											0,935

nœud 1 — nœud 2 — nœud 3 — nœud 4

grand axe est vertical et le petit dirigé suivant la diagonale 1-3. Le calcul devient définitif quand m_0^2 est connu (dimensions fournies par l'équation(1)). Mais jusque-là les termes absolus f_i ne jouent pas de rôle.

Poids des barres à postériori P_i. On sait que la somme $[p_i : P_i]$ est égale au nombre des inconnues, ce qui caractérise la méthode des moindres carrés. Ces P_i sont les poids des binômes $(-f_i + v_i)$

On trouve :	$p_i : P_i$		
Arêtes supérieures (1–2,2–3,3–4,4–1)	$0{,}472 \times 4 =$	1,89	
Diagonales face supérieure (1–3,2–4)	$0{,}358 \times 2 =$	0,716	Ici les poids les plus faibles sont amplifiés plus fortement que les autres
Arêtes 1–5, 2–6, 3–7, 4–8	$0{,}81 \times 4 =$	3,24	
Diagonales faces latérales (1–6,2–5.....)	$0{,}572 \times 8 =$	4,576	
Barres 1–7, 2–8, 3–5, 4–6	$0{,}398 \times 4 =$	1,59	
	$[p_i : P_i]$	$= 12{,}01$	(nombre d'inconnues)

par exemple pour la diagonale 1 – 3 :
$1 : P_5 = 0{,}339 + 0{,}339 - 2 \times 0{,}083 = 0{,}512$;
$p_5 : P_5 = 0{,}70 \times 0{,}512 = 0{,}358$
Ces calculs constituent un précieux contrôle.

En résumé, à part des solutions par approximations, on peut former les dérivées de l'énergie en fonction des inconnues hyperstatiques ou faire varier les coordonnées des nœuds (B. Mayor) ; la solution nouvelle fait appliquer des dérivées mais en fonction des variations de coordonnées, ce qui lui confère un caractère général, surtout quant à l'étude des déformations.

LITTÉRATURE

[1] Mayor, B. : *Introduction au calcul des systèmes statiques* (Payot, Lausanne).

[2] Salles, F. : *Initiation à la théorie de l'énergie élastique* (Dunod, Paris).

[3] Stüssi, F. : *Baustatik I, II* (Birkhäuser, Basel).

[4] Ansermet, A. : « Nouvelle méthode de calcul des coupoles » (1964). *Bulletin technique* nº 19.

[5] Zurmühl : *Matrizen* (Springer Verlag).