

# Degré de prévisibilité d'un système aléatoire et bases théoriques d'une prévision numérique

Autor(en): **Baatard, François**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin technique de la Suisse romande**

Band (Jahr): **94 (1968)**

Heft 3

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-69623>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## 2.6 Seuil du capteur

Extrapolons la vitesse de rotation correspondant à un couple égal au couple de frottement :

$$\frac{M}{\dot{x}^2} = 0,45 \quad \text{pour} \quad M = 0,01 \text{ g}$$

$$\dot{x}_s = 0,15 \text{ m/s}$$

## 2.7 Conclusion

L'emploi d'un petit ordinateur est indispensable lorsqu'on désire utiliser sans perte de temps toutes les possibilités de finesse du système NEZ.

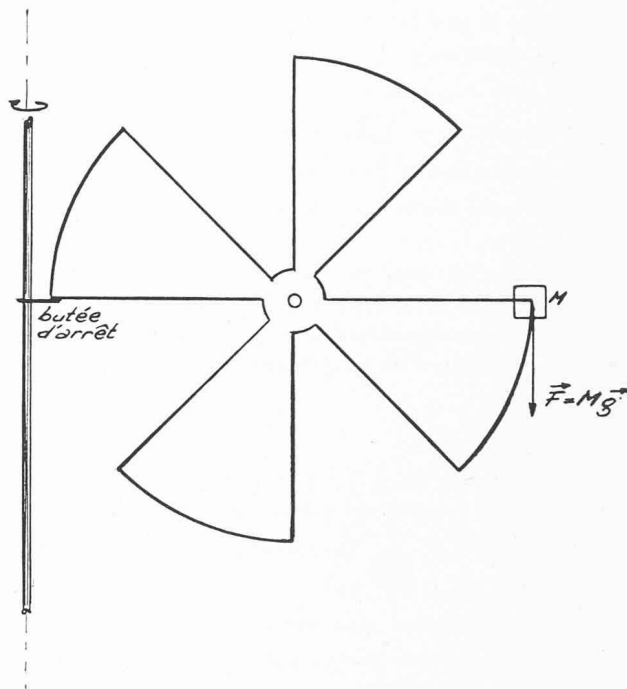


Fig. 8. — Dispositif utilisé pour la mesure du couple d'entraînement et du couple de frottement.

# DEGRÉ DE PRÉVISIBILITÉ D'UN SYSTÈME ALÉATOIRE ET BASES THÉORIQUES D'UNE PRÉVISION NUMÉRIQUE \*

par FRANÇOIS BAATARD, professeur à l'EPUL

Dans l'Essai d'une axiomatique aléatoire, Georges Dedeant a développé mathématiquement les éléments qui permettent la prévision numérique d'un événement aléatoire : vent, pression barométrique, trajectoires d'un groupe de particules d'un fluide turbulent, etc., c'est-à-dire de tout phénomène siège d'une diffusion turbulente.

L'Essai précité développe la structure mathématique de la mécanique aléatoire de Dedeant et Wehrlé.

Dedeant prouve l'identité des nombres aléatoires et des vecteurs de l'espace de Hilbert et leur axiomatique commune.

Rappelons qu'une fonction aléatoire  $X(t)$  est décomposable en :

1. Une fonction certaine, au sens de l'analyse classique.
2. Une fonction aléatoire à dépendance stochastique (ou de probabilité) et traduite pratiquement par la corrélation.
3. Une fonction aléatoire indépendante en probabilité et donnant les fluctuations du système.

L'indice de connexion est un indice pratique qui fixe le degré de prévisibilité d'un système aléatoire en fonction des données disponibles ; il est lié à la nature de la continuité de la fonction aléatoire décrivant le phénomène.

## 1. Enoncé et solution du problème de la prévision.

### a) Enoncé

Les données, c'est-à-dire les résultats des mesures, par exemple du vecteur vitesse vent, sont des vecteurs  $\vec{X}_i$  situés dans le plan du « passé » ; il en faut tirer la pré-

sion d'une valeur future, qui est un vecteur spatial  $\vec{X}$  inconnu décomposable en

1° un vecteur coplanaire aux  $\vec{X}_i$  c'est-à-dire :

$$\vec{X} \text{ passé} = \sum_1^n a_i \vec{X}_i, \text{ connu par combinaison linéaire}$$

des  $\vec{X}_i$  ;

2° un vecteur inconnu, purement aléatoire  $\vec{X}'_f$ , orthogonal à la variété précédente, donc au plan du passé, et qui est le vecteur futur, aléatoire au sens mathématique du terme.

Ainsi :

$$\vec{X} \text{ inconnu} = \vec{X} \text{ passé} + \vec{X}' \text{ futur} \quad (1)$$

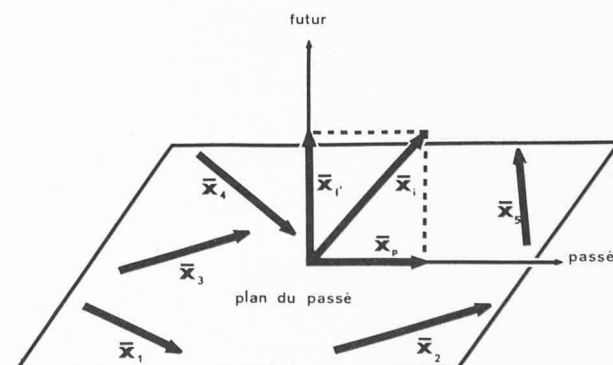


Fig. 1

\* Nous avons basé cet exposé sur les travaux de Dedeant et Wehrlé ainsi que sur une correspondance personnelle avec ces deux auteurs.

Dès lors, le problème est, en introduisant les coefficients de corrélation  $r_{i,j}$  connus entre les  $\vec{X}_i$  et  $\vec{X}_j$  du passé et ceux inconnus  $r_{ix}$  entre les  $\vec{X}_i$  et  $\vec{X}'$  :

Connaissant  $r_{i,j} = \overline{X_i X_j}$ , déterminer  $r_{ix} = \overline{X_i X'}$  <sup>2</sup>

On pourra calculer  $\overline{X}$  et partant, sa partie purement aléatoire  $\vec{X}'_j$  qui fournira la précision de la prévision effectuée sur  $\overline{X}$ .

L'inconnue est donc la liaison fonctionnelle entre le passé et le futur, s'effectuant non par dépendances certaines, mais par dépendances de probabilités, un coefficient de corrélation ou sa généralisation, un coefficient de connexion.

### b) Solution

Le déterminant  $\Delta_{1,2,\dots,n}$  des coefficients de corrélation  $r_{i,j}$  donne le carré du volume du  $n$ -parallélépipède construit sur  $(\vec{X}_1 \dots \vec{X}_n)$  et celui construit sur  $(\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_n, \vec{X})$  est  $\Delta_{1,2,\dots,n,x}$ .

La partie purement aléatoire de  $\vec{X}$  inconnu, c'est-à-dire  $\vec{X}'_f$ , le futur, est fourni par le rapport des deux déterminants précédents :

$$\overline{X'^2_f} = \frac{\Delta_{1,2,\dots,n,x}}{\Delta_{1,2,\dots,n}} \quad (2)$$

En utilisant des variables aléatoires réduites, on peut écrire, avec l'hypothèse  $\overline{X^2} = 1$

$$\overline{X'^2_f} + \overline{X_p^2} = 1$$

<sup>1</sup> Rappelons qu'une fonction aléatoire peut être définie de diverses manières : par ses fonctions de répartition, de distribution des probabilités conjuguées, sa courbe enregistrée des corrélations, ou par celle de sa fonction spectrale, etc.

De toutes façons, une fonction aléatoire est définie par ses moments au moins :

1° du premier ordre ou moyenne proprement dite, c'est-à-dire par

$$\overline{X} = \int_{-\infty}^{+\infty} X f(x) dx$$

où  $f(x)$  est la fonction de distribution des  $x$ , et  $f(x)dx$  la densité de probabilité de la variable aléatoire  $x$ .

2° son moment du deuxième ordre, ou écart quadratique moyen :

$$\overline{X^2} = \overline{(X - \overline{X})^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} (X - \overline{X})^2 f(x) dx$$

et d'autres d'ordres plus élevés tous contenus dans le développement en série de la fonction caractéristique  $e^{i\overline{X}}$ .

Ces définitions s'étendent sans autre aux fonctions aléatoires de plusieurs variables, ces dernières étant contenues dans un tenseur, le tenseur de connexion, dont les combinaisons de certaines composantes fournissent les dissipations d'énergie du système en instance de diffusion turbulente.

<sup>2</sup> Par multiplications scalaires successives par  $\overline{X}_1 \dots \overline{X}_n$  de

$$\overline{X_p} = a_1 \overline{X}_1 + \dots + a_n \overline{X}_n \quad (a)$$

on constitue le système linéaire :

$$\begin{cases} r_{1p} = a_1 + a_2 r_{12} + \dots + a_n r_{1n} \\ \vdots \\ r_{np} = a_1 r_{1n} + \dots + a_n \end{cases}$$

dont la solution est unique si le déterminant  $\Delta_{1,2,\dots,n}$  des coefficients de corrélation  $r_{ij}$  est  $\neq 0$ .

En multipliant scalairement (a) par  $\overline{X}$  on obtient un système  $r_{ix}$ .

Il faut alors encore définir la corrélation  $R$  entre l'inconnue  $\vec{X}$  et  $\vec{X}'_p$

$$R = \frac{\overline{X X'_p}}{\sqrt{\overline{X^2}} \sqrt{\overline{X'^2_p}}} = \frac{\overline{X X'_p}}{\sqrt{\overline{X^2}} \sqrt{\overline{X'^2_p}}} = \sqrt{\overline{X'^2_p}} \quad (3)$$

En combinant (1), (2) et (3) on obtient :

$$R^2 = \overline{X'^2_p} = 1 - \overline{X_p^2} = 1 - \frac{\Delta_{1,2,\dots,n,x}}{\Delta_{1,2,\dots,n}} \quad (4)$$

ce qui résout le problème.

On pourrait s'arrêter là ; mais Dedebeant a démontré que l'analyticité de la fonction aléatoire  $\vec{X}$ , et par suite son degré de prévisibilité sont étroitement liés, caractérisés qu'ils sont tous deux d'ailleurs par le comportement de la courbe de corrélation à l'origine.

Il y parvient en simplifiant considérablement les déterminants attachés aux systèmes linéaires  $r_{ix}$  par le procédé d'orthogonalisation de Schmidt rendant les vecteurs de base de la variété  $X$  orthonormaux.

## 2. Développement du coefficient de connexion

Les nouveaux vecteurs de bases  $\vec{Y}_i$  orthonormaux et obtenus par transformation linéaire des  $\vec{X}_i$  introduisent de nouvelles inconnues, les  $\rho_{ix}$ , coefficients de corrélation entre  $\vec{X}$  et les  $\vec{Y}_i$  :

$$\rho_{ix} = \overline{X Y_i} \quad (i = 1 \dots n).$$

Mais alors, les déterminants  $\Delta_{1..n}$  contenus dans (2) et (4) sont considérablement simplifiés, puisque tous leurs termes sont nuls, sauf ceux de la diagonale principale qui valent 1. Le déterminant  $\Delta_{1,2,\dots,n,x}$  s'écrit dès ce moment :

$$\Delta_{1,2,\dots,n,x} = \begin{vmatrix} 1 & \rho_{1x} & \rho_{2x} & \dots \\ \rho_{1x} & 1 & 0 & \dots \\ \rho_{2x} & 0 & 1 & \dots \\ & & & \dots \end{vmatrix} = 1 - (\rho_{1x}^2 + \rho_{2x}^2 + \dots + \rho_{nx}^2) \quad (5)$$

$$\text{ou bien, avec } R_n^2 = \rho_{1x}^2 + \rho_{2x}^2 + \dots + \rho_{nx}^2 \quad (6)$$

et

$$\Delta_{1,2,\dots,n,x} = 1 - R_n^2 \quad (7)$$

De même, avec les  $r_{ix}$  reliant  $\vec{X}$  inconnu et les  $\vec{X}_i$  connus, on a en bordant les  $\Delta_{1..n}$

$$\Delta_{1,2,\dots,n}(r_{1x}, r_{2x}, \dots, r_{nx}) = \begin{vmatrix} 1 & r_{1x} & r_{2x} & \dots \\ r_{1x} & 1 & r_{12} & \dots \\ r_{2x} & r_{12} & 1 & \dots \\ r_{3x} & r_{13} & r_{23} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} \quad (8)$$

d'où le développement suivant du coefficient de connexion  $R_n$  :

$$R_n^2 = \frac{|r_{1x}|^2}{\Delta_1} + \frac{|r_{2x} \ r_{12}|^2}{\Delta_{1,2}} + \frac{|r_{3x} \ r_{13} \ r_{23}|^2}{\Delta_{1,2,3}} + \dots$$

En appelant  $D_{ix}^2$  les déterminants au carré du numérateur :

$$^3 \text{ Car } \overline{X X'_p} = \overline{(X_p + X'_f) X_p} = \overline{X_p^2} + \frac{\overline{X_p X'_f}}{= 0}$$

$$R_n^2 = \frac{D_{1x}^2}{\Delta_1} + \frac{D_{2x}^2}{\Delta_{1,2}} + \frac{D_{3x}^2}{\Delta_{1,2,3}} + \dots + \frac{D_n^2}{\Delta_{1,2,\dots,n}} \quad (9)$$

et

$$R^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n^2$$

En conclusion :

En fonction des données  $\vec{X}_i$  disponibles,  $\vec{X}_f$  peut être calculé,  $R_n^2$  indiquant la précision de la prévision attachée à la grandeur aléatoire  $\vec{X}$  inconnu, cette prévision pouvant être spatiotemporelle.

Il suffit en effet de former les déterminants  $\Delta_{1,\dots,n}$  des  $r_{i,j}$  et  $\Delta^{1,\dots,n,x}$  des  $r_{i,x}$  convenables.

### 3. Exemples de divers degrés de prévisibilité et des fonctions aléatoires y relatives

*Premier exemple : la dépendance certaine*

Il peut se faire que  $\vec{X}$  soit parallèle au plan des  $\vec{X}_i$ . Dans ce cas,  $\vec{X} = \vec{X}_p$  et  $R^2 = 1$  ou  $R = 1$  ; c'est le cas limite d'une dépendance certaine, celui de la mécanique classique, sans diffusion, l'image du corps solide.

Le coefficient de corrélation  $r(\tau) = r(t_2 - t_1)$  est toujours égal à 1 ; la courbe de corrélation a l'allure suivante (fig. 2) :

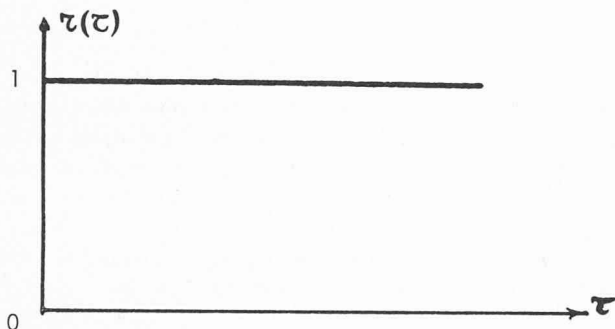


Fig. 2. — Cas limite  $r(\tau) = 1$ .  
Pas de diffusion, mécanique du solide (ou classique des fluides).

*Deuxième exemple : le hasard pur*

Il n'existe alors que des probabilités indépendantes ; les corrélations ou dépendances sont nulles, le fluide n'est pas dissipatif d'énergie. C'est le cas des fluctuations autour d'une position d'équilibre ou celui du gaz de la théorie cinétique de Maxwell-Boltzmann par exemple, ou d'un bruit de fond non corrélé, la succession des décimales du nombre  $\pi$ , etc. Alors  $R^2 = 0$  car

$$\Delta_{1,2,\dots,n} = \Delta_{1,2,\dots,n,x} = 1$$

et

$$\begin{cases} r(\tau) = 1 & \text{pour } \tau = 0 \\ r(\tau) = 0 & \text{pour } \tau \neq 0 \end{cases}$$

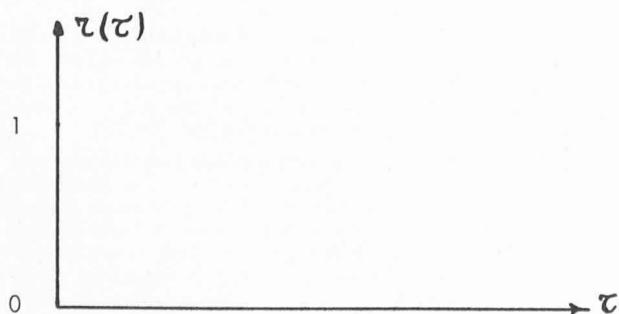


Fig. 3

La courbe de corrélation se réduit au point  $(0 ; 1)$ . C'est le calcul des probabilités classique où l'on ne ferait pas appel (ce qui se produit fréquemment) à la règle du calcul des probabilités d'événements dépendants au point de vue du hasard.

Selon la formule de Dedeant : « La projection de l'avenir sur le passé est nulle », ou, si l'on veut, la connaissance du passé ne sert à rien pour celle du futur. Dans les jeux du hasard pur, dés, loteries ou autres, les résultats antécédents n'influencent pas ceux à venir. Le hasard n'est pas lié.

*Troisième exemple : Une fonction aléatoire prévisible*

L'exemple le plus simple d'un hasard lié, à part celui des probabilités en chaîne de Markoff est l'oscillateur aléatoire

$$X = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (10)$$

dont l'écriture est formellement la même que celle de l'oscillateur aléatoire à fréquence certaine classique ; mais ici  $A$  et  $\varphi$  sont des constantes aléatoires, c'est-à-dire des variables aléatoires distribuées uniformément dans un certain intervalle,  $(0 ; \pi)$  par exemple. Le coefficient de connexion est donné par la formule de Kintchine :

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega \tau dF(\omega) \quad (11)$$

où  $F(\omega)$  est la fonction spectrale intégrale de Fourier inverse de celle de la connexion. Les  $A$ ,  $\omega$  et  $\varphi$  sont reliés dans une fonction de répartition  $G(A, \omega, \varphi)$  qui pourrait être une loi de Gauss à trois variables corrélées  $A$ ,  $\omega$  et  $\varphi$ . Dans le cas de (10), (11) se réduit à :

$$r(\tau) = \cos \omega \tau \quad (12)$$

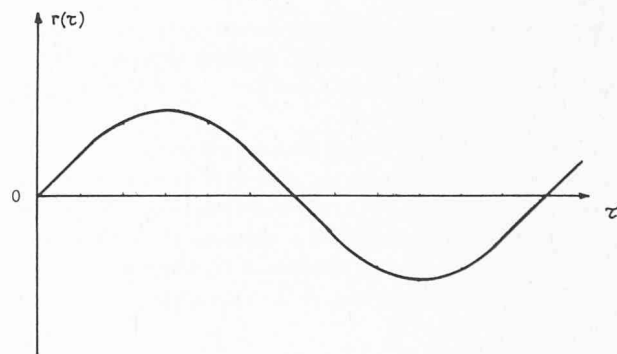


Fig. 4

(12) se conçoit de deux manières suivant que l'on considère son développement en série avec les écarts-types de la fonction  $X$  et de ses dérivées successives  $S_0, S_1 \dots S_n$  ou avec  $\omega$ .

Le même phénomène peut être décrit selon le point de vue corpusculaire :

$$r(\tau) = 1 - \frac{S_1^2}{S_0^2} \cdot \frac{\tau^2}{2!} + \dots$$

ou selon le point de vue ondulatoire :

$$r(\tau) = 1 - \frac{\omega_0^2}{2!} \tau^2 + \dots$$

$r(\tau)$  traduit les phénomènes stationnaires en probabilité, apparaissant par « vagues » soit des types de diffusion turbulente fort répandus : jets, panaches, fumées évoluant par bouffées, etc. Il est facile de voir que

$$\frac{D_{2x}}{\Delta_{1,2}} = \sin^2 \omega t \text{ et que } R_2^2 = \cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1$$

La fonction aléatoire est donc prévisible à partir de deux valeurs antérieures seulement, les autres étant superflues. La réalisation de (10) sur une épreuve est une sinuséide.

Selon les travaux et mesures effectués sur le continent sud-américain par les soins du Service météorologique argentin, la pression barométrique appartiendrait à ce type de fonction aléatoire.

### 5. Conclusions

Nous avons, le plus concrètement possible, expliqué les points essentiels et quelques exemples de l'Essai d'une axiomatique aléatoire, de Georges Dedebant et qui constitue la base mathématique d'une théorie de la pré-

vision d'événements aléatoires et d'une mécanique statistique générale, puisqu'elle fait appel aux dépendances de probabilités (les mécaniques statistiques ne faisant appel, jusque-là, qu'aux probabilités indépendantes du calcul classique des probabilités sans hérédité dans le hasard).

Cet essai met en évidence une gamme continue de fonctions aléatoires :

- 1° totalement imprévisibles ;
- 2° partiellement prévisibles ;
- 3° entièrement prévisibles (c'est-à-dire dont on peut notamment définir les moments d'ordre 1 et 2).

Dans les cas 2° et 3° et grâce au développement des  $\frac{D}{\Delta}$  on peut, au lieu de calculer la valeur de la fonction à un instant déterminé futur, augmenter l'échéance de la prévision, avec la même précision (mesurée par l'écart-type), par la prévision d'une moyenne.

## RÉPARTITION DES FONCTIONS THERMODYNAMIQUES À LA SORTIE D'UNE CHEMINÉE PAR VENTS CALMES

par S. KRIKORIAN, ing. électricien EPUL

### I. Introduction

Le but de cette étude est de tracer une carte des fonctions thermodynamiques ( $T$ ,  $V$ ,  $P$ ) à la sortie d'une cheminée. Peu d'études ont été faites dans ce domaine pour un vent calme, aussi près que possible de la sortie de la cheminée.

Précisons que nous tiendrons compte dans ces mesures de l'échelle de turbulence qui, comme il sera expliqué plus loin, est différente selon que l'on travaille en soufflerie ou dans l'atmosphère.

Si toutes les expériences futures s'avèrent concluantes, cette méthode théorique pourra de même servir de base pour prévoir la carte thermodynamique dans l'espace entourant la cheminée (ou un tunnel), déjà au stade du projet. Ainsi, il sera possible d'en tirer des conclusions avant la construction de la cheminée.

### II. Généralités

Nous introduisons dès maintenant quelques définitions qui nous familiarisent avec les notions qui vont suivre :

#### 1. Vent calme

Nous entendons par vent calme, un vent dont la vitesse ne dépasse pas 0,30 m/s. La fumée s'élève verticalement à la sortie de la cheminée, et les feuilles des arbres sont immobiles.

#### 2. Echelle de turbulence

Si nous disposons d'un appareil de mesure (thermomètre par exemple) et que nous voulons connaître la température avec la précision de l'appareil pour un espace donné, cette mesure peut être satisfaisante dans certaines conditions mais erronée pour d'autres. En fait, la température dans cet espace n'est pas constante, elle

est variable, d'abord dans le temps, puis suivant des points géométriques répartis dans un espace plus petit. Ce que l'instrument donne n'est qu'une moyenne. La précision dépend donc de l'échelle à laquelle on veut considérer la température.

La notion d'échelle de turbulence nous permet de savoir si cette précision est suffisante ou non.

#### 3. Causes et propriétés de la turbulence

Les principales causes de la turbulence sont d'origine dynamique et thermique. La première catégorie est liée à la configuration du domaine dans lequel se déplace le fluide et la grandeur des variables mécaniques qui définissent son mouvement. La seconde met en jeu les gradients thermiques qui s'établissent localement et qui produisent des courants thermoconvectifs. Ces agitations se combinent et s'ajoutent au mouvement général du fluide.

Mentionnons aussi la non moins importante turbulence d'obstacle due à la présence des édifices et constructions aux alentours du gaz en mouvement. Mais l'on peut toujours tenir compte de cette turbulence par l'introduction de facteurs correctifs établis à la suite de mesures expérimentales.

Notons quelques propriétés intéressantes de la turbulence :

- 1) A l'observation, nous constatons que la turbulence est rotationnelle et dissipative. L'énergie mécanique est transformée en énergie interne. La transformation se fait par cascades d'énergie suivant une décomposition en tourbillons de plus en plus petits.
- 2) Le chemin parcouru par une particule du fluide est complètement aléatoire, mais il n'est donc pas nécessaire de déterminer ce mouvement si nous pouvons arriver autrement aux mêmes résultats. Avec une description statistique du champ des vitesses, nous avons les éléments de base nécessaires à l'élaboration d'une mécanique de la diffusion turbulente. Nous formons la fonction de corrélation des vitesses, et de là, à l'aide du théorème de Wiener-Khintchine, le spectre d'énergie.