Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande

Band: 96 (1970)

Heft: 22

Artikel: Le problème relatif à la coupure éventuelle de barres surabondantes lors de calculs hyperstatiques spatiaux

Autor: Ansermet, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-70877

8. La recherche est soumise à des règles scientifiques, et les spécialistes du bâtiment ont encore à découvrir, dans une large mesure, ce qu'est la science.
9. Il est fréquent que les questions que l'on croit pouvoir approfondir aisément se prêtent au contraire mal à la recherche ; tel est le cas de la « rentabilité » ; en effet, lorsque la solution est trouvée, elle a en général cessé d'être valable, ou elle ne l'est que dans certains cas particuliers.
10. On applique souvent sans discernement certains moyens, bien qu'ils soient extrêmement imprécis (par exemple : les « normes relatives au coût ». La raison en apparaît à partir du moment où l'on sait comment les prix se forment et de quoi ils sont faits).
11. Les tâches de recherche complexes, si elles sont entreprises avec un personnel trop réduit, aboutissent le plus souvent à des résultats inutilisables ; or presque toutes les tâches sont complexes !
12. Aucun homme n'est en mesure d'assumer seul un travail de recherche dans un domaine complexe et interdisciplinaire. Des qualités exceptionnelles suffisent peut-être pour permettre la collaboration, même lorsque ces qualités correspondent à une attitude antipathique, telle qu'une certaine pédanterie, ou une tendance à jouer des coudes.
13. Les intérêts personnels ne s'opposent pas obligatoirement à des résultats excellents ; ils en sont même parfois la condition.
14. Des personnes dont le savoir et l'expérience dépassent de loin la moyenne sont volontiers considérées comme des « farfelus », parce qu'elles n'ont pas encore été comprises. C'est peut-être une des raisons pour lesquelles des tâches inédites sont trop fréquemment confiées à des éléments de deuxième ou troisième ordre.
15. Un « know-how » qui a cessé d'être valable est plus dangereux que l'ignorance.
16. Un bon climat psychologique est, pour le travail de recherche, une condition essentielle de succès. Il existe chez nous, en raison de l'étroitesse du milieu et des vues, un défaut aussi répandu que certaines maladies allergiques : c'est la tendance à ne pas avoir d'estime pour ceux qui sont différents de nous, qui pensent et agissent différemment. Il nous faudra apprendre à ne pas laisser les discussions sur les faits dégénérer en différends entre personnes.
17. Il est probable que les résultats de la recherche en construction produiront des changements dans la mentalité, qui se répercuteront à leur tour sur les conceptions.
18. La recherche et la science ont leurs limites. Il ne sera jamais possible à la science de saisir l'ensemble de l'environnement artificiel.
19. A elles seules, la recherche et la science ne créeront pas un environnement meilleur ; mais elles pourront donner l'échelle des réalisations, et créer une conscience mieux ouverte à la nature des tâches à accomplir. Elles pourront peut-être remettre en question certaines notions bien établies, comme celle de « dépersonnalisation » ou d'« humanité », et d'en introduire d'autres pour les remplacer.
20. La science abuserait de sa mission si elle tentait d'affecter son pouvoir à une justification de l'existence de la collectivité humaine.

(Traduction Claude Grosgurin)

Le problème relatif à la coupure éventuelle de barres surabondantes lors de calculs hyperstatiques spatiaux [1]

par A. ANSERMET, ing.-professeur

Rappel de notions usuelles

Le nombre de publications récentes relatives à ce problème est assez élevé ; cela tient à l'évolution presque spectaculaire qui s'est manifestée dans ce domaine. Deux staticiens de classe internationale y ont contribué ainsi qu'il en est fait mention dans le *Bulletin technique* du 16 mai 1970 [5] [2] ; l'un, qui enseigna à Zurich, développe dans ses publications plutôt la solution avec coupures bien que connaissant à fond les deux solutions (voir [3]). La priorité pour le mode de calcul sans coupures, sans formation de dérivées de l'énergie revient au professeur Mayor de Lausanne qui présenta un Mémoire à l'Académie des sciences ; celle-ci n'aurait pas pris en considération la solution avec coupures laquelle était déjà trop connue. Il y a concordance entre le nombre des inconnues et celui des équations. La Chaire de statique de Lausanne faisait varier les coordonnées des nœuds, mode de faire dont les avantages ne sont plus discutés. C'est ce que l'auteur de la publication n° 104 de l'EPUL [2] a très bien montré en traitant le problème planimétriquement. Le calcul des déformations y fut peu développé par contre ; les lignes qui suivent apportent une modeste contribution à cet aspect du problème ; en outre c'est spatialement que les équations furent développées.

Outre-Rhin de grands progrès furent ainsi réalisés ; le calcul des ellipsoïdes de déformation des nœuds est devenu courant. C'est un élément assez nouveau qui doit devenir familier aux praticiens. Comme on le verra ci-après ce calcul peut être effectué avant de connaître les forces extérieures, c'est-à-dire les termes absolus des équations aux déformations ; mais l'échelle de ces surfaces n'est alors pas connue, c'est-à-dire l'ellipsoïde dit moyen. Pour le praticien ce n'est pas l'essentiel ; c'est immédiatement après avoir formé la matrice de rigidité que le staticien constate la forme très défavorable d'un ellipsoïde. Il apporte alors des modifications à la structure et aux poids des barres. Si l'on fait des coupures, les termes absolus sont fournis par le système dit fondamental (Grundsystem) ; on fera volontiers un calcul semi-graphique. B. Mayor obtenait des termes absolus à partir d'équations

[1] Texte rédigé en hommage à la Chaire de statique de Lausanne (professeur Mayor) et patronné par l'Institut de statique de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne.

[2] Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie en fin d'article.

d'équilibre. Cet éminent professeur calcula simultanément, en priorité, les déplacements des nœuds, les tensions et les réactions des liaisons ([1] p. 52).

Travail de déformation constant

Considérons le cas simple d'un seul nœud libre (sommet pylône), l'équation fondamentale est, sous forme générale, pour une barre, les inconnues étant des variations de coordonnées, pas des différentielles.

$$v = adx + b\,dy + c\,d\,z + f \text{ (avec coupures)}$$
$$(a^2 + b^2 + c^2 = 1)$$

admettons $p = 1$ pour les poids des barres dont les longueurs varient de la quantité v ($f =$ terme absolu). Faire des coupures paraît être une complication ; en réalité ce n'est pas si simple. On a recours à un système dit fondamental (Grundsystem), lequel est arbitraire. La condition somme des $vv =$ constant exprime que le travail de déformation (énergie potentielle) est *constant* (dans la publication n° 104 EPUL somme $ww =$ constant pour $p = 1$). Sans calcul on voit quel est le lieu. Les poids p sont proportionnels au coefficient d'élasticité E, à la section transversale de la barre et à l'inverse de sa longueur ($v = mT$; $m =$ module de la barre et T l'effort axial; le poids est proportionnel à $\frac{1}{m}$).

Exemple :

$[p/P] = 3$ (3 inconnues)

Barres	a	b	c	p	P
1-2	+0,577	+0,577	+0,577	1	4/3
1-3	+0,577	−0,577	+0,577	1	4/3
1-4	−0,577	−0,577	+0,577	1	4/3
1-5	−0,577	+0,577	+0,577	1	4/3

Sommes paa, pbb, pcc, égales à $^4/_3$; sommes pab, pac, pbc sont nulles.

Lorsque l'ellipsoïde de déformation du seul nœud libre est sphérique les poids des inconnues sont égaux aux poids à posteriori des barres. Les rayons sont proportionnels à $\sqrt{1/P}$ et leurs centres répondent à la condition du minimum. Les trois éléments diagonaux de la matrice de rigidité sont égaux à $^4/_3$. L'ellipsoïde se réduit à un point pour une certaine valeur de la constante.

Cas de trois barres (système statiquement déterminé)

Barres	a	b	c	p	P
1-2	+0,707	−0,408	+0,577	1	1
1-3	0	+0,816	+0,577	1	1
1-4	−0,707	−0,408	+0,577	1	1

Les sommes paa, pbb, pcc sont égales à 1 ; les sommes des pab, pac, pbc sont nulles.

Dans les deux cas la somme des $p/P = 3$ (3 inconnues).

On a encore une sphère de déformation mais dont le rayon est égal à 1,15 fois le précédent, car il y a une barre de moins ($1,15 = \sqrt{4/3}$). Ici les v sont nuls; la sphère dite moyenne est indéterminée. Quand il y a plus d'un nœud libre le calcul est moins simple. Les équations développées ci-après sont à appliquer.

On peut réaliser la forme sphérique pour une paire de nœuds libres ; au-delà, les calculs deviennent trop laborieux ; pratiquement, il suffit d'éviter des formes trop défavorables (voir publication EPUL n° 95). Une solution intéressante consiste à appliquer la théorie dite de *l'équivalence* ; celle-ci permet de substituer à une structure à barres surabondantes une autre statiquement déterminée. Considérons à cet effet deux pylônes comptant respectivement 4 et 3 barres.

Barres	a	b	c	p	P
1-2	+0,817	0,00	+0,577	0,64	0,915
1-3	0,00	−0,817	+0,577	0,96	1,20
1-4	−0,817	0,00	+0,577	0,64	0,915
1-5	0,00	+0,817	+0,577	0,96	1,20

$[p : P] = 3$ (3 inconnues) ; les nœuds 2 à 9 sont fixes.

Barres	a	b	c	$p = P$
1-7	+0,653	+0,490	+0,577	1,0
1-8	0,00	−0,817	+0,577	1,2
1-9	−0,653	+0,490	+0,577	1,0

On obtient pour ces deux structures les mêmes matrices de rigidité ainsi que pour leurs inverses. Le système étant déterminé l'ellipsoïde dit moyen ne l'est plus.

$$\begin{bmatrix} 0,854 & 0 & 0 \\ 0 & 1,28 & 0 \\ 0 & 0 & 1,067 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1,170 & 0 & 0 \\ 0 & 0,781 & 0 \\ 0 & 0 & 0,937 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\text{Somme } pvv}{0} = \frac{0}{0} \text{ (pour 3 barres).}$$

Les longueurs des axes principaux de l'ellipsoïde de déformation au sommet du pylône sont proportionnelles à : $\sqrt{1,170} = 1,08$, $\sqrt{0,781} = 0,88$, $\sqrt{0,937} = 0,97$ (valeurs favorables)

La somme des trois éléments diagonaux ($1,170 + 0,781 + 0,937$) est un invariant par rapport à l'orientation des axes de coordonnées ; cette propriété est connue. Au centre de l'ellipsoïde le point répondant à la condition du minimum de travail de déformation (voir publication EPUL n° 68).

Pour la barre reliant les nœuds (x, y, z) et (x', y', z') on a la forme générale :

$$v = a\,(dx - dx') + b\,(dy - dy') + c\,(dz - dz') + f$$

et pour les dérivées de l'énergie, sous forme implicite :

Somme $pav = [pav] = 0 \quad [pbv] = 0 \quad [pcv] = 0$ .....
les p étant les poids ; $[paf]$, $[pbf]$, $[pcf]$ .... sont les termes absolus. Les f sont déduits du système dit fondamental (Grundsystem) ; ils sont arbitraires.

Les équations aux coefficients de poids des inconnues sont dans le cas de trois inconnues :

$$[paa]\,Q_{xx} + [pab]\,Q_{xy} + [pac]\,Q_{xz} = 1$$
$$[pab]\,Q_{xx} + [pbb]\,Q_{xy} + [pbc]\,Q_{xz} = 0$$
$$[pac]\,Q_{xx} + [pbc]\,Q_{xy} + [pca]\,Q_{xz} = 0$$

$$[paa]\,Q_{yx} + [pab]\,Q_{yy} + [pac]\,Q_{yz} = 0$$
$$[pab]\,Q_{yx} + [pbb]\,Q_{yy} + [pbc]\,Q_{yz} = 1$$
$$[pac]\,Q_{yx} + [pbc]\,Q_{yy} + [pbc]\,Q_{yz} = 0$$

$$[paa]\,Q_{zx} + [pab]\,Q_{zy} + [pac]\,Q_{zz} = 0$$
$$[pab]\,Q_{zx} + [pbb]\,Q_{zy} + [pbc]\,Q_{zz} = 0$$
$$[pac]\,Q_{zx} + [pbc]\,Q_{zy} + [pcc]\,Q_{zz} = 1$$

$$Q_{xy} = Q_{yx} \qquad Q_{xz} = Q_{zx} \qquad Q_{yz} = Q_{zy}$$
(coefficients non quadratiques)

ce qui fournit les éléments des matrices de rigidité et inverse

$$\begin{bmatrix} [paa] & [pab] & [pac] \\ & [pbb] & [pbc] \\ & & [pcc] \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} \\ & Q_{yy} & Q_{yz} \\ & & Q_{zz} \end{bmatrix}$$

Les poids à posteriori P sont obtenus en appliquant la loi de propagation des poids ; pour trois inconnues on a :

$$\frac{1}{P_i} = a_i^2 Q_{xx} + b_i^2 Q_{yy} + c_i^2 Q_{zz} + 2a_ib_i Q_{xy} + 2a_ic_i Q_{xz} + + 2b_ic_i Q_{yz}$$

$$= 1, 2, 3 \ldots n$$

$$\begin{aligned}[p : P]_1^n = [paa]\, Q_{xx} + [pab]\, Q_{xy} + [pac]\, Q_{xz} \\ + [pab]\, Q_{xy} + [pbb]\, Q_{yy} + [pbc]\, Q_{yz} \\ + [pac]\, Q_{xz} + [pbc]\, Q_{yz} + [pcc]\, Q_{zz} = \\ = 1 + 1 + 1 = 3 \text{ (3 inconnues)}\end{aligned}$$

c'est le théorème de mathématiques appliquées qui est appelé à jouer un rôle en même temps qu'un autre moyen de contrôle dit par « sigma » (sigmaprobe).

La différence $[pvv]-[pff]$ est calculable à triple :

1° directement ;
2° en fonction des inconnues ;

3° $[pvv]-[pff] = -\dfrac{[paf]^2}{[paa]} - \dfrac{[pbf \cdot 1]^2}{[pbb \cdot 1]} - \dfrac{[pcf \cdot 2]^2}{[pcc \cdot 2]} \ldots$

où les dénominateurs sont positifs. C'est le moment redouté des praticiens, même si on dispose d'une calculatrice. On peut faire le calcul à double : *avec* puis *sans* coupures ou encore changer d'axes de coordonnées. L'absence de contrôle est dangereuse.

Considérons encore le cas d'un pylône à 7 barres, ce qui fournit 7 paires de plans tangents à une sphère de déformation (Formänderungskugel).

Barres	a	b	c	p
1-2	+0,142	+0,804	+0,577	1
1-3	+0,625	−0,525	+0,577	1
1-4	−0,767	−0,279	+0,577	1
1-5	+0,490	+0,653	+0,577	0,75
1-6	+0,653	−0,490	+0,577	0,75
1-7	−0,490	−0,653	+0,577	0,75
1-8	−0,653	+0,490	+0,577	0,75

On réalise la même matrice de rigidité : pour le premier groupe de trois barres et pour les quatre autres, soit

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En d'autres termes on a deux sphères de rayon r et une résultante de rayon $0{,}707r = r/\sqrt{2}$.

Tandis que pour les 7 barres c'est la matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Le rayon de la sphère de déformation est alors réduit dans la proportion $1{,}414 = \sqrt{2}$ car $P = 2$; ($[p : P] = 3$).

Jusqu'ici il suffisait de rendre constant le travail de déformation.

Calcul d'une coupole

à 22 barres, 4 sommets libres, 12 inconnues et 10 barres surabondantes. Ici on confrontera les résultats obtenus en opérant un changement d'axes de coordonnées ; quelle est l'orientation la plus avantageuse ? C'est un moyen de contrôle.

La structure est symétrique par rapport aux axes xy et $x'y'$

Nœuds libres	x	y	z	Nœuds libres	x'	y'	z'
1	+1	0	1	1	+0,707	−0,707	1
2	0	−1	1	2	−0,707	−0,707	1
3	−1	0	1	3	−0,707	+0,707	1
4	0	+1	1	4	+0,707	+0,707	1
Nœuds fixes				Nœuds fixes			
5	+2	0	0	5	+1,414	−1,414	0
6	0	−2	0	6	−1,414	−1,414	0
7	−2	0	0	7	−1,414	+1,414	0
8	0	+2	0	8	+1,414	+1,414	0

Unité de mesure arbitraire dans les deux cas.

Barres	a	b	c
1-5	−0,50	+0,50	+0,707
1-6	+0,866	+0,289	+0,41
1-7	+0,670	−0,670	+0,316
1-8	−0,289	−0,866	+0,41

Rotation des axes $xy = 45°$
(voir figure) nouveaux $x' y' z'$

Poids 0,80 pour les barres 1-2, 2-3, 3-4, 4-1
» 0,70 » » » 1-3, 2-4
» 1,27 » » » 1-5, 2-6, 3-7, 4-8
» 1,00 » » » 1-6, 1-7, 1-8, 2-5, 2-7, 2-8
3-5, 3-6, 3-8, et 4-5, 4-6, 4-7

Quant aux poids P des barres à posteriori, ils peuvent présenter beaucoup d'intérêt. C'est le cas traité dans le numéro 10 du *Bulletin technique*, mais sans changement d'axes de coordonnées, qui fournit ces valeurs P ($0{,}358 < p/P < 0{,}810$).

Il ne paraît pas nécessaire de transcrire les tableaux des coefficients des inconnues et les matrices de rigidité et leurs inverses le seront partiellement.

Une des solutions permet de mieux éliminer les coefficients de poids non quadratiques, ce qui est un avantage.

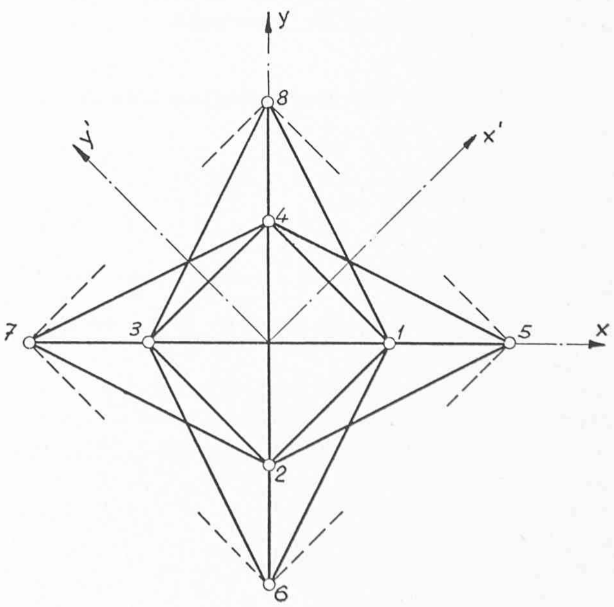

Fig. 1.

Ici encore les 12 inconnues peuvent être éliminées ; 10 équations en v, v_2, v_3 ..... subsistent (extrémum lié).

Matrices de ririgidité

Avant rotation des axes x et y

nœuds 1 et 2

$$\left[\begin{array}{llllll}
3{,}37 & 0 & 0 & -0{,}40 & -0{,}40 & 0 \text{ - - -} \\
 & 2{,}14 & 0 & -0{,}40 & -0{,}40 & 0 \text{ - - -} \\
 & & 1{,}07 & 0 & 0 & 0 \text{ - - -} \\
 & & & 2{,}14 & 0 & 0 \text{ - - -} \\
 & \text{symétrique} & & & 3{,}37 & 0 \text{ - - -} \\
 & & & & & 1{,}07
\end{array}\right]$$

Après rotation

nœuds 1 et 2

$$\left[\begin{array}{llllll}
2{,}75 & -0{,}62 & 0 & -0{,}80 & 0 & 0 \text{ - - -} \\
 & 2{,}75 & 0 & 0 & 0 & 0 \text{ - - -} \\
 & & 1{,}07 & 0 & 0 & 0 \text{ - - -} \\
 & & & 2{,}75 & +0{,}62 & 0 \text{ - - -} \\
 & \text{symétrique} & & & 2{,}75 & 0 \text{ - - -} \\
 & & & & & 1{,}07
\end{array}\right]$$

Matrices inverses

(Calcul par Centre électronique EPFL)

$$\left[\begin{array}{llllll}
0{,}339 & 0 & 0 & +0{,}079 & +0{,}025 & 0 \text{ - - -} \\
 & 0{,}535 & 0 & +0{,}102 & +0{,}079 & 0 \text{ - - -} \\
 & & 0{,}935 & 0 & 0 & 0 \text{ - - -} \\
 & & & 0{,}535 & 0 & 0 \text{ - - -} \\
 & \text{symétrique} & & & 0{,}339 & 0 \text{ - - -} \\
 & & & & & 0{,}935
\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{llllll}
0{,}438 & +0{,}099 & 0 & +0{,}143 & -0{,}039 & 0 \text{ - - -} \\
 & 0{,}438 & 0 & +0{,}039 & +0{,}015 & 0 \text{ - - -} \\
 & & 0{,}935 & 0 & 0 & 0 \text{ - - -} \\
 & \text{symétrique} & & 0{,}438 & -0{,}099 & 0 \text{ - - -} \\
 & & & & 0{,}438 & 0 \text{ - - -} \\
 & & & & & 0{,}935
\end{array}\right]$$

Propriété d'invariance

Ici il y a un premier contrôle :

$$\begin{array}{lcl}
0{,}339 & & 0{,}438 \\
0{,}535 & & 0{,}438 \\
\underline{0{,}935} & & \underline{0{,}935} \\
1{,}81 & = & 1{,}81 = Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz}
\end{array}$$

La somme des trois éléments diagonaux relatifs à un nœud est indépendante de l'orientation des axes de coordonnées. Cela résulte de la propriété de la sphère orthoptique, lieu des sommets des trièdres trirectangles enveloppant l'ellipsoïde de déformation des nœuds (Formänderungsellipsoïd).

Si l'on pose provisoirement $M = \pm 1$ pour la déformation quadratique moyenne relative à l'unité de poids, les valeurs $\sqrt{0{,}935} = 0{,}97$ et $\sqrt{0{,}438} = 0{,}66$ fournissent la longueur d'un axe principal comme précédemment pour 0,935 tandis que 0,66 donne les segments sur les axes de coordonnées de plans tangents normaux à ces axes. Ce n'est pas très brillant mais admissible.

Quant aux poids à posteriori P des barres ils sont indépendants de l'orientation des axes de coordonnées (somme $p/P = 12$) ; des paires de plans tangents à l'ellipsoïde et normaux aux barres sont déterminés en fonction des P.

Dans son remarquable Mémoire à l'Académie des sciences B. Mayor, pour être complet, envisagea le cas où des nœuds se déplacent sur des surfaces. C'est la forme générale du problème avec des équations de condition liant les inconnues. Il en résulte une théorie générale qui fut traitée dans le *Bulletin technique* du 14 juin 1969. Une remarque s'impose : les coefficients a, b, c, ... des inconnues ne sont pas théoriquement les mêmes si on fait oui ou non des coupures ; pratiquement on ne fait pas de différence en général.

En conclusion on peut dire que ce problème est plus vaste que l'admettent certains auteurs. La solution de Mayor sans coupure des barres surabondantes, sans formation de dérivées de l'énergie et évitant des équations en surnombre est remarquable. C'est celle qui se prête le mieux au calcul électronique, ce qui la rend moderne. Mais la solution avec coupures n'est pas pour autant éliminée si l'on veut pousser le problème à fond ; elle se prête bien au calcul des ellipsoïdes de déformation des nœuds devenu courant (Formänderungsellipsoïd).

Quel que soit le mode de calcul des erreurs sont à craindre ; les moyens de contrôle sont : celui par les poids des barres à posteriori, la preuve dite par sigma, très connue, le double calcul, *avec* puis *sans* coupures ; enfin ce qui fut effectué ci-dessus, peut-être pour la première fois, un changement d'axes de coordonnées avec vérification de la propriété d'invariance.

Cette théorie des déformations (Verformungsgrössenverfahren) prend une importance dépassant toutes les prévisions.

BIBLIOGRAPHIE

[1] MAYOR, B. : *Cours de statique spatiale*, 1926 (épuisé).

[2] DUPUIS, G. : Publication EPUL n° 104.

[3] STÜSSI, F. : *Baustatik II* (Birkhäuser, Bâle).

[4] *Mémoires Association internationale des Ponts et Charpentes*, 1962.

[5] ANSERMET, A. : *Nouveaux développements en hyperstatique des systèmes articulés spatiaux* (*Bulletin technique*, 1970, n° 10).

Adresse de l'auteur :
Auguste Ansermet, Les Glycines, 1814 La Tour-de-Peilz.