Abaques pour l'addition de vecteurs

Autor(en): **Gardiol, F.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin technique de la Suisse romande**

Band (Jahr): **98 (1972)**

Heft 13: **SIA spécial, no 3, 1972**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-71552

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Solution sans coupures. Le but recherché en opérant des coupures de barres est d'obtenir des valeurs provisoires pour les inconnues. Ce fut le mérite du professeur Mayor d'éviter ce fractionnement des variations de coordonnées des nœuds. Cet éminent staticien considère seulement deux états : l'initial en faisant abstraction de la ou des forces et l'état final. Il n'y a pas d'état intermédiaire et pas de termes absolus dans les équations aux déformations, ce qui exclut la formation de dérivées partielles de l'énergie. Les coefficients a, b, c... ne sont, théoriquement, plus rigoureusement les mêmes que précédemment mais bien pratiquement. Cette méthode de Mayor redevient très actuelle comme l'auteur de la publication EPUL nº 104 le montra. Un choix n'est pas très facile ; éventuellement, à titre de contrôle, on calculera avec coupures puis sans coupures.

Quel que soit le mode de calcul il convient d'insister sur le rôle que joue l'ellipsoïde de déformation des nœuds (Formänderungsellipsoid) ; il manque encore un élément : la déformation quadratique moyenne relative à l'unité de poids. Mais pour le praticien cet élément joue un rôle secondaire car il ne contribue pas à fixer la forme mais l'échelle de la surface.

Quant aux essais et recherches sur modèles réduits préconisés par certains Instituts ils fournissent des éléments de contrôle mais ne suffisent pas toujours et occasionnent parfois des frais non négligeables.

Pour un groupe d'ellipsoïdes de déformation des nœuds c'est moins simple : on forme la matrice de rigidité et son inverse. Tous les éléments nécessaires sont alors connus.

Covariance. Bien que cette notion soit traitée à fond dans la littérature ([3], p. 107) il convient d'en faire mention. Au lieu de rendre minimum la somme des $p\ v\ v$ (travail déformation) il faut considérer l'expression : $[p\ v\ v] + p_{12}\ v_1\ v_2 + p_{13}\ v_1\ v_3 + \ldots$

Il y a deux matrices : $\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$ et l'inverse $\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix}$

dites respectivement des poids, et des cofacteurs.

Le contrôle par les poids a posteriori n'est plus applicable. D'autres éléments de cet important problème ont fait l'objet de précédentes publications ; il n'est pas nécessaire de les développer à nouveau.

Conclusions

La solution relative aux systèmes surdéterminés au sens de la méthode des moindres carrés, développée dans le cours d'analyse numérique EPFL, se prête de façon remarquable au calcul de structures articulées à barres surabondantes. Elle permet notamment de calculer les ellipsoïdes de déformation des nœuds [4], élément jouant un rôle capital car si une de ces surfaces est très aplatie ou au contraire sphérique ce n'est pas la même chose. Ce calcul est devenu courant.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Descloux : *Analyse numérique* (cours EPFL).
[2] F. Stüssi : *Baustatik I, II* (Birkhäuser Bâle).
[3] H. Wolf : *Ausgleichungsrechnung* (Dümmlersverlag, Bonn).
[4] A. Ansermet : *Neue Methode zur Berechnung von statisch unbestimmter Fachwerkkuppeln*, Chaire de statique Zürich (publication subsidiée par le Fonds national).

Adresse de l'auteur :
Auguste Ansermet
Villa Les Glycines
Case postale 106, 1814 La Tour-de-Peilz

Abaques pour l'addition de vecteurs

par F. GARDIOL, professeur à l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne

1. Introduction

Qu'il s'agisse de l'ingénieur civil ou mécanicien devant déterminer la résultante d'un ensemble de forces ou de contraintes, du physicien qui étudie les vitesses et les accélérations dans des référentiels en mouvement ou de l'ingénieur électricien qui manipule des flèches de Fresnel pour la résolution d'un problème polyphasé déséquilibré, la plupart des ingénieurs sont amenés occasionnellement à additionner des grandeurs vectorielles. Lorsque les composantes de chaque vecteur sont données dans un repère cartésien, la résolution est immédiate et ne fait appel qu'à de simples additions. Par contre, lorsque les vecteurs sont spécifiés par leurs amplitudes et leurs directions respectives, le problème se complique : il faut alors déterminer les composantes dans un repère préalablement choisi, sommer ces composantes et finalement déterminer l'amplitude et la direction du vecteur résultant. Bien que ces différentes étapes de la résolution ne fassent appel qu'à des opérations algébriques et trigonométriques élémentaires, la résolution complète du problème n'en requiert pas moins un certain temps et peut donner lieu à des erreurs. Ce processus peut être fortement accéléré à l'aide des deux abaques présentés ici. Ces abaques permettent par ailleurs d'obtenir une meilleure compréhension du problème, comme on pourra le constater dans les exemples donnés par la suite.

De nos jours, grâce à l'ordinateur, l'addition de vecteurs ne présente aucun problème pour l'utilisateur disposant du programme de calcul adéquat. L'ingénieur peut néanmoins faire appel occasionnellement à la méthode graphique présentée ici qui, si elle est moins précise, permet de déterminer directement des ordres de grandeur ou de vérifier des résultats de calculs à l'ordinateur (précaution toujours souhaitable mais souvent oubliée...).

2. Utilisation des abaques

On cherche la résultante $\vec{C}$ de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$, donnés chacun par leur module A et B et les angles φ_A et φ_B qu'ils font avec un axe de référence $\times$ situé dans le même plan (fig. 1). On définit ces deux vecteurs de façon à avoir $A \geqq B$. Le vecteur somme est représenté de même par son amplitude C et par l'angle φ_C.

Note : Ce diagramme est directement utilisable pour l'addition de grandeurs complexes (phaseurs, flèches de Fresnel) ; on a dans ce cas

$$\underline{A} = A\, e^{j\varphi_A} \quad \text{et} \quad \underline{B} = B\, e^{j\varphi_B}$$

L'axe des $\times$ correspond ici à l'axe des réels, et le soulignage dénote un nombre complexe.

Pour déterminer les paramètres de la résultante $\vec{C}$, on calcule tout d'abord les valeurs suivantes :

$$B/A \leqq 1 \quad \text{et} \quad |\varphi_B - \varphi_A| \leqq 180°$$

On trace ensuite sur l'abaque 1 une ligne droite joignant les points correspondants aux valeurs de $|\varphi_B - \varphi_A|$ (échelle de gauche) et B/A (échelle de droite) calculées ci-dessus. L'intersection avec la droite du centre donne l'amplitude relative de la résultante C/A.

On procède de même pour trouver la phase relative de la résultante $|\varphi_C - \varphi_A|$ à l'aide de l'abaque 2 : l'échelle de $|\varphi_B - \varphi_A|$ correspond ici à la courbe de droite, celle de B/A à la section de droite du milieu et l'angle de la résultante est donné par l'intersection avec l'échelle de gauche.

On obtient alors facilement l'amplitude et l'angle du vecteur résultant :

$$C = C/A \cdot A$$

$$\varphi_C = \varphi_A + |\varphi_C - \varphi_A| \cdot \text{sign}\,(\varphi_B - \varphi_A)$$

où $\text{sign}\,(\varphi_B - \varphi_A) = +1$ si $\varphi_B > \varphi_A$
et $= -1$ si $\varphi_B < \varphi_A$

3. Quelques exemples d'application

a) *Vecteurs indiqués en fig. 1 :*

$$A = 10 \text{ cm} \qquad B = 6 \text{ cm}$$
$$\varphi_A = 64° \qquad \varphi_B = 13°$$

On calcule ici $B/A = 0{,}6$ et $|\varphi_B - \varphi_A| = 51°$.

A l'aide des deux abaques, on trouve ensuite

$$C/A = 1{,}45 \quad \text{et} \quad |\varphi_C - \varphi_A| = 19°$$

et finalement

$$C = 14{,}5 \text{ cm} \quad \varphi_C = 64° + 19° \times (-1) = 45°$$

Les valeurs exactes obtenues par calcul sont ici $C = 14{,}53$ cm et $\varphi_C = 45{,}33°$. On constate ainsi la bonne correspondance entre les valeurs calculées et celles obtenues de façon graphique.

b) *Différence de deux vecteurs*

On souhaite connaître les paramètres du vecteur $\vec{T}$, qui est donné par

$$\vec{T} = \vec{P} - \vec{R} \quad \text{avec} \quad R > P$$

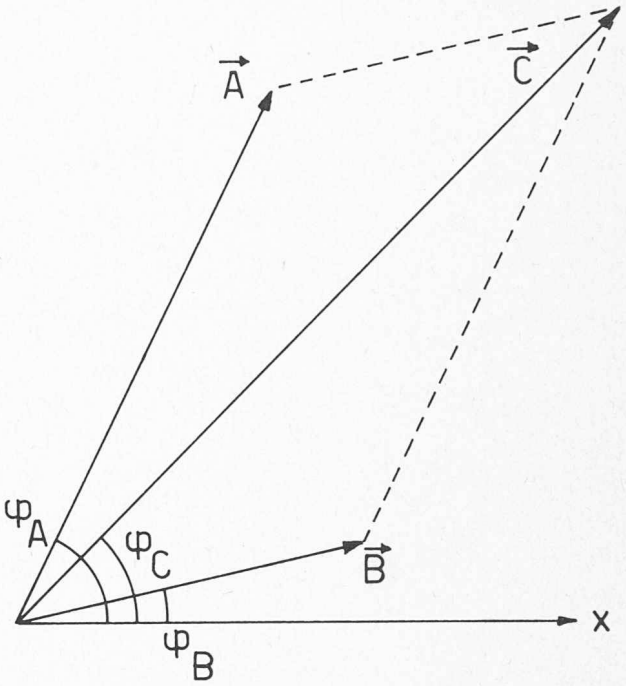


Fig. 1. — Diagramme de l'addition vectorielle.

On pose ici :

$$\vec{A} = -\vec{R} \quad (A = R,\ \varphi_A = \varphi_R \pm 180°)$$
$$\vec{B} = \vec{P}$$

On procède ensuite de la même manière que précédemment (selon a).

Note : Cette relation peut aussi être écrite sous la forme d'addition

$$\vec{P} = \vec{T} + \vec{R}$$

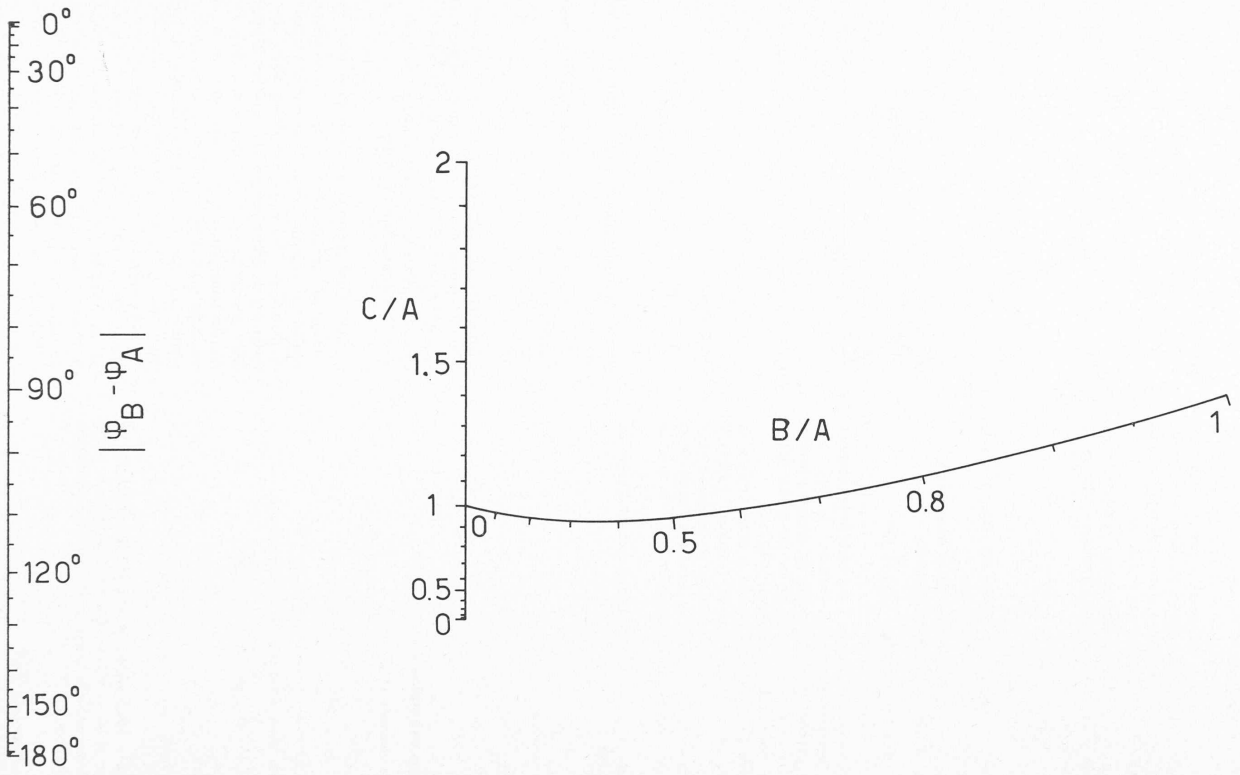
Toutefois ici l'inconnue $\vec{T}$ se trouve dans le membre de droite. On ne sait donc pas a priori si T est plus grand ou plus petit que R. Il n'est donc pas possible de procéder à une identification avec $\vec{A}$ et $\vec{B}$ (à moins de disposer d'informations complémentaires).

c) *Effet d'une perturbation sur la phase d'un signal*

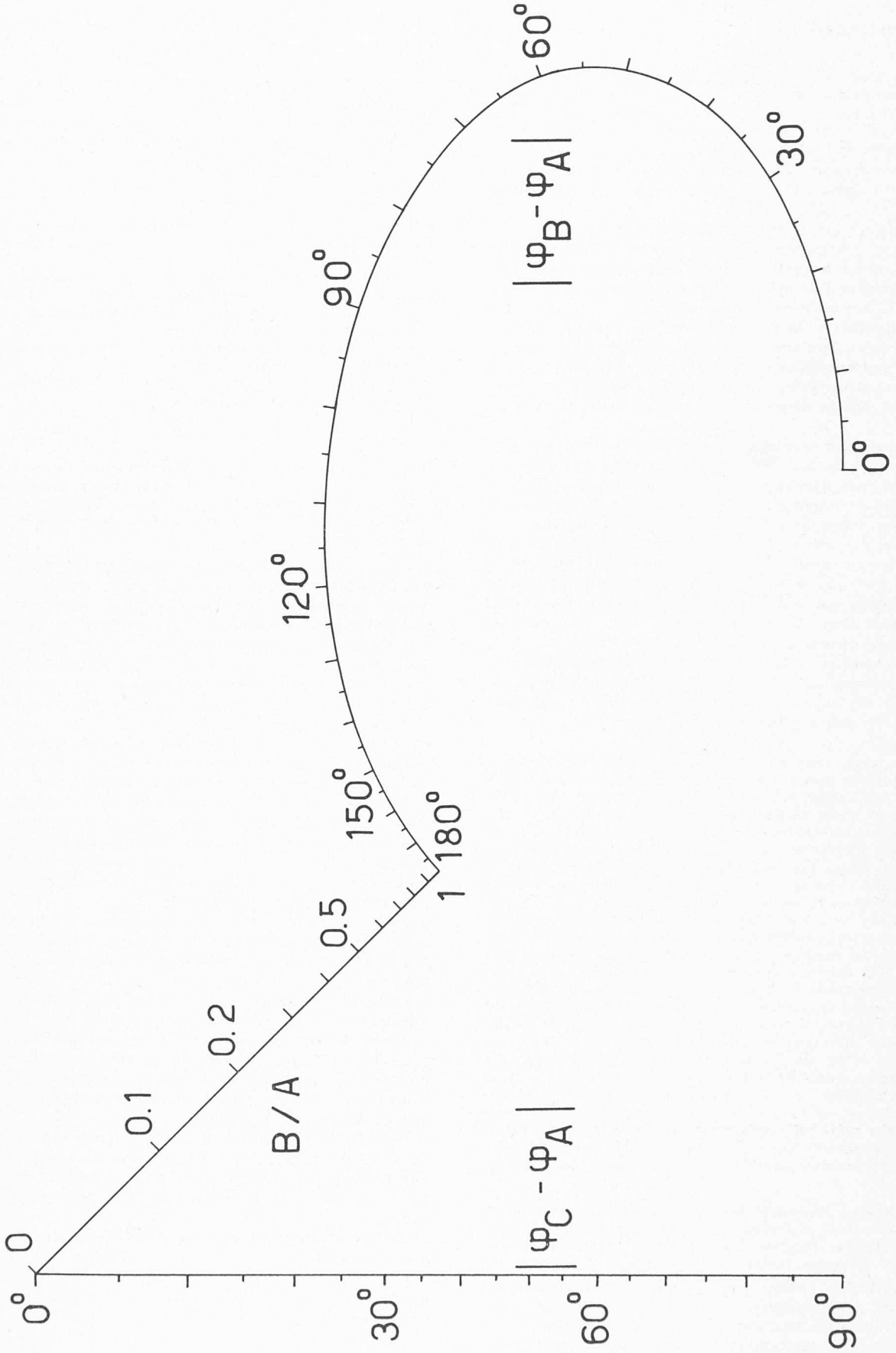
Dans des applications de télécommunications, l'information est contenue dans la phase du signal transmis (modulations *FM*, *PM*). On désire alors connaître les variations de phase qui peuvent être provoquées par des effets perturbateurs (bruit, diaphonie), dont l'amplitude est plus faible que celle du signal mais dont la phase n'est pas définie. On représentera donc ici le signal par A, la perturbation par B et on cherchera l'écart de phase maximum. Afin de résoudre ce problème, on considère l'abaque N° 2. Le rapport connu B/A est reporté sur l'échelle du milieu. On considère alors toutes les droites qui passent par ce point et qui ont une intersection avec la courbe de droite : on constate que celle qui donne lieu à l'écart de phase maximum (échelle de gauche) est tangente à cette courbe, ce qui permet de résoudre immédiatement le problème. Par exemple, lorsque $B/A = 0{,}4$, on obtient

$$|\varphi_C - \varphi_A|_{\max} = 24°$$

(la valeur exacte donnée par le calcul est ici de 23,58°).



Abaque 1 : Détermination de l'amplitude du vecteur résultant.



Abaque 2 : Détermination de la direction (phase) du vecteur résultant.

Résumé : *L'amplitude et la direction (phase) du vecteur résultant d'une addition ou d'une soustraction vectorielle peuvent être déterminés facilement à l'aide de deux abaques lorsque les mêmes grandeurs des deux vecteurs composants sont données.*

Adresse de l'auteur :
Professeur F. Gardiol,
Chaire d'électromagnétisme et d'hyperfréquences de l'Ecole polytechnique fédérale,
Chemin de Bellerive 16,
1007 Lausanne.