Réflexions sur l'utilisation des méthodes de calcul des réseaux d'énergie électrique

Autor(en): **Morf, J.-J.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin technique de la Suisse romande**

Band (Jahr): **101 (1975)**

Heft 16

PDF erstellt am: **01.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-72569

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Réflexions sur l'utilisation des méthodes de calcul des réseaux d'énergie électrique

par J.-J. MORF, Lausanne

1. Analogies et différences des calculs de réseaux d'eau, de gaz et d'électricité

Pour compléter les exposés précédents, il convient de montrer d'une part que ces méthodes peuvent aussi s'appliquer à l'étude des réseaux d'eau et des réseaux de gaz à condition de bien maîtriser les analogies utilisables dans chaque cas. Ce sera l'objet du premier exposé.

D'autre part, dans le second exposé, l'attention sera attirée sur un risque inhérent à la méthode de calcul par itération du problème classique du « load-flow » des réseaux électriques. Cette méthode ne donne qu'*une* solution alors que pour le problème posé il en existe en général plusieurs.

L'étude des conduites d'eau et de gaz présente certaines analogies avec celle des lignes électriques. Il faut cependant être conscient de deux faits importants :

1° Le choix de l'analogie est toujours arbitraire ; suivant le problème étudié, il convient de choisir une analogie plutôt qu'une autre ; si le choix est bien fait, elle peut apporter une meilleure compréhension du phénomène.

2° Le choix d'une analogie convenant pour résoudre un problème bien déterminé peut conduire à des conclusions totalement fausses pour d'autres problèmes. Il faut donc user des analogies avec la plus grande prudence.

1.1 Exemple 1 : *Transmission d'ondes le long d'une conduite d'eau et le long d'une ligne électrique*

La propagation d'ondes de tension et de courant le long d'une ligne monophasée peut être calculée à partir des équations aux dérivées partielles

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = R'i + L'\frac{\partial i}{\partial t} \qquad (1)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = G'u + C'\frac{\partial u}{\partial t} \qquad (2)$$

Pour les phénomènes très rapides ou à fréquence très élevée les termes $R'i$ et $G'u$ sont souvent négligeables par rapport aux termes $L'\frac{\partial i}{\partial t}$ et $C'\frac{\partial u}{\partial t}$ de telle sorte que l'on calcule comme si R' et G' étaient nuls. (En régime continu stationnaire ce sont les termes $L'\frac{\partial i}{\partial t}$ et $C'\frac{\partial u}{\partial t}$ qui doivent être négligés.)

Les mêmes équations permettent de calculer la propagation d'ondes de pression et de débit le long d'une conduite d'eau ou de gaz.

Pour ce type de calcul, les analogies suivantes peuvent être proposées.

Symbole	Ligne électrique	Conduite d'eau horizontale	Conduite de gaz horizontale
$u(x,t)$	tension à l'abscisse x à l'instant t en V	pression 1) à l'abscisse x à l'instant t en N/m²	pression 1) à l'abscisse x à l'instant t en N/m²
$i(x,t)$	courant à l'abscisse x à l'instant t en A	débit à l'abscisse x à l'instant t en m³/s 2)	débit massique à l'abscisse x à l'instant t en kg/s 2)
R'	résistance ohmique linéique en Ω/m	résistance hydraulique linéique en Ns/m⁶ 3)	résistance linéique au passage du gaz en 1/sm² 3)
G'	conductance transversale linéique en S/m	perditance linéique de la conduite en m⁴/Ns 4)	perditance de la conduite en s 4)
L'	inductance linéique en H/m	coefficient d'inertie linéique en kg/m⁵ 5)	coefficient d'inertie linéique en 1/m² 5)
C'	capacité transversale linéique en F/m	coefficient d'élasticité de la conduite en m⁴/N 6)	coefficient de compressibilité linéique en s² 6)

Remarques

1) Si les conduites ne sont pas horizontales, il faut ajouter les pressions statiques aux pressions calculées.

2) On considère l'eau incompressible, ce qui est exclu pour le gaz. Il convient de définir des débits conservatifs pour respecter le lemme de Kirchhoff.

3) En courant continu comme en débit continu stationnaire l'équation (1) donne

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -R'i \text{ donc après intégration } u = u(0) - R'xi ;$$

pour un débit i constant, la chute de tension ou la chute de pression est proportionnelle à la longueur de la ligne ou de la conduite pour autant que la section soit constante. Il faut toutefois attirer l'attention sur une différence fondamentale (voir tableau ci-dessus).

En électricité, on admet généralement en première approximation que la résistance linéique R' est indépendante du courant, alors qu'en hydraulique et en thermodynamique une telle approximation est jugée insuffisante (fig. 1).

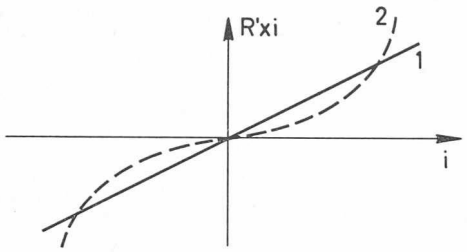

Fig. 1. — Non-linéarité de la « résistance hydraulique ».
1) chute de tension électrique en fonction du courant i
2) perte de pression hydraulique en fonction du débit i
(x = longueur de la ligne ou de la conduite considérée)

4) Pour une conduite saine $G' = 0$, pour une ligne électrique on peut en général négliger le terme $G'u$.

5) La grandeur L' traduit l'effet de l'inertie de l'eau (ou du gaz) dans la conduite; pour accélérer la masse en mouvement, il faut en effet une différence de pression (fig. 2).

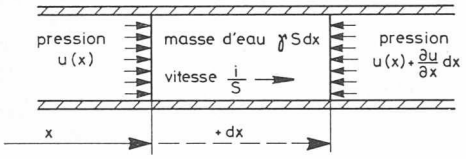

Fig. 2. — Effet de l'inertie de l'eau.
force = masse × accélération
$-\frac{\partial u}{\partial x} dx \cdot S = \gamma S dx \frac{\partial i/S}{\partial t}$ d'où $-\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\gamma}{S}\frac{\partial i}{\partial t}$
comparer à l'équation (1) $L' \equiv \frac{\gamma}{S}$

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\gamma}{S}\frac{\partial i}{\partial t} \quad \text{(comparer à l'équation (1))}$$

Pour l'eau, le coefficient d'inertie linéique est donné par la relation $L' = \frac{\gamma}{S}$ où

γ = masse spécifique de l'eau, 1000 kg/m^3
S = section de la conduite en m^2

(Pour le gaz, la vitesse est donnée par $\frac{i}{\gamma S}$; on trouve alors $L' = \frac{1}{S}$)

6. La grandeur C' traduit l'effet de l'élasticité de la conduite d'eau (ou l'effet de la compressibilité du gaz). On sait qu'une augmentation de pression u produit un agrandissement de la section de la conduite d'eau $S = S_o + C'u$ (C' en $\frac{m^2\, m^2}{N}$) (fig. 3), et par conséquent $-\frac{\partial i}{\partial x} = C'\frac{\partial u}{\partial t}$ (comparer à l'équation (2))

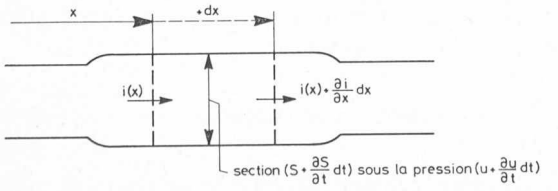

Fig. 3. — Effet de l'élasticité de la conduite.
accroissement de volume = accroissement de section × longueur
$-\frac{\partial i}{\partial x} dx\, dt = C'\frac{\partial u}{\partial t} dt\, dx$ d'où $-\frac{\partial i}{\partial x} = C'\frac{\partial u}{\partial t}$
comparer à l'équation (2)

(Pour le gaz, il faut tenir compte de la compression adiabatique.

En général, les variations de température ont un effet négligeable, de sorte que la masse spécifique du gaz γ peut être considérée comme proportionnelle à sa pression u:

$\gamma = k\, u \quad \left(k \text{ en } \frac{\text{kg m}^2}{\text{m}^3 N}\right)$

On retrouve $-\frac{\partial i}{\partial x} = C'\frac{\partial u}{\partial t}$, mais cette fois $C' = S \cdot k$ et s'exprime en $\text{m}^2 \frac{\text{kg m}^2}{\text{m}^3 N} = s^2$).

Pour autant que l'on puisse négliger les termes $R'\, i$ et $G'\, u$ dans les équations (1) et (2), vis-à-vis des termes $L'\frac{di}{dt}$ et $C'\frac{\partial u}{\partial t}$, ce qui est admissible pour l'étude de propagations d'ondes à front raide ou d'ondes alternatives à fréquence relativement élevée, on obtient :

(3)
$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= L'\,C'\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\ \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} &= L'\,C'\,\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}\end{aligned}}$$

On sait que ces équations sont satisfaites pour des fonctions quelconques $u_p(y)$ et $u_r(z)$ avec $y = x - \frac{t}{\sqrt{L'C'}}$ et $z = x + \frac{t}{\sqrt{L'C'}}$

On trouve finalement :

$$u(x,t) = u_p\left(x - \frac{t}{\sqrt{L'C'}}\right) + u_r\left(x + \frac{t}{\sqrt{L'C'}}\right)$$

$$i(x,t) = \frac{u_p\left(x - \frac{t}{\sqrt{L'C'}}\right) - u_r\left(x + \frac{t}{\sqrt{L'C'}}\right)}{\sqrt{\frac{L'}{C'}}}$$

La fonction u_p est l'expression d'une onde progressive de tension (ou de pression) qui est accompagnée par une onde progressive simultanée de courant (ou de débit) représentée par $\frac{u_p}{\sqrt{\frac{L'}{C'}}}$

Ces deux ondes progressives sont parfaitement semblables entre elles, de même signe et en phase.

La fonction u_r est l'expression d'une onde rétrograde de tension (ou de pression); elle est accompagnée par une onde rétrograde de courant (ou de débit) représentée par $-\frac{u_r}{\sqrt{\frac{L'}{C'}}}$. Ces deux ondes rétrogrades sont parfaitement semblables entre elles, de signes opposés et en phase. Par contre, les ondes rétrogrades peuvent être d'une forme différente de celle des ondes progressives.

$\frac{1}{\sqrt{L'C'}}$ est la vitesse de propagation d'onde en m/s dans les trois cas (électricité, eau, gaz);

$\sqrt{\frac{L'}{C'}}$ est l'impédance caractéristique de la ligne ou de la conduite et s'exprime

en Ω pour la ligne électrique,

en $\frac{\text{kg}}{\text{m}^4\ \text{s}}$ pour la conduite d'eau,

en $\frac{1}{\text{s} \cdot \text{m}}$ pour la conduite de gaz.

Si l'on termine la ligne ou la conduite par son « impédance caractéristique », il n'y a pas de réflexion. (Il s'agit d'une résistance pour la ligne, d'un diaphragme pour la conduite.)

Si l'on termine la ligne par un interrupteur ouvert ou la conduite par un robinet fermé, il y a réflexion positive de l'onde u :

$$u_r\left(x_{\text{fin}} + \frac{t}{\sqrt{L'C'}}\right) = + u_p\left(x_{\text{fin}} - \frac{t}{\sqrt{L'C'}}\right)$$

et négative de l'onde i :

$$i_r\left(x_{\text{fin}} + \frac{t}{\sqrt{L'C'}}\right) = -i_p\left(x_{\text{fin}} - \frac{t}{\sqrt{L'C'}}\right) \qquad (4)$$

Si l'on termine la ligne par un court-circuit ou la conduite par un robinet ouvert, il y a réflexion négative de l'onde u :

$$u_r\left(x + \frac{t}{\sqrt{C'L'}}\right) = -u_p\left(x - \frac{t}{\sqrt{C'L'}}\right)$$

et positive de l'onde i :

$$i_r\left(x + \frac{t}{\sqrt{L'C'}}\right) = + i_p\left(x - \frac{t}{\sqrt{L'C'}}\right) \qquad (5)$$

Cette similitude des trois phénomènes de propagation (électricité, eau, gaz) a inspiré Louis Bergeron dans sa fameuse étude : *Du coup de bélier en hydraulique au coup de foudre en électricité* [1][1].

Les méthodes graphiques de Bergeron permettent de calculer élégamment les phénomènes relativement simples lors de variation brusque dans une conduite ou dans une ligne. Dès qu'il s'agit d'un réseau de conduites ou d'un réseau de lignes radial, bouclé ou maillé, il faut recourir à l'ordinateur.

1.2 Exemple 2 : *Calcul des flux en régime stationnaire dans un réseau d'eau (ou de gaz) et dans un réseau électrique*

Les similitudes entre réseau d'eau et réseau électrique en régime permanent sont différentes de celles qu'on vient d'évoquer dans l'exemple précédent. En fait, déjà pour les divers problèmes électriques, on a utilisé des similitudes diverses ; c'est ainsi que dans les tables à calcul à courant continu les résistances de la table représentent en images

des valeurs $\frac{X}{U_n}$ pour l'étude des chutes de tension provoquées par les puissances réactives représentées par les courants de la table ;

des valeurs $\frac{X}{U_n{}^2}$ pour l'étude des écarts de phase provoqués par les puissances actives représentées par les courants de la table ;

des réactances X pour l'étude des court-circuits (X_d, X_i et X_h suivant que l'on cherche la composante directe, inverse ou homopolaire du courant de court-circuit).

Ce n'est guère que pour calculer des chutes de tension dans un réseau à courant continu que les résistances de la table sont des images de résistances réelles.

Pour l'étude d'un réseau d'eau composé de conduites radiales, bouclées ou maillées en régime permanent ou quasi stationnaire, on peut prendre des méthodes semblables à celles utilisées pour les réseaux électriques. Dehousse, Coyette et Piraprez [2] en ont décrit une dont voici les étapes essentielles :

Considérons un réseau d'eau maillé à B branches et N nœuds. Dans notre exemple (fig. 4) $B = 6$ et $N = 5$.

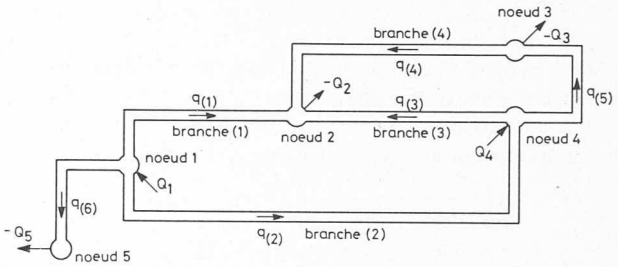

Fig. 4. — Réseau d'eau maillé à 6 branches et 5 nœuds.

Pour simplifier l'exemple, nous choisissons un réseau horizontal (si tel n'est pas le cas, il faut ajouter les pressions statiques provenant des différences d'altitude aux pressions qui vont être calculées).

On suppose le réseau d'eau défini géométriquement (diamètre des conduites, longueurs, rugosité, nombre de coudes, etc.).

Sur la base des données hydrauliques suivantes :

a) en chaque nœud de réseau arrivent (ou partent) des quantités d'eau données par unité de temps. Vu l'incompressibilité de l'eau, on peut exprimer les débits Q_i en m^3/s ou en kg/s. (Pour les gaz, il convient d'exprimer les débits en kg/s ; le débit volumique n'est pas conservatif, il peut être calculé en divisant le débit massique par la masse spécifique du gaz, laquelle est proportionnelle à la pression absolue et inversement proportionnelle à la température absolue, toutes deux dépendant de l'endroit et de l'instant considérés) ;

b) la pression P_i en un nœud est supposée connue (elle correspond à celle au bas d'un réservoir de grand volume réel ou fictif imaginé pour les besoins du calcul ; on remplace donc les pompes par des réservoirs fictifs fournissant la pression P_i).

Le problème des débits et des pressions consiste à déterminer les B débits dans les branches, les N débits injectés (ou soutirés) des nœuds connaissant les N pressions P_i aux N nœuds.

Pour ce faire, on dispose de B équations de Bernoulli, soit une pour chaque branche et de N équations de continuité exprimant que le débit Q_i injecté au nœud i est la somme algébrique des débits $q_{(j)}$ des branches partant du nœud i.

Au début, on assigne un sens positif arbitraire aux débits $q_{(j)}$ pour chaque branche ($(j) = (1) \ldots (B)$).

Il est aisé d'écrire la matrice d'incidence nœuds-branches K du réseau hydraulique.

[1] Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie en fin d'article.

$$
(6)\qquad
\begin{array}{c}
\\
N \text{ nœuds}
\end{array}
\overbrace{\begin{array}{c}
\\
\left\{\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\end{array}\right.
\end{array}}^{B \text{ branches}}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc}(1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6)\end{array}\\
\begin{pmatrix}
+1 & +1 & 0 & 0 & 0 & +1\\
-1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & +1 & -1 & 0\\
0 & -1 & +1 & 0 & +1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{pmatrix}
\end{array} = K
$$

Pour construire la matrice, il est plus aisé de considérer une branche après l'autre, compte tenu du sens positif adopté la branche (3)

part du nœud 4 donc $K_{4\,(3)} = +1$ et
aboutit au nœud 2 donc $K_{2\,(3)} = -1$

Après avoir passé en revue les B branches, on a déterminé $2\,B$ éléments $K_{i\,(j)}$ de la matrice K, tous les autres éléments sont nuls.

On retrouve une similitude parfaite avec la matrice d'incidence K d'un réseau électrique [1].

Par sa définition même, la somme des éléments d'une colonne quelconque de la matrice K est nulle

$$(+1-1+\underbrace{0+0+0}_{(N-2)})=0 \qquad (j)$$

La dernière ligne de la matrice K est donc obtenue par la somme des précédentes changée de signe ; elle dépend donc linéairement des $(N-1)$ lignes précédentes et n'apporte aucune information nouvelle. On peut donc réduire la matrice K à la matrice d'incidence nœuds-branches réduite C en supprimant une ligne de K (par exemple la dernière).

Il est évident que les débits Q_i « injectés » dans les nœuds i sont liés aux débits $q_{(j)}$ passant par les branches (j) par la relation

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_i \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix} = (K_{N\,(B)}) \cdot \begin{pmatrix} q_{(1)} \\ \vdots \\ q_{(j)} \\ \vdots \\ q_{(B)} \end{pmatrix}$$

ce que l'on notera pour simplifier par

$$(7)\qquad (Q_A) = (K) \cdot (q)$$

où (Q_A) est le vecteur des débits injectés aux accès (= nœuds)
et (q) est le vecteur des débits dans les branches.

D'autre part, pour chaque branche (j), l'équation de Bernoulli permet d'écrire (fig. 5) :

$$(8)\qquad p_{(j)} \equiv P_k - P_l \approx \sigma_{(j)} \cdot z_{(j)} \cdot q^2_{(j)} \qquad \begin{array}{l}B \text{ équations}\\(j) = (1) \ldots (B)\end{array}$$

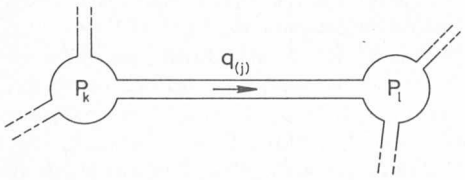

Fig. 5. — Branche (j) entre nœud k et nœud l.

En effet, la perte de charge $(P_k - P_l)$ *n'est pas une fonction linéaire du débit* (voir [2] et [3]), si l'on tient compte du « régime laminaire » pour les faibles débits, du régime « turbulent lisse » pour les moyens débits et du régime « turbulent rugueux » pour les forts débits, on constate qu'il conviendrait d'écrire :

$$(P_k - P_l) = {}^1z_{(j)}\, q^1_{(j)} + {}^3z_{(j)}\, q^3_{(j)} + {}^5z_{(j)}\, q^5_{(j)} + \ldots$$

la relation (8) n'est qu'une approximation parmi d'autres, valable pour le domaine prévisible $q_{(j)\,\min} < q_{(j)} < q_{(j)\,\max}$

$\sigma_{(j)} \equiv \dfrac{|q(j)|}{q_{(j)}}$ est une variable logique qui vaut évidemment $+1$ si $P_k > P_l$ et -1 si $P_k < P_l$;
elle donne le signe du débit $q_{(j)}$.

$z_{(j)}$ = résistance quadratique de la conduite (j) en $\dfrac{\text{kg}}{\text{m}^7}$

$q_{(j)}$ = débit volumique de la conduite (j) en $\dfrac{\text{m}^3}{\text{s}}$

P_k et P_l = pressions aux nœuds k et l en $\dfrac{\text{N}}{\text{m}^2}$.

(Si l'on traite des conduites de gaz, il faut tenir compte 1° du fait que le débit volumique croît du début à la fin de la conduite en raison de la diminution de pression et de masse spécifique ; 2° du fait que dans les étranglements le débit volumique est plus grand (pression et masse spécifique réduite) que dans les parties larges. C'est pourquoi il faut utiliser les débits *massiques* qui seuls sont conservatifs. Pour plus de détails, voir [3], pages 20-23.) Pour la suite des calculs nous en resterons à l'exemple des conduites d'eau pour lesquelles les débits volumiques sont pratiquement conservatifs, aux pressions et températures usuelles.

Soient $(P_A) = \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ P_k \\ \vdots \\ P_l \\ \vdots \\ P_N \end{pmatrix}$ le vecteur des pressions aux N nœuds (accès)

$(\sigma q^2) = \begin{pmatrix} \sigma_{(1)}\, q^2_{(1)} \\ \vdots \\ \sigma_{(j)}\, q^2_{(j)} \\ \vdots \\ \sigma_{(B)}\, q^2_{(B)} \end{pmatrix}$ le vecteur des carrés des débits de conduites (multipliés par le signe de $q_{(j)}$)

$(z) = \begin{pmatrix} z_{(1)} & & 0 & & 0 \\ & \ddots & & & \\ 0 & & z_{(j)} & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & & 0 & & z_{(B)} \end{pmatrix}$ la matrice diagonale des résistances quadratiques des conduites

et K la matrice des incidences nœuds-branches,
on peut alors écrire les B équations (8) sous la forme

$$(K)_T \cdot (P_A) = (z) \quad (\sigma q^2) \qquad (8)\ \textit{bis}$$

Pour l'exemple choisi (fig. 4), l'équation matricielle (8) *bis* donne les six équations suivantes :

$$\begin{aligned}
P_1 - P_2 &= z_{(1)} \cdot \sigma_{(1)}\, q^2_{(1)}\\
P_1 - P_4 &= z_{(2)} \cdot \sigma_{(2)}\, q^2_{(2)}\\
P_4 - P_2 &= z_{(3)} \cdot \sigma_{(3)}\, q^2_{(3)}\\
P_3 - P_2 &= z_{(4)} \cdot \sigma_{(4)}\, q^2_{(4)}\\
P_4 - P_3 &= z_{(5)} \cdot \sigma_{(5)}\, q^2_{(5)}\\
P_1 - P_5 &= z_{(6)} \cdot \sigma_{(6)}\, q^2_{(6)}
\end{aligned} \qquad (8)\ \textit{ter}$$

pour l'exemple de la figure 4

[1] Voir l'exposé de A. Germond et H. B. Püttgen sur la *Répartition des puissances dans un réseau électrique en régime permanent*, paru dans le *BTSR* n° 16 du 1.8.1974 et reproduit en page 11 du présent tiré à part.

et l'équation matricielle (7) donne les « injections » aux accès

$$
\begin{array}{lllllll}
Q_1 = & + q_{(1)} & + q_{(2)} & \ldots & \ldots & \ldots & + q_{(6)} \\
Q_2 = & - q_{(1)} & \ldots & - q_{(3)} & - q_{(4)} & & \\
Q_3 = & \ldots & \ldots & \ldots & + q_{(4)} & - q_{(5)} & \\
Q_4 = & \ldots & - q_{(2)} & + q_{(3)} & \ldots & + q_{(5)} & \\
Q_5 = & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & - q_{(6)}
\end{array}
\qquad (7)\ bis
$$

pour l'exemple de la figure 4

On vérifie facilement que $\sum_{i=1}^{N} Q_i = 0$, ce qui est évident si l'on utilise des débits conservatifs. (Ce ne serait pas le cas pour des débits volumiques de gaz.)

Plusieurs cas se présentent :

1.2.1 *Cas le plus simple*

Si l'on connaît les N pressions aux nœuds et les B résistances quadratiques des conduites, il est aisé de calculer les B carrés de débits $q^2_{(j)}$ ($(j) = (1) \ldots (B)$), par exemple:

$$q^2_{(3)} = \frac{P_4 - P_2}{z_{(3)} \cdot \sigma_{(3)}}$$

Le calcul du débit est aisé : $q_{(j)} = \sigma_{(j)} \sqrt{q^2_{(j)}}$.

(La variable logique $\sigma_{(j)}$ nous garantit automatiquement que le sens réel d'écoulement de l'eau va toujours du nœud à la pression la plus élevée au nœud à la pression la plus basse, quel que soit le sens positif arbitraire qui a été choisi initialement.)

Les N équations (7) nous donnent immédiatement les injections aux N nœuds.

Il y a là une analogie frappante avec le problème électrique : si l'on connaît les N tensions aux N nœuds (en modules et en phase) ainsi que les B impédances complexes des B branches, on peut immédiatement en déduire les B courants électriques complexes dans les B branches, puis les N courants complexes injectés aux N nœuds. Toutefois, une différence fondamentale subsiste : dans le réseau électrique, les relations entre courants et tensions sont linéaires, ce n'est qu'en passant aux puissances que les relations deviennent non linéaires ; dans le réseau d'eau, les relations non linéaires interviennent déjà entre les pressions et les débits.

1.2.2 *Cas plus difficile*

On donne $(N-1)$ « injections » positives ou négatives désirées en $(N-1)$ nœuds (une « injection négative » correspond à un soutirage) ainsi que la pression P_N au nœud N (nœud bilan).

Il est évident qu'on connaît immédiatement l'injection au nœud N

$$Q_N = -\sum_{i=1}^{(N-1)} Q_i$$

Restent à déterminer les T débits de conduites et les $(N-1)$ pressions inconnus.

Dans des cas très favorables (réseau radial ou débouclé), on peut théoriquement récrire l'équation matricielle (8) en la multipliant membre à membre par $(K)^{-1}_T$, *à condition que la matrice K soit carrée*. En général, ce n'est pas le cas. (On pourrait la rendre carrée par des artifices de calculs.)

Il est préférable d'utiliser une méthode itérative nous amenant à répéter plusieurs fois le calcul du cas le plus simple décrit précédemment en partant pour commencer de $(N-1)$ valeurs initiales des pressions aux $(N-1)$ nœuds en les choisissant arbitrairement, mais malgré tout assez judicieusement pour ne pas égarer l'ordinateur dans des calculs sans fin.

Admettons par exemple que l'on connaisse les débits « injectés » aux nœuds de la figure 4,

avec $Q_1 > 0$ $\quad Q_4 > 0$

$Q_2 < 0$ $\quad Q_3 < 0$

On calcule immédiatement $Q_5 = -(Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4)$; supposons $Q_5 < 0$ (le débit au nœud bilan est beaucoup plus rapidement calculé que la puissance au nœud bilan d'un réseau électrique, pour autant qu'aucune conduite n'ait des fuites fonctions de la pression !).

Partant de la pression P_5 connue que l'on désire avoir au nœud 5, il semble a priori assez judicieux de choisir

$$
\begin{array}{ll}
P_{10} > P_5 & \text{donc } \sigma_{(6)o} = +1 \\
P_{20} < P_{10} & \text{donc } \sigma_{(1)o} = +1 \\
P_{40} > P_{20} & \text{donc } \sigma_{(3)o} = +1 \\
P_{30} < P_{40} & \text{donc } \sigma_{(5)o} = +1
\end{array}
$$

l'indice 0 indique qu'il s'agit du premier choix arbitraire (mais raisonnable) des pressions. Ce choix étant fait on constate peut-être que $P_{40} > P_{10}$, donc $\sigma_{(2)o} = -1$ et éventuellement que $P_{30} < P_{20}$, donc $\sigma_{(4)o} = -1$ au départ.

N.B. — Les variables logiques $\sigma_{(j)}$ peuvent changer de signe au cours des itérations successives, ce qu'il est facile de programmer.

Partant de ce premier choix des pressions P_{io}, on calcule les débits dans les conduites et les débits injectés aux nœuds Q_{io}, correspondant à ce premier choix. Il est évident que $Q_{io} \neq Q_i$ désiré.

Pour le nouveau choix des pressions P_{i1}, on désire partir de nouvelles valeurs qui nous rapprochent si possible de la solution désirée. Comme les relations entre pressions et débits ne sont pas linéaires, il est nécessaire de les linéariser au voisinage des valeurs de départ.

Les $(N-1)$ dérivées partielles de $q_{(j)}$ par rapport aux $(N-1)$ pressions $P \ldots P_i \ldots P_k \ldots P_l \ldots P_{N-1}$ sont d'après l'équation (8)

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial q_{(j)}}{\partial P_k} = \dfrac{+1}{\sigma_{(j)} \cdot z_{(j)} \cdot 2\, q_{(j)o}} \text{ toujours} > 0 \\ \dfrac{\partial q_{(j)}}{\partial P_l} = \dfrac{-1}{\sigma_{(j)} \cdot z_{(j)} \cdot 2\, q_{(j)o}} \text{ toujours} < 0 \end{array}\right\} \text{pour les deux nœuds } k \text{ et } l \text{ adjacents à la branche } (j)$$

et $\dfrac{\partial q_{(j)}}{\partial P_i} = 0 \qquad \forall\, i \neq k$ ou l, soit pour tous les autres nœuds

Il est aisé de déduire maintenant les dérivées partielles de Q_i par rapport aux $(N-1)$ pressions indépendantes, ce qui donne le jacobien $(J) = \left(\dfrac{\partial Q}{\partial P}\right)$, matrice carrée $(N-1)\ (N-1)$.

Ces dérivées partielles permettent de déterminer en première approximation l'influence de chaque écart ΔP_i apporté à la pression choisie en chaque nœud i sur tous les débits $q_{(j)}$ des B branches et sur tous les débits Q_i injectés aux N nœuds.

En notation matricielle :

$$(\Delta Q_A) = (J) \cdot (\Delta P_A) \qquad (10)$$

$$\text{d'où } (\Delta P_A) = (J)^{-1} (\Delta Q_A) \qquad (11)$$

$$\text{avec } (\Delta P_A) = \begin{pmatrix} P_{11} - P_{10} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_{i1} - P_{i0} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_{(N-1)1} - P_{(N-1)0} \end{pmatrix}$$

Ce vecteur permet de passer de l'ancienne approximation à la nouvelle approximation

$(J)^{-1}$ = inverse de la matrice carrée du jacobien

$$(J) = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial P_1} & \frac{\partial Q_1}{\partial P_2} & \cdots & \frac{\partial Q_1}{\partial P_{(N-1)}} \\ \frac{\partial Q_2}{\partial P_1} & \frac{\partial Q_2}{\partial P_2} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q_{(N-1)}}{\partial P_1} & \cdots & & \frac{\partial Q_{(N-1)}}{\partial P_{(N-1)}} \end{pmatrix}$$

Cette matrice est très creuse, tous les termes concernant deux nœuds non reliés par une branche sont nuls. Elle doit être recalculée après chaque itération.

$$(\Delta Q_A) = \begin{pmatrix} Q_{1\,\text{dés.}} - Q_{1\,0} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ Q_{i\,\text{dés.}} - Q_{i\,0} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ Q_{(N-1)\,\text{dés.}} - Q_{(N-1)\,0} \end{pmatrix}$$

Ecarts entre les débits désirés et les débits donnés lors de l'approximation 0.

L'algorithme permettant de choisir les nouvelles valeurs P_{i1} est donné par

$$(12) \qquad (P_{A1}) = (P_{A0}) + (J)^{-1}\,[(Q_{A\,\text{désiré}}) \quad -(Q_{A0})]$$

La notation matricielle n'est là que pour simplifier l'exposé du problème. Dans la pratique, on programme directement chaque opération à effectuer. Voir à ce sujet [2], pages 1 à 27, article qui présente cette méthode de résolution du problème du réseau d'eau maillé par ordinateur. Elle transforme les données par deux procédés de linéarisation à choix que l'on résout par itérations. Les deux programmes proposés sont appliqués à un petit réseau et une application très importante montre l'efficacité du programme proposé. La figure 6 donne une vision graphique de ces approximations par itérations successives du même algorithme.

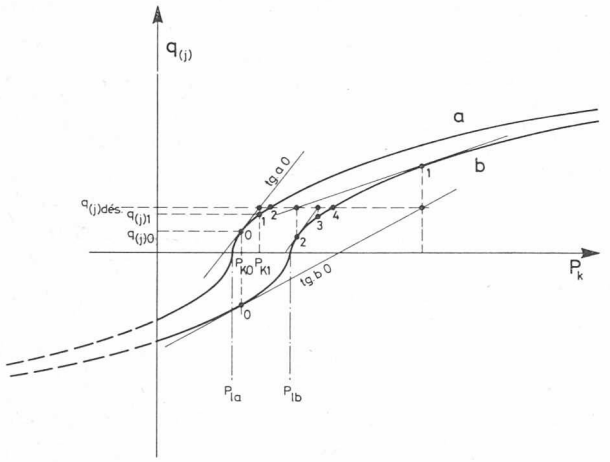

Fig. 6. — Allure du débit $q_{(j)}$ en fonction de p_k pour diverses valeurs de p_l.

$$q_{(j)} = \sigma_{(j)} \sqrt{\frac{\sigma_{(j)}\,(P_k - P_l)}{z_{(j)}}}$$

a $q_{(j)}\,(P_k)$ pour $P_l = P_{la}$ donné, tg a 0 tangente à la courbe a) au point P_{k0} $q_{(j)\,0}$ lors de la première itération, par itérations successives on trouve $P_{k1} \rightarrow q_{(j)\,1} \rightarrow$ tg a 1 $\rightarrow P_{k2} \rightarrow q_{(j)\,2}$ qui est assez voisin de $q_{(j)}$ désiré on peut arrêter le calcul.

b $q_{(j)}\,(P_k)$ pour $P_l = P_{lb}$ donné, tg b 0 tangente à la courbe b) au point P_{k0}, $q_{(j)\,0}$ etc. (Il faut deux itérations de plus pour obtenir $q_{(j)}$ désiré).

1.3 *Conclusion*

En conclusion, on peut remarquer que l'ordinateur permet de résoudre des problèmes de réseaux d'électricité, d'eau et de gaz qu'ils soient radiaux, bouclés ou maillés. On retrouve dans chaque cas des procédés similaires tels que matrice d'incidence, remplacement d'un problème compliqué non linéaire par itération d'un procédé de calcul relativement plus simple et linéaire, matrice Jacobienne des dérivées partielles, inversion, etc. Toutefois, les méthodes doivent être adaptées dans chaque cas spécifique à la nature du réseau (eau, gaz, électricité) et à la nature du problème à résoudre : coup de bélier, coup de foudre, régime transitoire lors de la fermeture ou de l'ouverture d'une vanne, du déclenchement ou de l'enclenchement d'un interrupteur, d'une rupture de conduite ou de son blocage par un bouchon, d'un court-circuit ou d'une rupture de conducteur. Les méthodes qui ont été plus particulièrement développées concernent des régimes permanents sinusoïdaux triphasés symétriques en électricité et des régimes permanents continus en hydraulique.

Il ne faut pas se laisser leurrer par les similitudes, les correspondances ne sont qu'apparentes; s'il y a une certaine ressemblance entre pressions hydrauliques et tensions électriques, les relations non linéaires qui apparaissent dès le départ en hydraulique n'interviennent qu'au stade du calcul des puissances en électricité. Il existe beaucoup plus de différences fondamentales que d'analogies entre les réseaux d'eau, de gaz et d'électricité. Songeons simplement au fait que les pertes de charge en hydraulique augmentent avec l'âge de la conduite, avec le nombre de coudes de la conduite et avec le nombre de toutes les modifications de forme localisées ([3], pages 41 à 113), toutes choses qui n'ont aucune correspondance en électricité. L'intérêt des puissances en jeu est primordial en électricité et tout à fait secondaire en distribution d'eau (conduites forcées des turbines exceptées). En distribution d'eau et de gaz, ce sont surtout les quantités livrées qui importent, donc les débits ; les pressions sous lesquelles ces débits sont livrés peuvent varier dans de très larges limites sans inconvénients, de pareilles marges pour les tensions seraient intolérables. Que dire enfin des réducteurs de pression qui ne sont rien d'autre que des destructeurs d'énergie ? Une pareille technique reviendrait à remplacer les transformateurs de quartier par des potentiomètres pour réduire les tensions à l'entrée des maisons.

Il n'en reste pas moins que l'ordinateur arithmétique se prête parfaitement bien à toutes ces formes de calcul.

2. Existence, inexistence ou multiplicité de solutions mathématiques réalisables ou irréalisables

Nous revenons sur le calcul des flux de puissances et des tensions d'un réseau électrique tel qu'il se présente le plus souvent. On connaît en général les puissances actives et réactives que l'on veut tirer ou fournir de chaque nœud. Le calcul classique de « load-flow » décrit dans l'exposé de A. Germond et H. B. Püttgen [1] permet alors de trouver *une* solution du problème, mais en général il y en a plusieurs. Fort heureusement le choix judicieux des valeurs initiales des tensions conduit l'ordinateur à trouver la solution qui est pratiquement réalisable, toutefois il faut savoir qu'il existe en réalité aussi d'autres solutions. Pour illustrer ce fait, nous partirons de l'exemple le plus simple, puis nous généraliserons la méthode à un réseau radial à N nœuds et B branches.

[1] Voir *BTSR* nº 16 du 1.8.1974, reproduit en pages 10 à 16 du présent tiré à part.

Cas le plus simple : $N = 2 \quad B = 1$ (fig. 7).

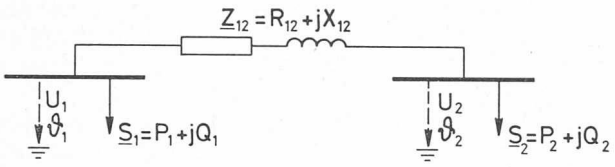

Fig. 7. — Réseau élémentaire à deux nœuds et à une ligne.

$\underline{U_1} = U_1 e^{j\vartheta_1}$ = première tension simple au nœud 1 multiplié par $\sqrt{3}$

$\underline{U_2} = U_2 e^{j\vartheta_2}$ = première tension simple au nœud 2 multipliée par $\sqrt{3}$

$\underline{I_{12}}$ = premier courant de ligne multiplié par $\sqrt{3}$

$\underline{Z_{12}}$ = impédance d'une phase de la ligne

Pour simplifier l'exposé l'effet des capacités transversales des lignes est inclus dans les puissances réactives consommées aux nœuds

$Q_1 = Q_1$ utilisé $- \dfrac{\omega C_{12} U^2_1}{2}$ et

$Q_2 = Q_2$ utilisé $- \dfrac{\omega C_{12} U^2_2}{2}$

I_{12} = courant mesuré au milieu de la ligne

2.2 *Problème élémentaire*

En général, l'impédance de ligne Z_{12} est bien connue et le problème serait relativement simple à résoudre si l'on connaissait a priori chaque tension en module ($U_1, U_2, \ldots$) et en phase ($\theta_1, \theta_2, \ldots$). Si tel était le cas, le programme de calcul se résumerait à peu de chose.

1) calculer $\underline{I_{12}} = \dfrac{\underline{U_1} - \underline{U_2}}{\underline{Z_{12}}}$

2) calculer $\underline{S_1} = -\underline{U_1} \cdot \underline{I^*_{12}}$

$P_1 = Re\{\underline{S_1}\}$ et $Q_1 = Im\{\underline{S_1}\}$

et $\underline{S_2} = +\underline{U_2} \cdot \underline{I^*_{12}}$

$P_2 = Re\{\underline{S_2}\}$ et $Q_2 = Im\{\underline{S_2}\}$

Tout serait maintenant connu. Posé ainsi, il existe toujours une solution mathématique complète et une seule. Pour savoir si cette solution est effectivement réalisable dans la pratique, il faut vérifier :

1° que la ligne peut supporter le courant $\dfrac{I_{12}}{\sqrt{3}}$ trouvé ;

2° que les utilisateurs et les générateurs existants en chaque nœud sont capables de consommer (ou de fournir) les puissances actives et réactives trouvées.

Remarquons à ce propos que, dans son principe, le calcul d'un réseau radial, bouclé ou maillé à N nœuds et B branches, n'est pas plus compliqué ; il comporte B opérations du type 1) et N opérations du type 2) sans aucun tâtonnement.

2.3 *Problème réel*

Dans la réalité, le problème ne se pose pas d'une façon si simple, car les données sont les puissances aux nœuds que l'on doit garantir et non pas les tensions qui peuvent varier dans de larges limites, encore moins les phases.

Des huit grandeurs U_1, θ_1, P_1, Q_1

U_2, θ_2, P_2, Q_2

seules quatre peuvent être en principe choisies arbitrairement.

Nous venons de voir qu'en partant de $U_1, \theta_1, U_2, \theta_2$, la solution du problème est immédiate ; il en serait de même en partant de U_1, θ_1, P_1, Q_1, ou de U_2, θ_2, P_2, Q_2. (Dans ce dernier cas, on calcule immédiatement les composantes actives $\dfrac{P_2}{U_2}$ et réactives $\dfrac{Q_2}{U_2}$ du courant $\underline{I_{12}}$ qui est alors connu, puis $\underline{U_1} = \underline{U_2} + \underline{Z_{12}} \cdot \underline{I_{12}}$ et enfin $\underline{S_1} = -\underline{U_1}\,\underline{I^*_{12}}$.)

Par contre, plus fréquemment, on connaît bien les puissances actives et réactives désirées en certains nœuds et la tension en un autre. C'est alors que tout se complique.

Examinons le cas où P_2 et Q_2 sont donnés ainsi que U_1 et θ_1 ; on cherche à connaître U_2 et θ_2 ainsi que P_1 et Q_1. Mathématiquement, ce problème présente deux solutions réelles, confondues ou imaginaires. En d'autres termes, il peut arriver que ce problème n'ait aucune solution mathématique réelle et que sa solution technique soit a fortiori irréalisable. Il arrivera aussi que le problème ait deux solutions mathématiques dont l'une est techniquement réalisable, l'autre difficilement réalisable. C'est pourquoi, il vaut la peine d'examiner ce cas plus en détail. Pour ce faire, nous introduisons dans le calcul une variable auxiliaire $\underline{Z_2} = Z_2 \dfrac{P_2 + jQ_2}{S_2}$, le module Z_2 réel variant de $-\infty$ à $+\infty$ en Ω.

L'ensemble des consommateurs (et des éventuelles génératrices) du nœud 2 est remplacé par cette impédance variable $\underline{Z_2}$ dont l'argument invariable est précisément celui de $\underline{S_2}$, soit arc tg $\dfrac{Q_2}{P_2}$

Le schéma se simplifie (fig. 8) :

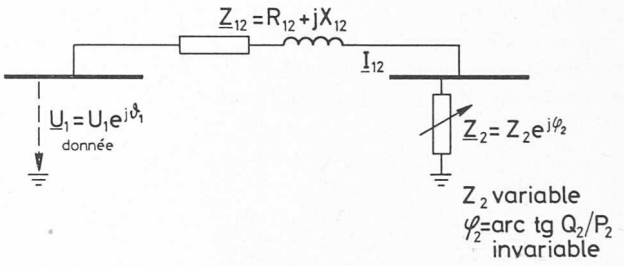

Fig. 8. — Remplacement des utilisateurs du nœud 2 par une impédance à module variable.

Le problème ainsi posé redevient simple ; on calcule immédiatement et dans l'ordre

1) $\underline{I_{12}} = \dfrac{\underline{U_1}}{\underline{Z_{12}} + \underline{Z_2}}$

puis 2) $\underline{S_2} = \underline{Z_2} I^2_{12}$ d'où $P_2 = Re\{\underline{S_2}\}$ et $Q_2 = Im\{\underline{S_2}\}$

enfin 3) $P_1 = -(P_2 + R_{12} \cdot I^2_{12})$

et $Q_1 = -(Q_2 + X_{12} \cdot I^2_{12})$

La solution graphique du problème est immédiate en représentant dans le plan $\underline{U_1}$ par un phaseur fixe ; on constate que l'extrémité du phaseur $\underline{U_2} = (\underline{U_1} - \underline{Z_{12}} \cdot \underline{I_{12}})$ décrit un cercle (voir fig. 9).

La puissance apparente vaut en module $S_2 = U_2 \cdot I_{12}$; elle est immédiatement calculable en effectuant le produit des segments $\overline{OB}$ et $\overline{BD}$ (exprimés en volts), divisé par l'impédance constante Z_{12} (en ohms).

$$S_2 = \overline{OB} \cdot \frac{\overline{BD}}{Z_{12}}$$

$$P_2 = S_2 \cos \varphi_2$$

$$Q_2 = S_2 \sin \varphi_2$$

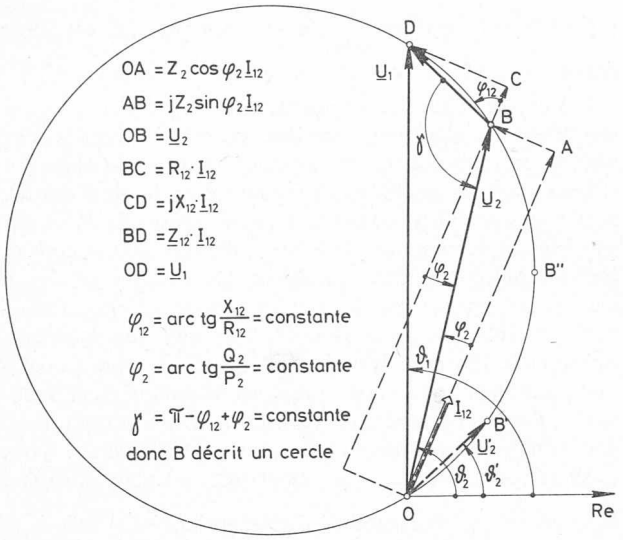

Fig. 9. — Lieu de $\underline{U}_2$ pour $\underline{Z}_2$ variant de $-\infty$ à 0 (à gauche de $\underline{U}_1$) et de 0 à $+\infty$ (à droite de $\underline{U}_1$). Il existe deux solutions (B et B') qui donnent la même puissance active P_2 et la même puissance réactive Q_2.

En représentant U_2 et P_2 en fonction de I_{12} (voir fig. 10), on constate mathématiquement qu'il peut y avoir deux solutions réelles si $P_2 < P_{2\,max}$, une solution double si $P_2 = P_{2\,max}$ et aucune solution si $P_2 > P_{2\,max}$. Dans le premier cas ($P_2 < P_{max}$), la solution B, U_2 et I_{12} est proche de la marche à vide et techniquement réalisable dans la pratique, tandis que la solution B', U_2' et I_{12}' est proche du court-circuit et pratiquement irréalisable.

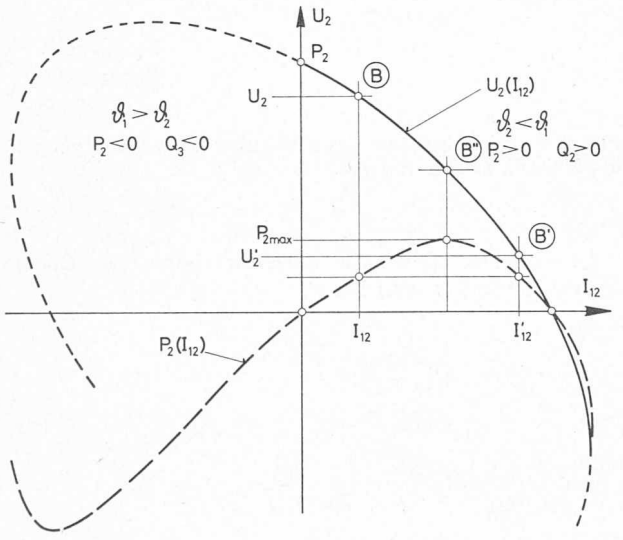

Fig. 10. — Représentation de U_2 et P_2 en fonction de I_{12} pour φ_2 = constante et $\underline{U}_1$ = constante.

La plus grande puissance utilisable correspond à $|Z_2| = |Z_{12}|$ (point B''); elle est égale au quart de la puissance de court-circuit si $\varphi_2 = \varphi_{12}$ et plus grande encore si $\varphi_2 \neq \varphi_{12}$. Comme dans la pratique, on part généralement de régimes plus voisins de la marche à vide que de la marche en court-circuit, les méthodes usuelles de calcul par itération partant des tensions à vide donnent presque toujours de bons résultats.

2.4 *Réseau à N nœuds et B branches*

Le réseau à N nœuds et B branches est facile à calculer si l'on part des N tensions complexes (N valeurs des U_i et N valeurs des θ_i). Toutefois, l'ordinateur est nécessaire à cause du grand nombre de nœuds et de branches.

Là de nouveau, le problème se complique si l'on part des $(N-1)$ puissances complexes désirées ($(N-1)$ valeurs de P_i et $(N-1)$ valeurs de Q_i) en ne fixant qu'une seule tension complexe $\underline{U}_N = U_N \cdot e^{j\theta_N}$ à un nœud quelconque.

Dans un réseau purement radial (fig. 11) si l'on fixe les $(N-1)$ valeur de $\underline{S}_i$ ($(N-1)$ P_i et $(N-1)$ Q_i) aux $(N-1)$ nœuds périphériques et qu'on choisit le nœud central N

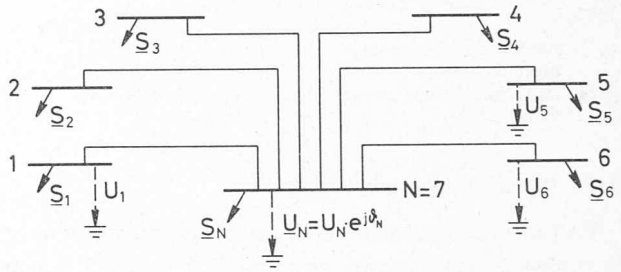

Fig. 11. — Réseau radial pour $N = 7$, B = N−1 = 6.

comme nœud bilan, avec une tension U_N et sa phase θ_N données, il peut y avoir mathématiquement zéro, une ou plusieurs solutions possibles jusqu'à 2 $(N-1)$. Ce n'est que dans la mesure où l'on part de données vraisemblables que l'on trouvera, après quelques itérations de calcul à l'ordinateur, la solution qui correspond à un fonctionnement réalisable, pour autant qu'elle existe mathématiquement et physiquement.

Pour un réseau bouclé ou maillé, le problème présente aussi plusieurs solutions.

2.5 *Conclusion*

Le praticien seul ne peut plus calculer les réseaux modernes, à cause du trop grand nombre de nœuds, de branches, de boucles et de mailles ; il a donc besoin du théoricien capable de programmer l'ordinateur.

Le théoricien seul se perd à coup sûr dans des solutions irréalisables s'il ne part pas de données réelles ou au moins réalisables ; il a donc besoin des informations du praticien.

En conclusion, une collaboration étroite et constante entre praticiens et théoriciens des réseaux électriques est indispensable si nous voulons dominer le fonctionnement de ce gigantesque appareil synchrone qu'est le réseau électrique d'Europe, auquel nous sommes tous raccordés.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. BERGERON : *Du coup de bélier au coup de foudre*. Dunod, Paris, 1950.

[2] M. M. DEHOUSSE, PH. COYETTE, E. PIRAPEZ : *Le calcul par ordinateur des réseaux maillés de distribution d'eau*. CERES, Liège, 1967.

[3] L. LEVIN : *Formulaire des conduites forcées, oléoducs et conduites d'aération*. Dunod, Paris, 1968.

Adresse de l'auteur :
Professeur J.-J. Morf
Chaire d'Installations Electriques EPFL
16, chemin de Bellerive
CH-1007 Lausanne (Suisse)