Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande

Band: 101 (1975)

Heft: 26

Artikel: Equations fondamentales du comportement des poutres-colonnes à section ouverte et parois minces

Autor: Vinnakota, Sriramulu / Badoux, Jean-Claude / Aoshima, Yasuyuki

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-72599

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Equations fondamentales du comportement des poutres-colonnes à section ouverte et parois minces

par SRIRAMULU VINNAKOTA, JEAN-CLAUDE BADOUX et YASUYUKI AOSHIMA

Introduction

Les équations fondamentales basées sur les déformations finies du comportement des poutres-colonnes à section ouverte et parois minces ont été établies par deux méthodes différentes, soit par la formulation physique (l'équilibre des forces), soit par la formulation mathématique (le théorème énergétique), ce qui nous permet d'avoir une meilleure compréhension du mécanisme de l'instabilité par torsion. Nous avons aussi montré que la théorie développée dans cette étude explique mieux le phénomène du déversement que la théorie existante.

Généralités

Il est connu que les pièces longues à section ouverte et parois minces sont sensibles à l'instabilité par torsion comme c'est le cas dans les phénomènes du déversement des poutres [1, 2, 3] [1], du flambage torsionnel des colonnes [4, 5] et du flambage biaxial des poutres-colonnes [6]. Depuis que Prandtl [1] et Michell [2] ont étudié séparément en 1899 le déversement d'une poutre à section rectangulaire, un grand nombre de recherches théoriques ont été faites pour décrire les équations fondamentales du comportement spatial des pièces longues. L'effet du gauchissement d'une section rectangulaire étant négligeable, Prandtl et Michell ne l'ont pas pris en considération. Timoshenko [3] est le premier qui en a tenu compte pour les profilés en double T. Une meilleure compréhension du phénomène d'instabilité par flexion et torsion suppose une connaissance approfondie du comportement des barres à section non-symétrique. En 1920, Eggenschwyler [7] a montré que le centre de gravité n'est pas le seul point caractéristique de la section. Maillart [8] a défini le centre de cisaillement. Wagner [9] a étudié le flambage torsionnel des profilés à section ouverte et parois minces et introduit le concept « gauchissement unitaire ». Mais ici, il a supposé que lors du flambage, le centre de rotation coïncide avec le centre de cisaillement, ce qui n'est pas juste en général. Ostenfeld [10] a relevé cette faute. F. Bleich et H. Bleich [11] ont développé les équations fondamentales du comportement des barres à section polygonale et parois minces, en utilisant le théorème de stationnarité de l'énergie potentielle totale. Kappus [12] a obtenu une théorie raffinée applicable à la section quelconque à parois minces, en utilisant le concept de Wagner « gauchissement unitaire » et le théorème de stationnarité de l'énergie potentielle totale. Goodier [13] a étudié le flambage torsionnel des colonnes et réussi à simplifier les équations fondamentales, en utilisant le centre de cisaillement comme origine du système de coordonnées. La théorie générale du comportement des pièces longues à section ouverte et parois minces a été systématisée par Chwalla [14], Kindem [15], Kappus [16], Timoshenko [17], Bleich [18], Vlassov [19], Kuranishi [20], Kollbrunner et Meister [21]. Cette théorie est traditionnellement appelée la théorie linéaire élastique.

Comme la majorité de ces recherches théoriques a été faite à l'époque où il n'y avait pas encore le développement actuel de l'ordinateur, les auteurs étaient obligés de linéariser les équations fondamentales pour les résoudre. Mais la meilleure compréhension du phénomène de l'instabilité nous oblige à établir les équations fondamentales basées sur les déformations finies. Roik, Carl et Lindner [22] ont développé les équations fondamentales en linéarisant le champ des déformations ainsi que celui des contraintes et en considérant l'équilibre des forces après déformation. Bâzant, Nimeiri [23] et Sakai [24] ont développé la théorie en linéarisant le champ des déformations, en introduisant la conception de la contrainte initiale (contrainte qui précède la perte de stabilité) et en utilisant le théorème des travaux virtuels des déformations finies. Le champ des déformations étant linéarisé, leurs théories peuvent être classifiées dans les théories linéaires des déformations finies.

Les progrès effectués dans le domaine des ordinateurs nous ont libéré de la restriction de cette linéarisation. Zamost et Johnston [25] ainsi que Trahair et Woolcook [26, 27] ont étudié le comportement post-critique du déversement. Soltis et Christiano [28] ont développé les équations non-linéaires des déformations finies du comportement des poutres-colonnes soumises à des moments et à une force axiale à leurs extrémités. Vinnakota et Aoshima [29] et Vinnakota et Aystol [40] ont établi les équations en considérant l'équilibre des forces par rapport à un système arbitraire d'axis. D'autre part, Ghobarah et Tso [30] ainsi que Nishino, Kasemset et Lee [31] ont utilisé le théorème énergétique. Nishino, Kurakata, Hasegawa et Okumura [32] ont complété la théorie précédente et discuté l'importance du choix du champ des déformations.

Il n'est pas toujours assuré que la linéarisation est juste. Récemment Nishino, Kasemset et Lee [31] ainsi que Trahair et Woolcook [26], ont montré que la théorie linéaire sous-estime la charge critique provoquant le déversement et qu'elle nous conduit également à une contradiction. Il est normal qu'une poutre soumise à un moment par rapport à l'axe faible ne déverse pas. Mais la théorie linéaire ne permet pas de démontrer ce fait. Le détail sera exposé dans le chapitre 6.

Le présent rapport essaie de formuler les équations fondamentales non-linéaires des déformations finies par deux méthodes différentes, soit par la considération de l'équilibre des forces (dans le chapitre 1, soit par le théorème énergétique (dans le chapitre 2).

Le problème envisagé ici n'est pas le phénomène des grandes déformations, connu sous le terme élastica, mais celui des déformations finies. Nous savons que des coques suffisamment longues peuvent être analysées comme des barres à parois minces [19, 23]. Particulièrement dans le cas de la section ouverte, l'analyse est encore réduite au problème d'une poutre à une dimension à l'aide des deux hypothèses suivantes [19] :

— la section transversale est suffisamment rigide pour ne pas se déformer,

— la déformation tangentielle est petite et négligeable (hypothèse de Bernoulli-Euler et hypothèse de Wagner).

Par conséquent, les poutres à âme pleine et d'une grande hauteur sortent du cadre de cette étude. Et la théorie qui sera discutée dans ce rapport traite du comportement des poutres-colonnes en profil laminé ou en profil composé soudé aux dimensions correspondantes.

1. Formulation physique par l'équilibre des forces

1.1 *Coordonnées*

La figure 1 présente une poutre-colonne soumise à des charges transversales entre ses extrémités, ainsi qu'à une force axiale, à des efforts tranchants, à des moments de flexion et torsion à ses extrémités. Il est peut-être utile de définir quatre systèmes de coordonnées (fig. 2) : le premier est X^o - Y^o - Z^o qui est fixé dans l'espace et l'axe Z^o est choisi comme l'axe de la poutre-colonne avant déformation; le deuxième est x - y - z qui est fixé au profil et bouge avec les déformations du profil; et le troisième est X - Y - Z dont l'origine coïncide avec celle de x - y - z mais qui reste toujours parallèle au système X^o - Y^o - Z^o. Ces trois systèmes sont à main droite. Le quatrième est s - n - z, dont

[1] Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie en fin d'article.

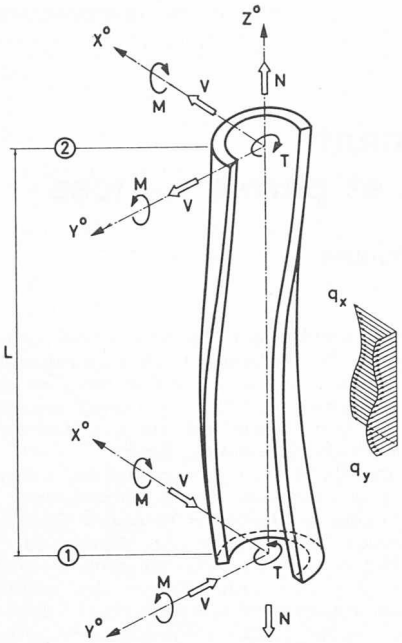

Fig. 1. — Charges extérieures.

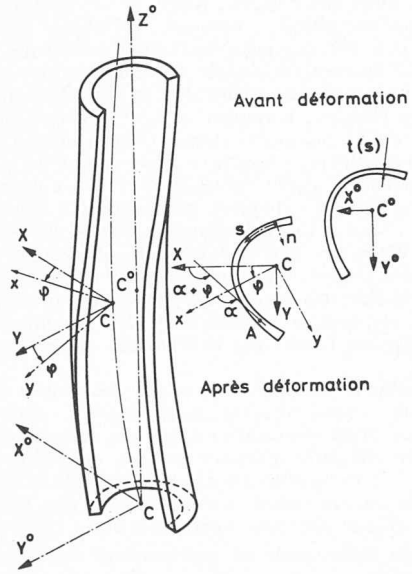

Fig. 2. — Coordonnées.

l'abcisse s est mesurée sur le contour de la section transversale. Il faut signaler que le troisième système X - Y - Z sera le plus utile lorsque l'équilibre des forces est considéré. En ce qui concerne la déformation de torsion, nous choisissons la définition du point selon les coordonnées Eulériennes.

Soit (X, Y) et (x, y) les coordonnées d'un point arbitraire A, respectivement dans le système X - Y et x - y ; la relation entre (X, Y) et (x, y) est :

$$X = x \cos \varphi - y \sin \varphi,$$
$$Y = y \cos \varphi + x \sin \varphi ; \qquad (1)$$
$$\varphi = \text{déformation de torsion.}$$

Le point S est souvent choisi au centre de cisaillement mais dans cette étude ce n'est pas absolument nécessaire (fig. 3). Les coordonnées d'un certain point S (x_s, y_s) dans le système $X-Y$ après déformation sont (X_s, Y_s), d'où :

$$X_s = x_s \cos \varphi - y_s \sin \varphi. \qquad (2)$$
$$Y_s = y_s \cos \varphi + x_s \sin \varphi.$$

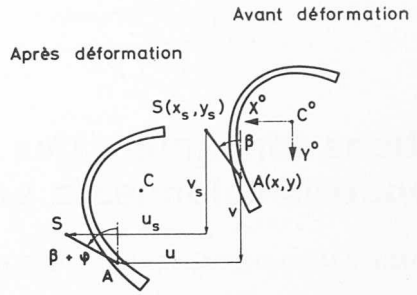

Fig. 3. — Champ des déformations.

En introduisant α comme angle de la tangente à la ligne du profil au point A (x, y) avec l'axe x, on obtient une relation entre $x-y$ et s (fig. 2) :

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha, \qquad \frac{dy}{ds} = \sin \alpha. \qquad (3)$$

D'après les équations (1) et (3), on obtient :

$$\frac{dX}{ds} = \cos (\alpha + \varphi), \qquad \frac{dY}{ds} = \sin (\alpha + \varphi). \qquad (4)$$

La relation entre s et la surface sectorielle ω, ayant son pôle au point S (x_s, y_s), s'écrit comme ci-après [19] :

$$\frac{d\omega}{ds} = (x-x_s) \sin \alpha - (y-y_s) \cos \alpha. \qquad (5)$$

A l'aide des équations (1) et (2), l'équation (5) s'écrit sous la forme suivante, légèrement différente :

$$\frac{d\omega}{ds} = (X-X_s) \sin (\alpha + \varphi) - (Y-Y_s) \cos (\alpha + \varphi). \qquad (6)$$

1.2 *Champ des déformations*

Soit u et v les projections du déplacement d'un point arbitraire A (x, y), respectivement sur les axes X^o et Y^o (fig. 3) ; ces deux composantes des déformations sont exprimées en fonction de celles appelées u_s et v_s d'un certain point S (x_s, y_s) et de la déformation de torsion φ (voir [29] ou appendice I) :

$$u = u_s - (y-y_s) \sin \varphi - (x-x_s) (1-\cos \varphi), \qquad (7)$$
$$v = v_s + (x-x_s) \sin \varphi - (y-y_s) (1-\cos \varphi).$$

La théorie linéaire existante [17, 18, 19] néglige les troisièmes termes dans l'équation (7) et remplace $\sin \varphi$ par φ. Mais dans la présente étude ces expressions sont gardées. L'importance de cette différence du champ des déformations sera discutée dans le chapitre 6.

A l'aide des équations (1) et (2), la première dérivée de l'équation (7) par rapport à Z est la suivante :

$$u' = u_s' - (Y-Y_s) \varphi', \qquad (8)$$
$$v' = v_s' + (X-X_s) \varphi'.$$

Etant donné que X' est égal à $-Y\varphi'$ et Y' est égal à $X\varphi'$, l'équation (8) peut s'écrire différemment :

$$u' = (u_s + X - X_s)', \qquad (9)$$
$$v' = (v_s + Y - Y_s)'.$$

1.3 *Equations d'équilibre*

Coupons la barre transversalement à la position Z et considérons une pièce coupée qui se trouve entre 0 et Z. La déformée de cette pièce et les contraintes normale σ

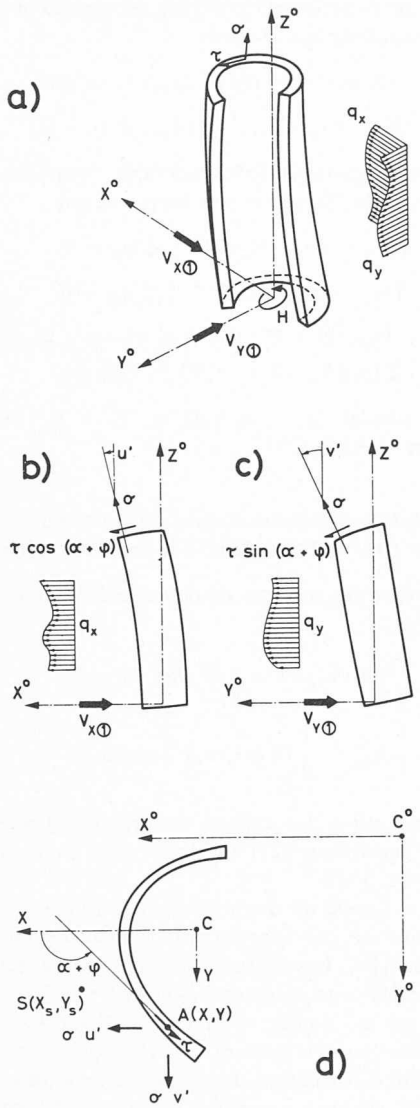

Fig. 4. — Pièce coupée.
a) Forces agissant sur la pièce coupée.
b) Projection sur le plan X^o - Z^o.
c) Projection sur le plan Y^o - Z^o.
d) Projection sur le plan X^o - Y^o.

et tangentielle τ agissant sur la surface coupée sont montrées à la figure 4 a. Les projections de σ et τ sur les plans $X^o - Z^o$ et $Y^o - Z^o$ sont respectivement montrées à la figure 4 b et c.

La condition d'équilibre des forces sur l'axe X^o de cette pièce peut s'écrire comme suit :

$$\int_A [\tau \cos(\alpha+\varphi) + \sigma u'] \, dA + \int_0^Z \Sigma q_x d\bar{Z} = V_{X1} : \quad (10)$$

Σq_x : somme des charges transversales q_x agissant à la position $\bar{Z}$ $(0 \leq \bar{Z} \leq Z)$,

V_{x1} : réaction d'appui au point ① selon l'axe X^o.

En remplaçant $\cos(\alpha+\varphi)$ et u' dans l'intégrale de l'équation (10) par les expressions (4) et (9), le premier terme de l'équation (10) peut s'écrire comme suit :

$$\int_A \tau \frac{dX}{ds} \, dA + \int_A \sigma \, (u_s + X - X_s)' \, dA.$$

En appliquant à la première intégrale l'intégration par parties, on obtient :

$$\tau t X \mid - \int_s \frac{\partial(\tau t)}{\partial s} X \, ds + \int_A \sigma X' \, dA + (u_s - X_s)' \int_A \sigma \, dA.$$

t : épaisseur des parois.

Etant donné que la contrainte tangentielle τ est égale à zéro à l'extrémité libre dans le cas de la section ouverte, le premier terme $\tau t X \mid$ peut être égal à zéro, en choisissant l'origine du domaine d'intégration à cette extrémité libre. D'après l'équation d'équilibre des contraintes suivants [19] :

$$\frac{\partial(\tau t)}{\partial s} + t \frac{\partial \sigma}{\partial Z} = 0, \quad (11)$$

on obtient :

$$\int_A \left(\frac{\partial \sigma}{\partial Z} X + \sigma X' \right) dA + (u_s - X_s)' \int_A \sigma dA =$$

$$= \int_A \frac{\partial(\sigma X)}{\partial Z} \, dA + (u_s - X_s)' \int_A \sigma dA.$$

En introduisant des efforts internes M_X et N :

$$M_X = \int_A \sigma X \, dA,$$

$$N = \int_A \sigma \, dA,$$

l'équation (10) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$M_X' + (u_s - X_s)' \, N + \int_0^Z \Sigma q_x \, d\bar{Z} = V_{X1}. \quad (12)$$

En dérivant une fois par rapport à Z, on obtient :

$$[M_X + (u_s - X_s) \, N]'' + \Sigma q_x = 0. \quad (13)$$

De la même façon, la condition d'équilibre des forces sur l'axe Y^o peut s'écrire comme suit :

$$M_Y' + (v_s - Y_s)' \, N + \int_0^Z \Sigma q_y \, d\bar{Z} = V_{Y1} ; \quad (14)$$

où : $M_Y = \int_A \sigma Y \, dA$;

V_{Y1} : réaction d'appui au point ① selon l'axe Y^o.

En dérivant une fois par rapport à Z, on obtient la deuxième équation fondamentale ci-après :

$$[M_Y + (v_s - Y_s) \, N]'' + \Sigma q_y = 0. \quad (15)$$

A la figure 4 d, les projections des contraintes normale σ et tangentielle τ à la position Z sur le plan X^o - Y^o, sont indiquées. La première torsion due à la contrainte tangentielle τ par rapport au point S, vaut :

$$\int_A \tau \, [(X - X_s) \sin(\alpha+\varphi) - (Y - Y_s) \cos(\alpha+\varphi)] \, dA.$$

D'après l'équation (6), l'expression ci-dessus devient :

$$\int_A \tau \frac{d\omega}{ds} \, dA.$$

En appliquant l'intégration par parties et en introduisant l'équation d'équilibre des contraintes (11), on obtient :

$$\int_A \frac{\partial(\sigma\omega)}{\partial Z} \, dA.$$

En introduisant un effort interne défini par :

$$M_\omega = \int_A \sigma\omega \, dA,$$

la torsion due à la contrainte tangentielle τ est exprimée par M'_ω.

La deuxième torsion due aux projections $\sigma u'$ et $\sigma v'$ de la contrainte normale par rapport au point S, vaut :

$$\int_A [\sigma v' (X-X_s) - \sigma u' (Y-Y_s)] \, dA.$$

A l'aide de l'équation (8), on obtient :

$$v'_s (M_X - X_s N) - u'_s (M_Y - Y_s N) + K \varphi' ;$$

où : $$K = \int_A \sigma [(X-X_s)^2 + (Y-Y_s)^2] \, dA =$$

$$= \int_A \sigma [(x-x_s)^2 + (y-y_s)^2] \, dA.$$

Par conséquent, en ajoutant la torsion de St. Venant T_s [19], la torsion due aux contraintes vaut :

$$M'_\omega + T_s + K\varphi' + v'_s (M_X - X_s N) - u'_s (M_Y - Y_s N).$$

Cette torsion ainsi que celle due aux charges extérieures agissant sur la partie de la pièce considérée qui se trouve entre 0 et Z sont en équilibre.

Premièrement, la torsion, par rapport au point S de la position Z, due aux réactions d'appui V_{X1} et V_{Y1}, vaut :

$$V_{X1} v_s - V_{Y1} u_s.$$

Deuxièmement, la torsion, par rapport au point S de la position Z, due aux charges transversales q_x et q_y agissant entre 0 et Z, vaut :

$$\int_0^Z \Sigma [q_x (\bar{Y}_q - \bar{Y}_s - v_s + \bar{v}_s) - q_y (\bar{X}_q - \bar{X}_s - u + \bar{u}_s)] \, d\bar{Z} ;$$

X_q, Y_q : coordonnées des points d'application des charges transversales après déformation.

La notation $\overline{\cdots}$ représente des valeurs seulement à la position de $\bar{Z}$ ($0 \leq \bar{Z} \leq Z$).

Les réactions d'appui et les efforts tranchants sur appui sont en équilibre mais il ne sont pas toujours sur la même ligne ; dans ce cas, ils provoquent une torsion. S'il y a des déplacements aux extrémités, les réactions provoquent une tension additionnelle. Etant donné que ces torsions additionnelles sont indépendantes de Z, on peut les poser égales à H. En présence de torsions extérieures, ces dernières sont ajoutées à H [29].

La condition d'équilibre de la torsion, de la partie de la pièce considérée, peut s'écrire comme suit :

$$M'_\omega + T_s + K\varphi' + v'_s (M_X - X_s N) - u'_s (M_Y - Y_s N) =$$

$$= V_{X1} v_s - V_{Y1} u_s + \int_0^Z \Sigma [q_x (\bar{Y}_q - \bar{Y}_s - v_s + \bar{v}_s) -$$

$$- q_y (\bar{X}_q - \bar{X}_s - u_s + \bar{u}_s)] \, d\bar{Z} + H. \qquad (16)$$

En dérivant l'équation (16) par rapport à Z, on obtient :

$$M''_\omega + T'_s + (K\varphi')' + v''_s (M_X - X_s N) - u''_s (M_Y - Y_s N) +$$

$$+ v'_s (M_X - X_s N)' - u'_s (M_Y - Y_s N)' =$$

$$= V_{X1} v'_s - V_{Y1} u'_s + \Sigma [q_x (Y_q - Y_s) - q_y (X_q - X_s)] +$$

$$+ u'_s \int_0^Z \Sigma q_x \, d\bar{Z} - v'_s \int_0^Z \Sigma q_y \, d\bar{Z}.$$

A l'aide des équations (12) et (14), on obtient la troisième équation fondamentale ci-après :

$$M''_\omega + T'_s + (K\varphi')' + v''_s (M_X - X_s N) - u''_s (M_Y - Y_s N) +$$

$$+ \Sigma [q_y (X_q - X_s) - q_x (Y_q - Y_s)] = 0. \qquad (17)$$

Donc, les équations fondamentales formulées par la considération de l'équilibre des forces valent :

$$[M_X + (u_s - X_s) N]'' + \Sigma q_x = 0, \qquad (18\text{ a})$$

$$[M_Y + (v_s - Y_s) N]'' + \Sigma q_y = 0, \qquad (18\text{ b})$$

$$M''_\omega + T'_s + (K\varphi')' + v''_s (M_X - X_s N) - u''_s (M_Y - Y_s N) +$$

$$+ \Sigma [q_y (X_q - X_s) - q_x (Y_q - Y_s)] = 0. \qquad (19)$$

Le cas spécial ($q_x = q_y = 0$ et $X_s = Y_s = 0$) a été discuté dans l'article [29].

2. Formulation mathématique par le théorème énergétique (par le théorème des travaux virtuels)

Le théorème des travaux virtuels des déformations finies dit que [33] :

$$\int_V \sigma^{\lambda\mu} \, \delta e_{\lambda\mu} \, dV - \int_S \bar{F}^\lambda \, \delta u^\lambda \, dS = 0 ; \qquad (20)$$

où : $$e_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} (u_{,\mu}^{\lambda} + u_{,\lambda}^{\mu} + u_{,\lambda}^{\kappa} u_{,\mu}^{\kappa}). \qquad (21)$$

$\bar{F}^\lambda$ correspond à des charges extérieures agissant sur les bords et l'expression (21) est basée sur les coordonnées Lagrangiennes [33].

Vlassov a appelé un membre dont la longueur est suffisamment grande par rapport aux dimensions du profil : pièce longue [19]. Les poutres-colonnes envisagées ici sont classifiées dans cette catégorie. Soit u, v et w les déformations des pièces-longues respectivement sur les axes X^o, Y^o et Z^o avec lesquels les axes x, y et z coïncident respectivement avant déformation. La grandeur de w est considérée petite et négligeable par rapport aux autres déformations u et v. D'après cette hypothèse de déformation des pièces longues, l'expression (21) peut s'écrire comme suit :

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \right] = \varepsilon_x,$$

$$e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \right] = \varepsilon_y,$$

$$e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 \right] = \varepsilon_z ; \qquad (22)$$

$$2\, e_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = \gamma_{xy},$$

$$2\, e_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} = \gamma_{yz}, \qquad (23)$$

$$2\, e_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{zx}. \qquad (24)$$

En choisissant le même champ des déformations que pour l'équation (7), et en substituant l'équation (7) dans les déformations ε_x, ε_y et γ_{xy}, on obtient :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0.$$

Cela signifie que l'équation (7) est basée sur l'hypothèse de l'indéformabilité de la section transversale. Donc, il n'y a que trois déformations ε_z, γ_{yz} et γ_{zx} à considérer.

Ou en utilisant les coordonnées locales, $s-n-z$, on peut aussi dire qu'il n'y a que trois déformations ε_z, γ_{zs} et γ_{zn}, d'où :

$$\gamma_{sz} = \frac{dx}{ds}\gamma_{zx} + \frac{dy}{ds}\gamma_{yz}, \tag{25}$$

$$\gamma_{zn} = -\frac{dy}{ds}\gamma_{zx} + \frac{dx}{ds}\gamma_{yz}.$$

La théorie de parois minces [19] ne peut tenir compte de la variation des contraintes sur l'épaisseur des parois. Elle suppose que la déformation de distorsion γ_{sz} est constante sur toute l'épaisseur et qu'on laisse tomber la déformation γ_{zn}. Pour tenir compte de cette variation, le travail virtuel dû à la variation de la contrainte tangentielle sur l'épaisseur, c'est-à-dire la torsion pure, doit être ajouté dans l'expression (20). Nishino et ses collaborateurs [31, 32] ont développé la théorie de parois d'épaisseur finie où la torsion pure est estimée en tenant compte de la déformation γ_{zn} et de la variation de la déformation γ_{sz} sur l'épaisseur.

En introduisant les équations (23) et (24) dans l'équation (25), on obtient :

$$\gamma_{sz} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{dx}{ds}u + \frac{dy}{ds}v\right) + \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial s}; \tag{26}$$

où : $$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{dx}{ds}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{ds}\frac{\partial}{\partial y}.$$

En introduisant l'équation (7) dans l'équation (26), on obtient :

$$\gamma_{sz} = \left(\cos\varphi\frac{dx}{ds} - \sin\varphi\frac{dy}{ds}\right)u_s' + \left(\cos\varphi\frac{dy}{ds} + \sin\varphi\frac{dx}{ds}\right)v_s' +$$
$$+ \left[\left(x-x_s\right)\frac{dy}{ds} - \left(y-y_s\right)\frac{dx}{ds}\right]\varphi' + \frac{\partial w}{\partial s}.$$

A l'aide des équations (1) et (5), on obtient une expression de γ_{sz} plus condensée :

$$\gamma_{sz} = \frac{dX}{ds}u_s' + \frac{dY}{ds}v_s' + \frac{d\omega}{ds}\varphi' + \frac{\partial w}{\partial s}. \tag{27}$$

L'hypothèse de Bernouilli-Euler admet la déformation γ_{sz} égale à nulle. On a donc :

$$\frac{\partial w}{\partial s} = -\frac{dX}{ds}u_s' - \frac{dY}{ds}v_s' - \frac{d\omega}{ds}\varphi'. \tag{28}$$

En intégrant l'équation (28) par rapport à s, la déformation w s'exprime comme suit :

$$w = w_0 - X u_s' - Y v_s' - \omega\varphi'; \tag{28}$$

w_0 : fonction arbitraire dépendante seulement de Z.

En introduisant l'équation (29) dans l'équation (22), une seule déformation ε_z n'est pas nulle et peut s'exprimer comme suit :

$$\varepsilon_z = w_0' + \frac{1}{2}[(u_s')^2 + (v_s')^2] + (Y_s u_s' - X_s v_s')\varphi' -$$
$$- X u_s'' - Y v_s'' - \omega\varphi'' + \frac{1}{2}\rho^2\varphi'^2;$$

où : $$\rho^2 = (x-x_s)^2 + (y-y_s)^2. \tag{30}$$

L'équation (30) montre que la déformation ε_z est constituée de termes $w_0' + \frac{1}{2}[(u_s')^2 + (v_s')^2] + (Y_s u_s' - X_s v_s')\varphi'$ qui ne dépendent que de Z ; de termes $X u_s''$ et $Y v_s''$ dépendant linéairement des coordonnées X et Y d'un point de la ligne du profil et suivant donc la loi des sections planes ; d'un terme $\omega\varphi''$ suivant la loi des surfaces sectorielles et ayant pour cause le gauchissement de la section [19] et d'un terme $\frac{1}{2}\rho^2\varphi'^2$ provoqué par la déformation finie de torsion [34]. Le théorème des travaux virtuels pour la pièce longue à parois minces s'écrit comme suit :

$$\int_0^L\int_A \sigma_z\,\delta\varepsilon_z\,dA\,dZ + \int_0^L T_s\,\delta\varphi'\,dZ -$$
$$- \int_0^L (\Sigma q_x\,\delta u_q + \Sigma q_y\,\delta_q)\,dZ - \delta W = 0. \tag{31}$$

σ_z :	contrainte normale associée à la déformation ε_z,
T_s :	torsion pure (torsion de St. Venant),
$\int_0^L T_s\,\delta\varphi'\,dZ$:	travail virtuel dû à la torsion pure,
δW :	travail virtuel dû à une charge axiale, à des réactions d'appui et à des moments aux extrémités,
u_q, v_q :	déformations des points d'application des charges transversales q_x et q_y.

En introduisant l'équation (30) dans l'équation (31), en appliquant l'intégration par parties (appendice II) et en notant que les quatre variations des déformations δW_0, δu_s, δv_s et $\delta\varphi$ sont arbitraires, on obtient comme condition nécessaire les quatre équations suivantes qui doivent être satisfaites pour tous Z.

$$N' = 0,$$

$$M_X'' + [(u_s' - Y_s\varphi')N]' + \Sigma q_x = 0, \tag{32 a}$$

$$M_Y'' + [(v_s' + X_s\varphi')N]' + \Sigma q_y = 0. \tag{32 b}$$

$$M_\omega'' + T_s' + [K\varphi' + (Y_s u_s' - X_s v_s')N]' -$$
$$- (X_s u_s' + Y_s v_s')\varphi' N + v_s'' M_X - u_s'' M_Y +$$
$$+ \Sigma[q_y(x_q - x_s) - q_x(y_q - y_s)]\cos\varphi -$$
$$- \Sigma[q_x(x_q - x_s) + q_y(y_q - y_s)]\sin\varphi = 0. \tag{33}$$

3. Equivalence des deux méthodes exposées dans les chapitres 1 et 2

En notant que X' est égal à $-Y\varphi'$ et que Y' est égal à $X\varphi'$, les équations (32 a), (32 b) et (33) deviennent les équations (18 a), (18 b) et (19). La différence de la formulation entre les différentes méthodes des chapitres 1 et 2 n'est pas seulement celle entre les formulations physiques et mathématiques, mais également celle du choix des coordonnées, c'est-à-dire qu'au chapitre 1, nous avons choisi les coordonnées eulériennes pour exprimer la déformation de torsion, tandis qu'au chapitre 2, les coordonnées lagrangiennes pour exprimer les expressions $e_{\lambda\mu}$. La formulation dans le chapitre 1 introduit l'équation d'équilibre des contraintes et la formulation dans le chapitre 2 utilise le théorème des travaux virtuels. Etant donné que le théorème des travaux virtuels est tiré de l'équation d'équilibre des contraintes [33], il est logique qu'on obtienne les mêmes équations fondamentales, en supposant le même champ des déformations (voir l'équation (7)). Si on discute plus strictement l'équation d'équilibre des

contraintes, l'équation (11) n'est plus celle des déformations finies [33] :

$$[(\delta_\mu^\lambda + u_{,\mu}^\lambda)\, \sigma^{\kappa\mu}]_{,\kappa} = 0.$$

Mais dans le cas des pièces longues où la première dérivée des déformations est petite et négligeable [26] par rapport à l'unité, l'équation (11) peut être utilisée.

La formulation par l'équilibre des forces explique visiblement la signification physique de chaque terme dans les équations lors du développement des équations, mais il faut faire très attention à la grandeur, à la direction et au sens des forces. Tandis que la formulation par le théorème énergétique ne nécessite que l'opération mathématique, une fois que toutes les hypothèses sont exprimées mathématiquement. Nous avons donc montré que deux méthodes différentes donnent les mêmes résultats, en expliquant le mécanisme physiquement et mathématiquement.

4. Comparaison avec la théorie linéaire classique

Il n'y a que le choix du champ des déformations qui nous a conduit aux résultats différents des équations fondamentales entre la théorie linéaire classique [17, 18, 19] et la théorie des déformations finies [29, 32]. C'est-à-dire qu'au lieu de prendre l'équation (7), Vlassov [19] et les autres chercheurs ont linéarisé le champ des déformations comme suit :

$$u = u_s - (y - y_s)\, \varphi, \qquad (34)$$
$$v = v_s + (x - x_s)\, \varphi.$$

Par conséquent, ils ont obtenu les expressions des déformations de première dérivée au lieu de l'équation (8) :

$$u' = u_s' - (y - y_s)\, \varphi', \qquad (35)$$
$$v' = v_s' + (x - x_s)\, \varphi'.$$

Il est bon de signaler qu'il y a une différence de $x-y$ et $X-Y$ dans les équations (35) et (8). C'est un des buts de cet article de montrer que cette différence joue un rôle important en ce qui concerne le déversement. Dans la théorie linéaire classique, on utilise des moments de flexion définis par :

$$M_x = \int \sigma\, x\, dA,$$
$$M_y = \int \sigma\, y\, dA.$$

D'après l'équation (1), nous obtenons une relation entre les efforts internes définis dans cette étude :

$$M_X = \cos\varphi\, M_x - \sin\varphi\, M_y, \qquad (36)$$
$$M_Y = \cos\varphi\, M_y + \sin\varphi\, M_x.$$

Dans le but de comparer la théorie présente avec la théorie linéaire classique, on admet que la déformation de torsion φ est petite, en sorte que $\cos\varphi$ est égal à 1 et $\sin\varphi$ à φ. On obtient alors :

$$M_X = M_x - \varphi\, M_y, \qquad (37)$$
$$M_Y = M_y + \varphi\, M_x.$$

En introduisant l'équation (37) dans l'équation (32 a), on obtient :

$$M_x'' + [(u_s' - y_s\, \varphi')\, N]' - (\varphi\, M_y)'' + \Sigma\, q_x = 0.$$

L'équation ci-dessus n'est pas autre chose que celle de la théorie linéaire classique.

D'autre part, si on introduit l'équation (37) dans l'équation (19), on n'obtient pas le même résultat que celui de la théorie linéaire classique. C'est-à-dire que :

$$M_\omega'' + T_s' + (K\, \varphi')' + v_s''\, (M_x - x_s\, N) -$$
$$- u_s''\, (M_y - y_s\, N) + [v_s''\, (M_y - y_s\, N) +$$
$$+ u_s''\, (M_x - x_s\, N)]\, \varphi + \Sigma\, [q_y\, (x_q - x_s) - q_x\, (y_q - y_s)] -$$
$$- \Sigma\, [q_x\, (x_q - x_s) + q_y\, (y_q - y_s)]\, \varphi = 0. \qquad (38)$$

La troisième équation fondamentale basée sur la théorie linéaire n'a pas le terme $[v_s''\, (M_y - y_s\, N) + u_s''\, (M_x - x_s\, N)]\, \varphi$. Pour montrer l'importance de ce terme, on prend l'exemple du déversement élastique d'une poutre en double T soumise à des moments égaux aux extrémités, en appui simple par rapport aux déformations latérales et rotationnelles. La théorie linéaire classique montre que le moment provoquant le déversement est donné par la formule suivante [17] :

$$M_{\text{crit}} = \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_y\, G\, J \left(1 + \frac{\pi^2\, EI_\omega}{G\, J\, L^2}\right)}; \qquad (39)$$

L : longueur de la poutre,
E : module d'élasticité,
G : module de glissement,
$I_y\, (= \int x^2\, dA)$: moment d'inertie par rapport à l'axe y,
J : constant de torsion,
$I_\omega\, (= \int \omega^2\, dA)$: moment d'inertie sectoriel.

Tandis que la théorie non-linéaire développée dans cette étude nous permet d'avoir une formule différente de l'équation (39) (appendice III), d'où :

$$M_{\text{crit}}^0 = \frac{\pi}{L} \sqrt{\left(\frac{1}{1 - \frac{I_y}{I_x}}\right) EI_y\, G\, J \left(1 + \frac{\pi^2\, EI_\omega}{G\, J\, L^2}\right)'}; \qquad (40)$$

$I_x\, (= \int y^2\, dA)$: moment d'inertie par rapport à l'axe x.

L'équation (40) montre que dans le cas où $I_x < I_y$, c'est-à-dire que la poutre est fléchie par rapport à l'axe faible, la poutre ne déverse pas, car la valeur dans la racine devient négative. Tandis que l'équation (39) montre une contradiction puisque la poutre fléchie par rapport à l'axe faible déverse toujours quand M atteint une valeur donnée par cette même équation. On peut dire que l'équation (40) est une solution plus raisonnable.

Dans le cas d'un profilé I, le moment d'inertie par rapport à l'axe fort est considérablement plus grand que celui par rapport à l'axe faible ; il n'y a donc que très peu de différence entre les valeurs numériques des équations (39) et (40). Mais lors du déversement d'une poutre en profil H, ce n'est pas le cas. Prenons un profil HEA 200 ($I_x \simeq 3\, I_y$); l'équation (39) sous-estime le moment critique de 25 % par rapport à l'équation (40). Pour les profilés H, il est mieux de modifier l'équation (39) en multipliant le moment d'inertie I_y par le coefficient [14] :

$$\frac{1}{1 - \frac{I_y}{I_x}}.$$

Ce coefficient a été mentionné depuis longtemps, soit par Chwalla [14], Julian [35], Flint [36], Petterson [37], soit par Clark et Knoll [38]. En tenant compte de la déformation v_s avant la perte de stabilité, ils ont obtenu

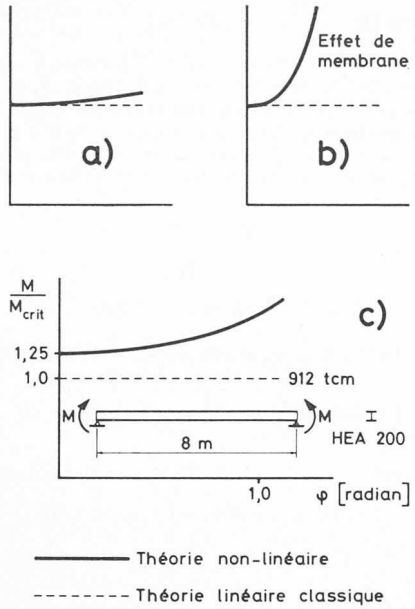

Fig. 5. — Comportement élastique d'un membre dans le domaine post-critique.
a) Flambage d'une colonne.
b) Voilement d'une plaque.
c) Déversement d'une poutre.

le même résultat que celui de l'équation (40). Le terme $[v_s''(M_y - y_s N) + u_s''(M_x - x_s N)]\,\varphi$ dans l'équation (38) représente l'effet de la déformation avant la perte de stabilité. D'autre part, Mikkola [39] a étudié le déversement d'une poutre en arc et obtenu ce coefficient, en assimilant l'effet de la courbure de l'arc à une sorte de déformation avant la perte de stabilité.

Pour formuler les équations linéaires, il est nécessaire de négliger les termes non-linéaires. Pour la plupart des phénomènes qui nous intéressent, les termes non-linéaires étant constitués de puissances d'ordres supérieurs, nous pouvons les négliger. Nous trouvons un bon exemple dans le flambage d'une colonne. Au point de vue de l'estimation de la valeur propre (charge critique), il n'y a pas de différence entre la théorie linéaire et celle non-linéaire en tenant compte du carré de la première dérivée de la flèche dans l'expression de la courbure. Même au-delà de la charge critique, il n'y a que très peu de différence entre l'allure des diagrammes [17] (fig. 5 a). Parce que le carré de la première dérivée de la flèche est non seulement un terme non-linéaire, mais également d'ordre supérieur. Dans le cas du voilement d'une plaque, la théorie linéaire nous fournit la même valeur propre que la théorie non-linéaire (fig. 5 b). Tandis que dans le cas du déversement d'une poutre, la valeur propre estimée par la théorie linéaire classique n'a pas la même valeur que celle par la théorie non-linéaire parce que les termes non-linéaires ne sont pas constitués de puissances d'ordres supérieurs. Donc, il n'est pas juste de linéariser le champ des déformations (voir l'équation (34)) quand on parle du déversement des poutres.

Dans la figure 5 c, l'allure de la déformation de torsion d'une poutre constituée d'un *HEA* 200 de 8 m de long est une courbe continue. Le moment critique estimé par la théorie classique est de 912 tcm. La déformation de torsion φ est calculée en résolvant l'équation non-linéaire (appendice III-6). La valeur à partir de laquelle la déformation de torsion φ commence à s'accroître est de 1140 tcm (équation (40)). La déformation de torsion φ s'accroît rapidement à mesure que le moment appliqué aux extrémités augmente au-delà de 1140 tcm. Par exemple, si le moment augmente de 10 % de 1140 tcm, la déformation de torsion φ devient égale à 0,6 radian (35°) ; dans ce cas-là, la plastification du matériau conduit la poutre à la rupture. On peut dire que, dans la recherche du déversement, il n'y a pas besoin de tenir compte de la « grande » déformation de torsion φ.

5. Conclusion

Il a donc été exposé que par la linéarisation du champ des déformations, la troisième équation fondamentale concernant la torsion de la théorie linéaire classique est insuffisante, surtout quand on parle du phénomène du déversement.

Les équations fondamentales basées sur la théorie des déformations finies expliquent mieux le phénomène du déversement que la théorie classique.

Les équations fondamentales établies dans cette étude ne tiennent compte que de l'équilibre des forces, c'est-à-dire que jamais l'on a introduit la propriété du matériau. Donc ces équations peuvent être utilisées pour analyser le comportement élasto-plastique des poutres-colonnes. En introduisant des efforts internes définis par :

$$\tilde{M}_X = \int_A \sigma\,(X - X_s)\,dA = M_X - X_s\,N,$$

$$\tilde{M}_Y = \int_A \sigma\,(Y - Y_s)\,dA = M_Y - Y_s\,N.$$

Et en les substituant dans les équations (18 a), (18 b) et (19), on obtient les équations fondamentales plus condensées suivantes :

$$(\tilde{M}_X + N\,u_s)'' + \Sigma\,q_x = 0,$$

$$(\tilde{M}_Y + N\,v_s)'' + \Sigma\,q_y = 0,$$

$$M_\omega'' + T_s' + (K\,\varphi')' + v_s''\,\tilde{M}_X - u_s''\,\tilde{M}_Y + \\ + \Sigma\,[q_y\,(X_q - X_s) - q_x\,(Y_q - Y_s)] = 0.$$

Appendice I

Soit β l'angle entre le vecteur SA et l'axe Y^o (fig. 3). Selon l'hypothèse de l'indéformabilité de la section transversale, la longueur du vecteur $\overline{SA}$ ne change pas lors de la déformation de la barre. On a donc :

$$u = u_s + \overline{SA}\sin\beta - \overline{SA}\sin(\beta + \varphi) = \\ = u_s + \overline{SA}\sin\beta - \overline{SA}\sin\beta\cos\varphi - \overline{SA}\cos\beta\sin\varphi = \\ = u_s - \overline{SA}\cos\beta\sin\varphi + \overline{SA}\sin\beta\,(1 - \cos\varphi)\,;$$

$$v = v_s - \overline{SA}\cos\beta + \overline{SA}\cos(\beta + \varphi) = \\ = v_s - \overline{SA}\cos\beta + \overline{SA}\cos\beta\cos\varphi - \overline{SA}\sin\beta\sin\varphi = \\ = v_s - \overline{SA}\sin\beta\sin\varphi - \overline{SA}\cos\beta\,(1 - \cos\varphi).$$

En notant que :

$$\overline{SA}\cos\beta = y - y_s,$$

$$\overline{SA}\sin\beta = x_s - x,$$

on obtient :

$$u = u_s - (y - y_s)\sin\varphi - (x - x_s)\,(1 - \cos\varphi),$$

$$v = v_s + (x - x_s)\sin\varphi - (y - y_s)\,(1 - \cos\varphi).$$

Appendice II

D'après l'équation (30) la variation de la déformation ε_z vaut :

$$\delta\varepsilon_z = \delta w_0' + u_s'\,\delta u_s' + v_s'\,\delta v_s' + (Y_s\,u_s' - X_s\,v_s')\,\delta\varphi' + \\ + (\delta Y_s\,u_s' - \delta X_s\,v_s')\,\varphi' + (Y_s\,\delta u_s' - X_s\,\delta v_s')\,\varphi' - \\ - x\,\delta u_s'' - u_s''\,\delta X - Y\,\delta v_s'' - v_s''\,\delta X - \omega\,\delta\varphi'' + \\ + [(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2]\,\varphi'\,\delta\varphi'.$$

En notant que $\delta X = -Y\,\delta\varphi$ et $\delta Y = X\,\delta\varphi$, on obtient :

$$\delta\varepsilon_z = \delta w_0' - X\,\delta u_s'' + (u_s' + Y_s\,\varphi')\,\delta u_s' - Y\,\delta v_s'' + \\ + (v_s' - x_s\,\varphi')\,\delta v_s' - \omega\,\delta\varphi'' + \{Y\,u_s'' - X\,v_s'' + \\ Y_s\,u_s' - X_s\,v_s' + [(x-x_s)^2 + \\ + (y-y_s)^2]\,\varphi'\}\,\delta\varphi' + (X_s\,u_s' + Y_s\,v_s')\,\varphi'\,\delta\varphi.$$

En introduisant des efforts internes N, M_X, M_Y, M_ω et K, le premier terme de l'équation (31) devient :

$$\int_0^L\int_A \sigma_z\,\delta\varepsilon_z\,dA\,dZ = \int_0^L N\,\delta w_0'\,dZ + \\ + \int_0^L [-M_X\,\delta u_s'' + (u_s' + Y_s\,\varphi')\,N\,\delta u_s']\,dZ + \\ + \int_0^L [-M_Y\,\delta v_s'' + (v_s' - X_s\,\varphi')\,N\,\delta v_s']\,dZ + \\ + \int_0^L \{-M_\omega\,\delta\varphi'' + K\,\varphi'\,\delta\varphi' + [u_s''\,M_Y - v_s''\,M_X + \\ + (Y_s\,u_s' - X_s\,v_s')\,N]\,\delta\varphi' + \\ + (X_s\,u_s' + Y_s\,v_s')\,N\,\varphi'\,\delta\varphi\}\,dZ.$$

En appliquant l'intégration par parties, par exemple au premier et au deuxième termes, on a :

$$\int_0^L N\,\delta w_0'\,dZ = N\,\delta w_0\Big|_0^L - \int_0^L N'\,\delta w_0\,dZ\,;$$

$$\int_0^L [-M_X\,\delta u_s'' + (u_s' + Y_s\,\varphi')\,N\,\delta u_s']\,dZ = \\ = -M_X\,\delta u_s'\Big|_0^L + \int_0^L [M_X' + (u_s' + Y_s\,\varphi')\,N]\,\delta u_s'\,dZ = \\ = -M_X\,\delta u_s'\Big|_0^L + [M_X' + (u_s' + Y_s\,\varphi')\,N]\,\delta u_s\Big|_0^L - \\ - \int_0^L \{M_X'' + [(u_s' + Y_s\,\varphi')\,N]'\}\,\delta u_s\,dZ.$$

D'autre part, les variations des déformations du point d'application des charges transversales δu_q et δv_q sont :

$$\delta u_q = \delta u_s - (y_q - y_s)\cos\varphi\,\delta\varphi - (x_q - x_s)\sin\varphi\,\delta\varphi,$$
$$\delta v_q = \delta v_s + (x_q - x_s)\cos\varphi\,\delta\varphi - (y_q - y_s)\sin\varphi\,\delta\varphi.$$

Donc, l'expression finale du théorème des travaux virtuels de l'équation (31) est donnée comme suit :

$$-\int_0^L N'\,\delta w_0\,dZ - \\ -\int_0^L \{M_X'' + [(u_s' + Y_s\,\varphi')\,N]' + \Sigma\,q_x\}\,\delta u_s\,dZ - \\ -\int_0^L \{M_Y'' + [(v_s' - X_s\,\varphi')\,N]' + \Sigma\,q_y\}\,\delta v_s\,dZ - \\ -\int_0^L \{M_\omega'' + T_s' + [K\,\varphi' + (Y_s\,u_s' - X_s\,v_s')\,N]' - \\ - (X_s\,u_s' + Y_s\,v_s')\,\varphi'\,N + v_s''\,M_X - u_s''\,M_Y + \\ + \Sigma\,[q_y\,(x_q - x_s) - q_x\,(y_q - y_s)]\cos\varphi + \\ + \Sigma\,[q_x\,(x_q - x_s) - q_y\,(y_q - y_s)]\sin\varphi]\,\delta\varphi\,dZ + \\ + N\,\delta w_0\Big|_0^L + [M_X' + (u_s' + Y_s\,\varphi')\,N]\,\delta u_s\Big|_0^L - \\ - M_X\,\delta u_s'\Big|_0^L + [M_Y' + (v_s' - X_s\,\varphi')\,N]\,\delta v_s\Big|_0^L - \\ - M_Y\,\delta v_s'\Big|_0^L + [M_\omega' + T_s + K\,\varphi' + \\ + (Y_s\,u_s' - X_s\,v_s')\,N]\,\delta\varphi\Big|_0^L - M_\omega\,\delta\varphi'\Big|_0^L - \delta W = 0.$$

Appendice III

Considérons une poutre en double T soumise à des moments égaux aux extrémités. Soit M^o le moment appliqué aux extrémités par rapport à l'axe X ; le moment intérieur par rapport à l'axe Y est nul et le moment intérieur par rapport à l'axe X est M^o ; ceci sans tenir compte de l'équilibre avant et après déformation. Les trois équations fondamentales (18 a), (18 b) et (19) deviennent :

$$M_X = 0, \\ M_Y = M^o, \qquad \text{(III-1)} \\ M_\omega'' + T_s' + (K\,\varphi')' - u_s''\,M^o = 0.$$

En admettant que ω satisfasse aux conditions d'orthogonalité [19] :

$$\int_A \omega\,dA = \int_A \omega\,x\,dA = \int_A \omega\,y\,dA = 0,$$

et que les axes x - y soient les coordonnées principales :

$$\int_A x\,dA = \int_A y\,dA = \int_A x\,y\,dA = 0,$$

on obtient :

$$\int_A X\,dA = \cos\varphi\int_A x\,dA - \sin\varphi\int_A y\,dA = 0, \\ \int_A Y\,dA = 0, \\ \int_A X\,Y\,dA = (I_y - I_x)\sin\varphi\cos\varphi, \\ \int_A X^2\,dA = \cos^2\varphi\,I_y + \sin^2\varphi\,I_x, \qquad \text{(III-2)} \\ \int_A Y^2\,dA = \sin^2\varphi\,I_x + \cos^2\varphi\,I_y, \\ \int_A \omega\,X\,dA = \cos\varphi\int_A \omega\,x\,dA - \sin\varphi\int_A \omega\,y\,dA = 0, \\ \int_A \omega\,Y\,dA = 0\,; \\ \text{où : } I_y = \int_A x^2\,dA,\ I_x = \int_A y^2\,dA.$$

De par la symétrie de la section, on a :

$$\int_A X\,\rho^2\,dA = \int_A Y\,\rho^2\,dA = 0. \qquad \text{(III-3)}$$

En utilisant les équations (III-2) et (III-3), on a donc les expressions des efforts internes M_X, M_Y, M_ω et K, en fonction des déformations, comme suit :

$$\left.\begin{aligned} M_X &= \int_A \sigma\,X\,dA = \int_A E\,\varepsilon_z\,X\,dA, \\ &= -E\,u_s''\,(\cos^2\varphi\,I_y + \sin^2\varphi\,I_x) - \\ &\quad -E\,v_s''\,(I_y - I_x)\sin\varphi\cos\varphi, \\ M_Y &= -E\,u_s''\,(I_y - I_x)\sin\varphi\cos\varphi - \\ &\quad -E\,v_s''\,(\sin^2\varphi\,I_y + \cos^2\varphi\,I_x)\,; \end{aligned}\right\} \text{(III-4)}$$

$$\left.\begin{aligned} M_\omega &= -E\,\varphi''\,I_\omega, \\ K &= 0\,; \end{aligned}\right\} \text{(III-5)}$$

$$\text{où : } I_\omega = \int_A \omega^2\,dA.$$

En éliminant v_s'' dans l'équation (III-4) et en introduisant l'équation (III-5) dans l'équation (III-1), on obtient :

$$EI_\omega\,\varphi'''' - G\,J\,\varphi'' - \frac{M^{02}}{E}\left(\frac{1}{I_y} - \frac{1}{I_x}\right)\sin\varphi\cos\varphi = 0; \qquad \text{(III-6)}$$

où : $T_s = G\,J\,\varphi'$.

En admettant que φ est petit, la valeur propre de cette équation sous les conditions d'appui simples ($\varphi = \varphi'' = 0$) est :

$$M_{\text{crit}}^0 = \frac{\pi}{L}\sqrt{\left(\frac{1}{1 - \frac{I_y}{I_x}}\right)EI_y\,G\,J\left(1 + \frac{\pi^2\,EI_\omega}{G\,J\,L^2}\right)}.$$

Remerciements

Cet article fait partie d'un mandat de recherche sur la stabilité des bâtiments à étages tridimensionnels, financé par le Fonds national suisse de la recherche scientifique. Les auteurs remercient Mme G. Millet et M. M. Fiaux pour leur aide à la préparation de ce texte.

Bibliographie

[1] Prandtl, L. : *Kipperscheinungen*, Thesis, Munich, 1899.

[2] Michell, A. G. M. : *Elastic Stability of Long Beams under Transverse Forces*, Phil. Mag., Vol. 48, 1899.

[3] Timoshenko, S. : *Einige Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie*, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Vol. 58, 1910. Publié d'abord en russe, 1906-1907.

[4] Goodier, J. N. : *Torsion and Flexural Buckling of Bars of Thin Walled Open Section under Compressive and Bending Loads*, Journal of Applied Mechanics, Vol. 64, September 1942.

[5] Nylander, H. : *Torsional and Lateral Buckling of Eccentrically Compressed I and T Columns*, Bull. 2, Div. Build. Stat. Struct. Eng., Roy. Inst. of Techn., Stockholm, 1949.

[6] Thürlimann, B. : *Deformations of and Stresses in Initially Twisted and Eccentrically Loaded Columns of Thin-Walled Open Cross Section*, Graduate Division of Applied Mathematics Brown University Providence, Rhode Island, June, 1953.

[7] Eggenschwyler, A. : *Über die Festigkeitsberechnung von Schiebetoren*, Dissertation ETH-Zurich, 1921.

[8] Maillart, R. : *Zur Frage der Biegung*, Schweizerische Bauzeitung, Vol. 77, 18. April, 1921, ou *Le centre de glissement*, Bulletin technique de la Suisse romande, 99e année, No 20, septembre 1973.

[9] Wagner, H. : *Verdrehung und Knickung von offenen Profilen*, 25th Anniversary Publication, Technische Hochschule Danzig, 1904-1925. Traduit dans NACA Tech. Mem. 807, 1936 : *Torsion and Buckling of Open Section.*

[10] Ostenfeld, A. : *Politecknisk Laereanstalts Laboratorium for Bygningsstatik*, Meddelelse No. 5, Koppenhagen, 1931.

[11] Bleich, F. et Bleich, H. : *Bending Torsion and Buckling of Bars Composed of Thin Walled*, Prelim. Pub. 2nd Cong. Intern. Assoc. Bridge and Structural Eng., English edition, Berlin, 1936.

[12] Kappus, R. : *Drillknicken zentrisch gedrückter Stäbe mit offenem Profil im elastischen Bereich*, Luftfahrt-Forschung, Vol. 14, 1937, Traduit dans NACA Tech. Mem. 851, 1938 : *Twisting Failure of Centrally Loaded Open-Section Columns in the Elastic Range.*

[13] Goodier, J. N. : *The Buckling of Compressed Bars by Torsion and Flexure*, Cornell Univ. Eng. Expt. Sta. Bull. 27, December, 1941.

[14] Chwalla, E. : *Die Kipp-Stabilität gerader Träger mit doppelt symmetrischen I-Querschnitt*, Forschungshefte auf dem Gebiete des Stahlbaus, No. 2, Berlin, 1939.

[15] Kappus, R. : *Zentrisches und Exzentrisches Drehknicken von Stäben mit offenem Profil*, Der Stahlbau, Vol. 22, 1953.

[16] Kindem, S. E. : *Biegung, Drehung und Knickung gerader Stäbe mit offenem Profil im elastischen Bereich*, Tapirä Forlag, Trondheim, 1949.

[17] Timoshenko, S. P. et Gere, J. M. : *Théorie de la stabilité élastique*, 2e édition, Dunod, Paris, 1968.

[18] Bleich, F. et Bleich, H. : *Buckling Strength of Metal Structures*, McGraw-Hill, 1952.

[19] Vlassov, B. Z. : *Pièces longues en voiles minces*, Editions Eyrolles, Paris, 1962.

[20] Kuranishi, M. : *Some Recent Investigation on the Elastic Stability of Bars*, Report of the Research Institute Technology, Nihon Uni., No. 1, 1952.

[21] Kollbrunner, K. C. et Meister, M. : *Knicken, Biegedrill-Knicken, Kippen*, Springer-Verlag, 1961.

[22] Roik, K., Carl, J. et Lindner, J. : *Biegstorsionsprobleme gerader dünnwandiger Stäbe*, Verlag von Wilhelm Ernst und Sohn, 1972.

[23] Bâzant, Z. P. et Nimeiri, M. El. : *Large-Deformation Spatial Buckling of Thin-Walled Beams and Frames*, Proc., ASCE, Vol. 99, EMS, December, 1973.

[24] Sakai, F. : *Unified Formulation of Basic Equations of Elastic Stability for Thin-Walled Member with Open Cross-Section*, Proc., Japan Society of Civil Engineers, No. 221, January, 1974 (en japonais).

[25] Zamost, G. et Johnston, E. R. : *Post Lateral Buckling Behavior of Beams*, Proc., ASCE, Vol. 97, EM4, August, 1971.

[26] Trahair, N. S. et Woolcook, S. T. : *Effect of Major Axis Curvature on I-Beams Stability*, Proc., ASCE, Vol. 99, EM1, February, 1973.

[27] Woolcook, S. T. et Trahair, N. S. : *Post-Buckling Behavior of Determinate Beams*, Proc., ASCE, Vol. 100, EM2, April, 1974.

[28] Soltis, L. A. et Christiano, P. : *Finite Deformation of Biaxially Loaded Columns*, Proc., ASCE, Vol. 98, ST12, December, 1972.

[29] Vinnakota, S. et Aoshima, Y. : *Spatial Behaviour of Rotationally and Directionally Restrained Beam-Columns*, Mémoires, AIPC, Vol. 34-II, septembre 1974.

[30] Ghobarah, A. A. et Tso, W. K. : *A Non-Linear Thin-Walled Beam Theory*, Int. J. Mech. Sci., Pergamon Press, Vol. 13, 1971.

[31] Nishino, F., Kasemset, G. et Lee, S. L. : *Variational Formulation of Stability Problems for Thin-Walled Members*, Ingenieur — Archiv 43, January, 1973.

[32] Nishino, F., Kurakata, V., Hasegawa, A. et Okumura, T. : *Thin-Walled Members under Axial Forces, Bending and Torsion*, Proc., Japan Society of Civil Engineers, No. 225, May, 1974 (en japonais).

[33] Washizu, K. : *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Pergamon Press, 1968.

[34] Nylander, N. : *Torsion, Bending, and Lateral Buckling of I-Beams*, Trans., Royal Institute of Technology, Stockholm, 1956.

[35] Julian, O. G. : *Discussion of Strength of Beams as determined by Lateral Buckling, by K. de Vries*, Trans. ASCE, Vol. 112, 1947.

[36] Flint, A. R. : *The Stability and Strength of Slender Beams*, Engineering, December, 1950.

[37] Petterson, O. : *Combined Bending and Torsion of Beams of Mono-symmetrical Cross-Section*, Bull. 10, Div. Build. Stat. Struct. Eng., Roy. Inst. of Techn., Stockholm, 1952.

[38] Clark, J. W. et Knoll, A. H. : *Effect of Deflection on Lateral Buckling Strength*, Proc., ASCE, Vol. 84, EM2, April, 1958.

[39] Mikkola, M. : *Lateral Buckling of Thin-Walled Curved Beams beyond the Limit of Proportionality*, ACIA Polytechnica Scandinavica, Civil Engineering and Building Construction Series No. 47, Helsinki, 1967.

[40] Vinnakota, S. et Aysto, P. : *Inelastic Spatial Stability of Restrained Beam-Columns*, Proc. ASCE, Vol. 100, No. ST 11, November, 1974.

Adresse des auteurs :

S. Vinnakota, Dr ès sciences techniques
Adjoint scientifique
à l'Institut de la construction métallique
de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne

J.-C. Badoux, Dr ès sciences techniques, professeur
Institut de la construction métallique
Ecole polytechnique fédérale de Lausanne
Chemin des Délices, 1007 Lausanne

Y. Aoshima, ancien assistant
à l'Institut de la construction métallique
de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne