Zeitschrift: Ingénieurs et architectes suisses

Band: 106 (1980)

Heft: 11

Artikel: Les critères de rupture en analyse des contraintes, 1re partie: généralités

Autor: Xenophontidis, Nicolas

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-73947

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Les critères de rupture en analyse des contraintes

1re partie: Généralités

par Nicolas Xenophontidis, Lausanne

Le terme de rupture, utilisé dans l'exposé, a la signification générale de défaillance du matériau. Après quelques rappels théoriques de l'état de contrainte, nous définissons les critères de rupture basés sur la limite d'écoulement, la contrainte de traction ainsi que la contrainte de rupture réelle. Les sollicitations variables sont également abordées et nous donnons un critère de rupture pour la fatigue oligocyclique ainsi que divers critères en fatigue classique. Nous terminons ce travail en donnant quelques indications sur le choix des critères de rupture.

1. Introduction

Lors du projet d'un élément de machine ou d'un élément de structure, les ingénieurs sont fréquemment confrontés à des problèmes de contraintes combinées.

On constate d'autre part que les propriétés mécaniques des matériaux sont habituellement déterminées avec des machines d'essais appliquant des charges monoaxiales à une éprouvette.

Ainsi, pour les matériaux ductiles, l'essai de traction est couramment utilisé tandis que pour les matériaux fragiles on effectue habituellement des essais de compression. Quelquefois, des essais de torsion sont effectués sur des tubes circulaires. Ces derniers essais ne conduisent pas à des résultats précis, puisque seule la surface extérieure est soumise à la torsion maximum.

La contrainte d'écoulement définit la rupture élastique pour les matériaux ductiles, tandis que la contrainte de rupture définit la rupture plastique pour les matériaux ductiles et fragiles.

L'état général de contraintes en un point d'une pièce sollicitée peut être représenté par les trois contraintes principales σ_1, σ_2 et σ_3 (fig. 1). Pour l'élément considéré dans la figure ci-dessous, la valeur de la contrainte d'écoulement ou de rupture n'est pas la même que pour une sollicitation monoaxiale.

Suite à cette constatation, on peut se demander jusqu'où peut être sollicité avec sécurité dans un cas de contraintes combinées un matériau sollicité monoaxialement et supportant une contrainte connue.

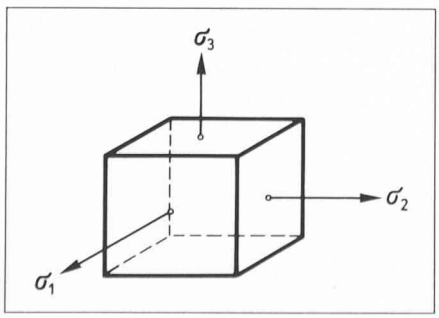

Fig. 1. — Elément sollicité par les trois contraintes principales σ_1, σ_2 et σ_3.

Pour répondre à cette question, on doit appliquer une théorie de rupture ou théorie de la résistance. Il importe de noter que le terme « théorie de la résistance » ne reflète pas complètement l'essence de la question, puisqu'il ne s'agit pas littéralement de résistance, mais de changement qualitatif des propriétés des matériaux.

Lors de l'établissement et l'application des théories de rupture, le raisonnement suit les deux étapes exposées ci-dessous.

1) Une théorie est élaborée pour expliquer la rupture d'une éprouvette normalisée. Prenons par exemple l'essai de traction et considérons comme rupture l'écoulement initial. Nous admettons alors la théorie selon laquelle l'écoulement en traction est survenu à la suite du dépassement des possibilités du matériau de supporter un des points suivants :
   a) une contrainte normale,
   b) une contrainte de cisaillement,
   c) une déformation normale,
   d) une déformation de cisaillement,
   e) un travail de distorsion, etc.
2) Les résultats de l'essai normalisé sont utilisés pour obtenir la valeur du critère choisi. Supposons par exemple que l'essai de traction normalisé donne une contrainte d'écoulement égale à 5000 bar [1]. Nous admettons alors que l'écoulement dans ce matériau aura lieu sous une combinaison de charges qui conduisent respectivement :
   a) à une contrainte normale plus élevée que celle de 5000 bar,
   b) à une contrainte de cisaillement plus élevée que 2500 bar,
   c) à une déformation normale plus élevée que celle donnée par l'essai normalisé,
   d) à une déformation de cisaillement plus élevée que celle donnée par l'essai normalisé,
   e) à un travail de distorsion plus élevé que celui donné par l'essai normalisé.

[1] 100 bar $\simeq$ 1,02 kg/mm² = 102 kg/cm².

Dans les paragraphes qui suivent, nous donnons les principales théories de rupture pour les contraintes statiques et les contraintes variables. Nous notons que, sous certaines sollicitations, il n'a pas été possible de développer une théorie de rupture satisfaisante. C'est le cas des matériaux sollicités triaxialement à hautes températures ainsi que ceux sollicités par un choc. Enfin, nous avons réalisé le développement des relations contraintes-déformations dans la zone plastique, étant donné que ces relations sont intimement liées aux théories de rupture.

La difficulté de l'édification d'une théorie de rupture réside naturellement dans nos connaissances insuffisantes des processus s'écoulant dans les matériaux, des matériaux différents se comportant de manière différente. Aussi, arrive-t-il qu'une hypothèse valable pour un matériau particulier conduise à des résultats inacceptables pour un autre. Les expériences de contrôle peuvent confirmer dans un cas une hypothèse et la réfuter dans un autre. C'est pourquoi le critère de rupture n'a pas un caractère général.

Dans les calculs numériques, les circonstances mentionnées conduisent à certaines divergences. Aussi, ne faut-il pas s'étonner si le résultat de calcul d'une des théories est quelque peu différent du résultat donné par une autre. Ceci s'explique par l'imperfection des hypothèses de rupture.

2. Quelques rappels théoriques de l'état de contrainte

En un point donné d'un milieu continu, l'état de contrainte est caractérisé par le tenseur symétrique des contraintes :

$$\Sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{Bmatrix} \qquad (2.1)$$

ou sous forme matricielle

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \qquad (2.2)$$

Sur un élément de surface arbitrairement orienté et à normale unitaire $\vec{n}$, le vecteur contrainte $\vec{p_n}$ est déterminé par les formules de Cauchy

$$p_j = \sigma_{ij}\, n_i \text{ ou } \vec{p_n} = \Sigma\, \vec{n} \qquad (2.3)$$

Les directions pour lesquelles les vecteurs $\vec{p_n}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires s'appellent directions des contraintes principales.

Pour ces directions, nous obtenons

$$\vec{p}_n = \sigma \vec{n} \qquad (2.4)$$

ou σ est la contrainte principale.

Il vient ainsi

$$(\Sigma - I\sigma)\vec{n} = 0$$

ou

$$(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma)\, n_j = 0 \qquad (2.5)$$

Dans les trois équations (2.5), il y a quatre inconnues, les trois valeurs n_j et la valeur de σ.
Pour obtenir les solutions non triviales du système (2.5), il faut que

$$|\, \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma \,| = 0 \qquad (2.6)$$

ou bien

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \qquad (2.7)$$

avec

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{ii} = tr\,\Sigma \\ I_2 &= \tfrac{1}{2}\,(\sigma_{ii}\,\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\,\sigma_{ij}) \\ I_3 &= |\,\sigma_{ij}\,| = \det \Sigma \end{aligned}\right\} \qquad (2.8)$$

où les I_i sont appelés respectivement invariants linéaire, quadrique et cubique.

Les matériaux présentant, en général, des propriétés mécaniques différentes selon leur sollicitation en cisaillement ou en compression uniforme, il est rationnel de représenter le tenseur des contraintes sous forme de somme.

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}\,\sigma_{kk}/3 + S_{ij} \qquad (2.9)$$

ou

$$\Sigma = \sigma_m\,\Sigma_1 + \Sigma_D \qquad (2.10)$$

avec

$$\sigma_m = -p = \frac{\sigma_{kk}}{3} \qquad (2.11)$$

$$\Sigma_1 = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \qquad (2.12)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad (2.13)$$

$$\Sigma_D = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_m & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_m & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{Bmatrix} \qquad (2.14)$$

où σ_m représente la pression moyenne ou hydrostatique et δ_{ij} le symbole de Kronecker. Les 3 tenseurs Σ_1, $\sigma_m\Sigma_1$ et Σ_D représentent respectivement le tenseur unité, le tenseur sphérique et le déviateur des contraintes qui caractérisent les contraintes tangentielles en un point.
Les directions principales du déviateur des contraintes Σ_D et du tenseur des contraintes Σ coïncident. Quant aux valeurs principales S_i, elles diffèrent de σ_i par la valeur de la pression moyenne.

$$S_k = \sigma_k - \sigma_m \qquad (2.15)$$

Elles pourront être évidemment définies par l'équation cubique

$$S^3 + I_{2D}S - I_{3D} = 0 \qquad (2.16)$$

Les invariants du déviateur seront facilement obtenus par les relations (2.17) en remplaçant σ_1, σ_2 et σ_3 respectivement par S_1, S_2 et S_3.
Ainsi, avec

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \\ I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned}\right\} \qquad (2.17)$$

nous obtenons

$$\left.\begin{aligned} I_{1D} &= 0 \\ I_{2D} &= {}^1/_6\,[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \\ &\quad + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \\ I_{3D} &= S_1\,S_2\,S_3 \end{aligned}\right\} \qquad (2.18)$$

La grandeur non négative

$$\tau = +\sqrt{I_{2D}} \qquad (2.19)$$

est appelée intensité des contraintes tangentielles.
Examinons les valeurs extrema de la contrainte de cisaillement. La composante normale du vecteur $\vec{p}_n$ en un point est obtenue par la relation

$$\sigma_n = \sigma_{ij}\,n_i\,n_j \qquad (2.20)$$

Il vient ainsi pour la contrainte tangentielle τ_n

$$\tau_n^2 = p_j p_j - \sigma_n^2 \qquad (2.21)$$

ou

$$\tau_n^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2 \qquad (2.22)$$

où n_i sont les cosinus directeurs de la normale au plan considéré.
Pour obtenir les valeurs extrema de la relation (2.22), nous posons

$$F = \tau_n^2 - \lambda\,n_i\,n_i \qquad (2.23)$$

avec λ grandeur scalaire quelconque.

L'équation (2.23) est une fonction des cosinus directeurs et sa valeur extremum est obtenue par les conditions

$$\frac{\partial F}{\partial n_i} = 0$$

Nous avons alors :

$$\left.\begin{aligned} n_1\,[\sigma_1^2 - 2\sigma_1\,(\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \\ + \sigma_3 n_3^2) + \lambda] = 0 \\ n_2\,[\sigma_2^2 - 2\sigma_2\,(\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \\ + \sigma_3 n_3^2) + \lambda] = 0 \\ n_3\,[\sigma_3^2 - 2\sigma_3\,(\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \\ + \sigma_3 n_3^2) + \lambda] = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.24)$$

Les équations (2.24) avec la condition $n_i n_i = 1$ conduisent à la détermination des n_i qui correspondent aux valeurs extrema de τ_n.

Nous obtenons les solutions suivantes :

$$\left.\begin{aligned} & n_1 = \pm 1 \quad n_2 = 0 \quad n_3 = 0 \\ & \rightarrow \tau_n = 0 \\ & n_1 = 0 \quad n_2 = \pm 1 \quad n_3 = 0 \\ & \rightarrow \tau_n = 0 \\ & n_1 = 0 \quad n_2 = 0 \quad n_3 = \pm 1 \\ & \rightarrow \tau_n = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.25)$$

$$\left.\begin{aligned} & n_1 = 0 \quad n_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \quad n_3 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ & \rightarrow \tau_n = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \\ & n_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \quad n_2 = 0 \quad n_3 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \\ & \rightarrow \tau_n = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \\ & n_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \quad n_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \quad n_3 = 0 \\ & \rightarrow \tau_n = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (2.26)$$

Les solutions (2.25) donnent évidemment les valeurs minima, tandis que les expressions (2.26) donnent les valeurs maxima.
Nous finirons ce paragraphe par la notion des contraintes octatrédrales.
Les plans octaédraux sont les huit plans dont la normale est inclinée uniformément par rapport aux directions principales. Du fait que $n_i n_i = 1$, il résulte que

$$n_1^2 = n_2^2 = n_3^2 = \frac{1}{3} \qquad (2.27)$$

La relation (2.22) qui donne la contrainte tangentielle devient :

$$\begin{aligned} \tau_0^2 &= \frac{1}{3}\,(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \\ &\quad - \frac{1}{9}\,(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 = \\ &= \frac{1}{9}\,[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \\ &\quad + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \end{aligned} \qquad (2.28)$$

A l'aide de la relation (2.18), la contrainte octatrédrale de cisaillement s'écrit alors

$$\tau_0 = \sqrt{\frac{2}{3} I_{2D}} \qquad (2.29)$$

(à suivre)

Adresse de l'auteur :
Nicolas Xenophontidis
Ingénieur EPFL
Institut des métaux et des machines
de l'Ecole polytechnique fédérale
de Lausanne
Chemin de Bellerive 34
1007 Lausanne