

# Stabilité hydroélastique d'une membrane installée dans un siphon: étude préliminaire

Autor(en): **Capitaine, Gérard**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Ingénieurs et architectes suisses**

Band (Jahr): **110 (1984)**

Heft 2

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-75267>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Stabilité hydroélastique d'une membrane installée dans un siphon

## Etude préliminaire

par Gérard Capitaine, Genève

### 1. Introduction

#### 1.1 Introduction générale

Les traversées sous-fluviales d'émissaires d'eaux usées sont réalisées au moyen de siphons.

L'exploitation de ces siphons a démontré que ces ouvrages sont menacés par le danger de l'ensablement lorsque le débit d'eau est trop faible. La théorie du transport de solides dans un fluide stipule, en effet, qu'il existe une vitesse d'écoulement critique, fonction de la concentration de solides dans le fluide, au-dessous de laquelle le transport de ceux-ci n'est plus assuré. Dès lors, le tuyau s'ensable jusqu'à ce que la section de passage de l'écoulement engendre une vitesse du fluide au moins égale à la vitesse critique.

Les sociétés Gnehm + Schaefer SA et Hydroconseil ont proposé une solution permettant d'assainir un siphon à eaux usées conventionnel, à l'aide d'un coussin d'eau contenu dans une membrane élastique étanche (fig. 1) [1]<sup>1</sup>.

L'accroissement de la section du coussin d'eau réduit la section de passage des eaux usées et engendre une vitesse d'écoulement plus grande. La vitesse nécessaire au transport des solides est ainsi obtenue en modifiant la section du coussin d'eau en fonction du débit des eaux usées.

Dans le cadre de l'étude de faisabilité de la régulation d'un siphon sous-fluvial existant, les sociétés Gnehm + Schaefer et Hydroconseil nous ont chargé d'étudier le comportement hydroélastique de la membrane placée à l'intérieur du siphon.

Le but de cette étude est de donner, en fonction des paramètres du système considéré, une première estimation de la grandeur des vitesses à partir desquelles le comportement de la membrane pourrait se révéler instable. Cette information devrait permettre de fixer les caractéristiques géométriques et mécaniques de la membrane, assurant une exploitation sûre de ce dispositif.

#### 1.2 Stabilité hydroélastique d'une membrane

L'expérience montre qu'une membrane placée dans un écoulement, peut, à partir d'une certaine vitesse d'écoulement du fluide, se mettre à osciller avec une amplitude croissante [2].

L'origine de cette instabilité, appelée flottement, réside dans le couplage hydroélastique entre le mouvement de la membrane et les fluctuations de pression induites par celui-ci.

Lorsque la vitesse d'écoulement est inférieure à la vitesse de flottement, la membrane vibre en réponse aux fluctuations de pression de l'écoulement turbulent.

Lorsque la vitesse du fluide atteint la vitesse de flottement, les pressions instantanées engendrées par l'oscillation de la membrane sont suffisamment importantes pour influencer le mouvement de celle-ci. Dès lors la membrane présente un mouvement de type sinusoïdal dont l'amplitude augmente avec le temps [2].

Contrairement au phénomène de résonance impliquant une source d'excitation extérieure au système vibrant, le flottement est un mécanisme d'auto-excitation.

Ce phénomène d'instabilité peut conduire à une destruction rapide de la membrane si les contraintes induites par la vibration dépassent la contrainte de rupture du matériau. Si au contraire les tensions demeurent relativement faibles, une rupture de fatigue est possible à long terme.

<sup>1</sup> Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie en fin d'article.

#### Liste des symboles

$x, y, z$  système de coordonnées (fig. 2)

$t$  temps

$L$  longueur de la membrane

$b$  largeur de la membrane égale au diamètre du siphon

$q$  coordonnées généralisées

$\xi$  déplacement transversal de la membrane parallèle à  $oz$

$r, k, n$  numérotation des modes

$Q_m$  force généralisée

$S$  traction par unité de longueur agissant sur la membrane

$\phi$  potentiel des vitesses

$\rho$  masse spécifique de l'eau

$\mu$  masse par unité de la surface de la membrane

$U_0$  vitesse de l'écoulement dans le siphon

$u, v, w$  composantes de la vitesse de l'écoulement induit par le mouvement de la membrane

$U_{0D}, U_{0F}$  vitesses de divergence et de flottement

$\Delta p_{12}$  différence des pressions agissant de part et d'autre de la membrane

$\lambda_m$   $\pi \left( \frac{r^2}{L^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^{1/2}$

#### Indices

1 correspond au canal situé au-dessus de la membrane (fig. 2)

2 correspond au canal situé au-dessous de la membrane (fig. 2)

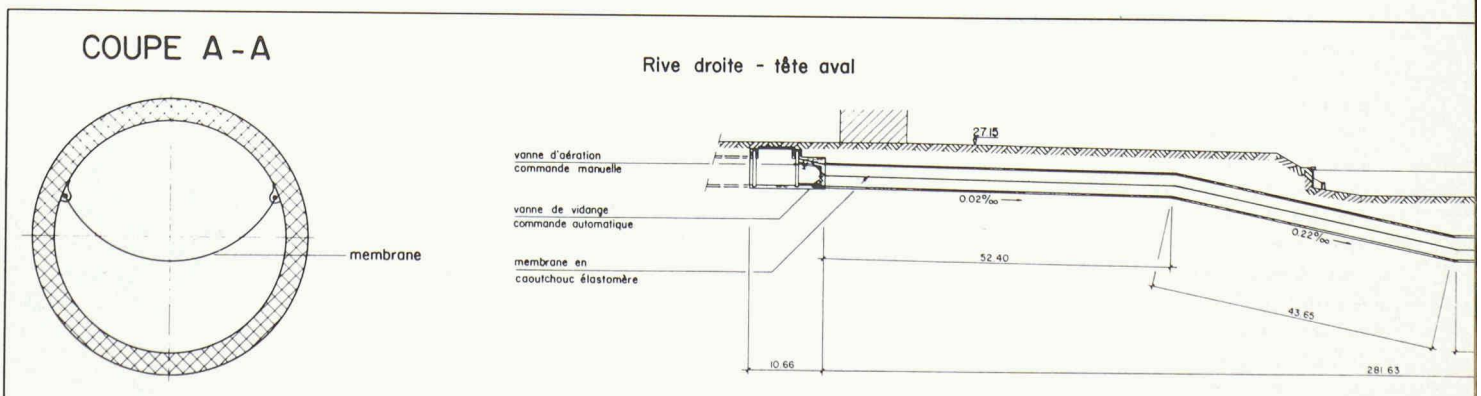


Fig. 1. — Siphon à coussin d'eau — membrane en position d'auto-curage.



Summary

The hydroelastic behaviour of a membrane installed within a siphon has been studied theoretically. By means of a simple linear hydroelastic model and the assumption of a potential flow the divergence and flutter boundaries have been determined as a function of the surface tension of the membrane.

Zusammenfassung

Die hydroelastische Stabilität einer, in einem Siphon eingebauten Membrane, wurde theoretisch untersucht. Mit Hilfe eines einfachen linearen hydroelastischen Modells und der Annahme einer Potentialströmung wurden die Divergenz und Flattergrenzen bestimmt in Funktion der Verspannung der Membrane.

2. Théorie

2.1 Equation de la membrane vibrante

Soit une membrane flexible homogène, soumise à une traction uniforme  $S$  (fig. 2).

Soit  $\Delta p_{12}(x, y, t)$  la différence des pressions hydrodynamiques agissant de part et d'autre de la membrane.

L'équation du mouvement de la membrane vibrante est

$$\mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = S \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) + \Delta p_{12}(x, y, t) \quad (1)$$

$\xi$  représente le déplacement transversal de la membrane et  $\mu$  sa masse par unité de surface.

Les déformations de la membrane résultant de l'action de  $\Delta p_{12}$  sont suffisamment petites pour que  $S$  ait en tout point et à chaque instant la même valeur que dans la position d'équilibre.

Les bords de la membrane sont fixés aux parois du siphon, d'où les conditions aux limites

pour  $x = 0, x = L \quad \xi(y, t) = 0 \quad (2)$

pour  $y = 0, y = b \quad \xi(x, t) = 0$

A un instant quelconque, le mouvement de la membrane peut être représenté par la série de Fourier

$$\xi(x, y, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_m(t) \sin \frac{r\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3)$$

A chaque groupe de valeur  $r, n$  correspond une vibration normale  $\xi_m$ . Les coefficients  $q_m$  sont des fonctions inconnues du temps qu'il s'agit de déterminer.

En choisissant les  $q_m$  comme coordonnées généralisées et en appliquant les équations de Lagrange [3], on obtient un système d'équations différentielles linéaires pour  $q_m(t)$  soit <sup>2</sup>

$$\frac{1}{4} Lb\mu \ddot{q}_m + \frac{\pi^2}{4} LbS \left( \frac{r^2}{L^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) q_m = Q_m \quad (4)$$

$r = 1, 2, 3, \dots \infty$   
 $n = 1, 2, 3, \dots \infty$

$Q_m$  est la force généralisée relative aux paramètres  $q_m$  et provenant des pressions perturbatrices  $\Delta p_{12}$ .

L'expression pour  $Q_m$  est

$$Q_m = \int_0^L \int_0^b \Delta p_{12}(x, y, t) \sin \frac{r\pi x}{L} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (5)$$

<sup>2</sup>La dérivée par rapport au temps est représentée par un point.

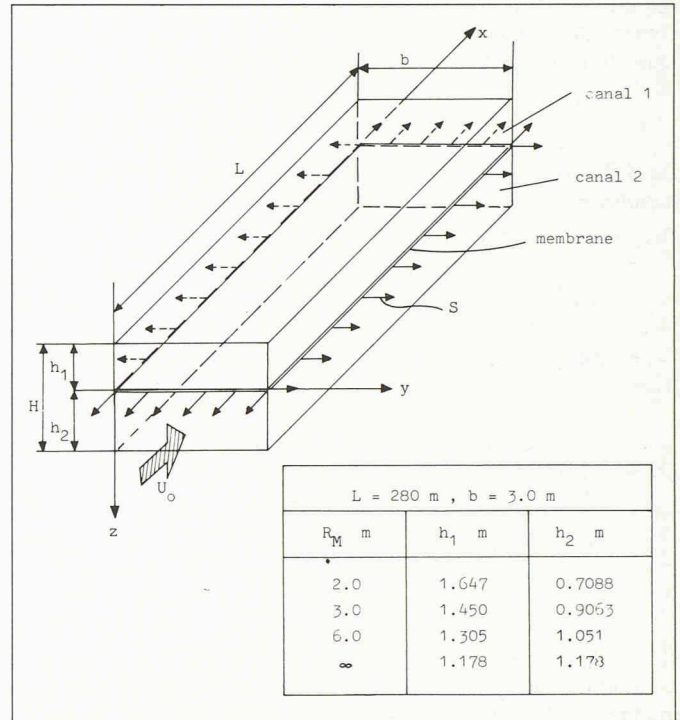


Fig. 2. — Schéma du siphon à membrane utilisé pour le calcul.

2.2 Calcul des pressions perturbatrices

Afin de simplifier quelque peu le calcul des pressions instantanées engendrées par les mouvements de la membrane, les simplifications et les hypothèses suivantes ont été faites:

- Le siphon de section circulaire est remplacé en première approximation par une conduite rectiligne de section rectangulaire (fig. 2). Les aires des sections au-dessus et au-dessous de la membrane sont identiques aux aires correspondantes du siphon circulaire.
- La longueur de la conduite étant très grande par rapport à la longueur d'onde de l'oscillation de la membrane, les pressions induites par les mouvements de la membrane de longueur donnée sont les mêmes que celles engendrées par une membrane de longueur infinie.
- L'écoulement d'eau dans le siphon est incompressible et irrotationnel.

Soit

$$\phi^*(x, y, z, t) = U_0 x + \phi(x, y, z, t)$$

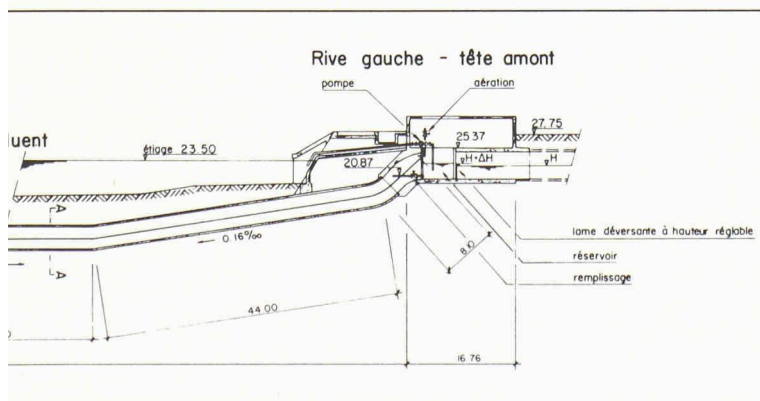
le potentiel des vitesses représentant l'écoulement dans le siphon.  $U_0$  est la vitesse moyenne de l'eau dans le canal 2 (fig. 2) au-dessous de la membrane et  $\phi$  le potentiel des vitesses de l'écoulement perturbé par le mouvement de la membrane. Les composantes selon les axes  $x, y, z$  de la vitesse de l'écoulement perturbé sont

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Les vitesses  $u, v$  et  $w$  sont supposées petites par rapport à  $U_0$  on a

$$\frac{u}{U_0} \ll 1, \quad \frac{v}{U_0} \ll 1, \quad \frac{w}{U_0} \ll 1 \quad (6)$$

La relation entre la pression et le potentiel des vitesses est donnée par l'équation de Bernoulli. On obtient en négligeant d'après (6) les valeurs quadratiques  $u^2, v^2$  et  $w^2$ .





$$\Delta p_2 = -\rho U_0 u - \rho \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial t}$$

et avec  $u = \frac{\partial \phi}{\partial x}$

$$\Delta p_2 = -\rho \left( \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial x} \right) \quad (7)$$

$\Delta p_2$  est la perturbation de pression dans le canal 2 due au mouvement de la membrane.

Dans le canal 1 où  $U_0 = 0$  on a

$$\Delta p_1 = -\rho \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial t} \quad (8)$$

La différence des pressions agissant de part et d'autre de la membrane ( $z = 0$ ) est

$$\begin{aligned} \Delta p_{12} &= (\Delta p_1 - \Delta p_2)_{z=0} \\ &= \rho \left( \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial t} - \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial x} \right)_{z=0} \end{aligned} \quad (9)$$

En remplaçant  $\Delta p_{12}$  dans (5) on obtient pour la force généralisée

$$\begin{aligned} Q_m &= \rho \int_0^L \int_0^b \left( \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial t} - \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial x} \right)_{z=0} \times \\ &\quad \times \sin \frac{r\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \end{aligned} \quad (10)$$

### 2.3 Calcul du potentiel des vitesses

L'équation du potentiel des vitesses pour un écoulement incompressible dépendant du temps est l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (11)$$

Les conditions aux limites pour  $\phi^{(1)}$  et  $\phi^{(2)}$  impliquent l'imperméabilité des parois du siphon et de la membrane.

La composante de la vitesse du fluide normale à la surface considérée doit être égale à la vitesse du mouvement transversal de cette surface.

On a donc

$$\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial n} = 0 \quad (12a)$$

aux parois fixes du siphon et, compte tenu de (6)

$$\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial n} = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial n} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (12a)$$

à la surface de la membrane,  $\xi$  étant donné par (3).

$\frac{\partial}{\partial n}$  est la dérivée dans la direction normale à la surface considérée. A (12a) s'ajoute une condition supplémentaire.

Le canal 1 étant une cavité fermée contenant un fluide incompressible, le volume total de la cavité doit demeurer constant soit

$$\frac{dV_{01}^{(1)}}{dt} = \int_0^L \int_0^b \frac{\partial \xi}{\partial t} dx dy = 0 \quad (12b)$$

Cette condition implique que les modes  $r$  et  $n$  (3) ne soient pas tous deux impairs.

L'intégration de (11) est obtenue par la méthode de Fourier [4], consistant à chercher une solution particulière de la forme

$$\phi = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$$

où  $X, Y, Z$  ne sont fonction respectivement que de  $x, y$  et  $z$ . En introduisant cette solution particulière dans (11) on obtient finalement, compte tenu des conditions (12a), les solutions pour  $\phi^{(1)}$  et  $\phi^{(2)}$

$$\phi^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{km} \cosh [\lambda_{km} (z + h_1)] \cos \frac{k\pi x}{L} \cos \frac{m\pi y}{b} \quad (13)$$

où

$$\lambda_{km} = \pi \left( \frac{k^2}{L^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)^{1/2}$$

et

$$A_{km} = \frac{16}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \dot{q}_{ij} \frac{ij}{(i^2 - k^2)(j^2 - m^2)} \frac{1}{\lambda_{km} \sinh(\lambda_{km} h_1)}$$

avec  $i+k$  et  $j+m$  impairs

$$\begin{aligned} \phi^{(2)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \cosh [\lambda_{km} (z - h_2)] \times \\ &\quad \times \cos \frac{m\pi y}{b} \left\{ B_{km} \sin \frac{k\pi x}{L} + C_{km} \cos \frac{k\pi x}{L} \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

avec

$$B_{km} = -\frac{4}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \dot{q}_{kj} \frac{j}{j^2 - m^2} \frac{1}{\lambda_{km} \sinh(\lambda_{km} h_2)}$$

( $j+m$  impair)

et

$$C_{km} = -\frac{4U_0}{L} k \sum_{j=1}^{\infty} q_{kj} \frac{j}{j^2 - m^2} \frac{1}{\lambda_{km} \sinh(\lambda_{km} h_2)}$$

( $j+m$  impair)

Calculons  $\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial t}$  et  $\frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial x}$  pour  $z = 0$  (surface de la membrane). Introduisons ces grandeurs dans (10) et intégrons. On obtient pour la force généralisée

$$\begin{aligned} Q_m(t) &= -\rho \frac{4Lb}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{16}{\pi^2} \frac{r^2 n^2 \coth(\lambda_{km} h_1)}{\lambda_{km} [(r^2 - k^2)(n^2 - m^2)]^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n^2 \coth(\lambda_{km} h_2)}{(n^2 - m^2)^2 \lambda_{km}} \right\} \dot{q}_m + \end{aligned} \quad (15)$$

$$+ \rho U_0^2 \frac{4b}{L} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{r^2 n^2 \coth(\lambda_{km} h_2)}{\lambda_{km} (n^2 - m^2)^2} \right\} q_m -$$

$$- \rho U_0 \frac{32b}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{krn^2 \coth(\lambda_{km} h_2)}{\lambda_{km} (r^2 - k^2)(n^2 - m^2)^2} \dot{q}_{kn} \right\}$$

En substituant (15) dans (4) on obtient après division par  $(L \cdot b)$  pour chaque  $n$  un système d'équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants.

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\mu}{4} + \rho \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{16}{\pi^2} \frac{r^2 n^2 \coth(\lambda_{km} h_1)}{\lambda_{km} [(r^2 - k^2)(n^2 - m^2)]^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{n^2 \coth(\lambda_{km} h_2)}{(n^2 - m^2)^2 \lambda_{km}} \right\} \dot{q}_m + \right. \end{aligned} \quad (16)$$

$$\left. + \left\{ S \frac{\lambda_m^2}{4} - \rho U_0^2 \frac{4}{L^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{r^2 n^2 \coth(\lambda_{km} h_2)}{\lambda_{km} (n^2 - m^2)^2} \right\} \right\} q_m + \right.$$

$$\left. + \rho U_0 \frac{32b}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{krn^2 \coth(\lambda_{km} h_2)}{\lambda_{km} (r^2 - k^2)(n^2 - m^2)^2} \dot{q}_{kn} \right\} \right\} = 0$$

(Avec  $r+k$  et  $n+m$  impairs et  $r$  et  $n$  ne pouvant être impairs tous deux.)

Soient  $\alpha_r^{(n)}$  et  $\beta_r^{(n)}$  les coefficients de  $\ddot{q}_m$  et  $q_m$  et

$$\gamma_{rk}^{(n)} = \rho U_0 \frac{32}{\pi^2 L} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{krn^2 \coth(\lambda_{km} h_2)}{\lambda_{km} (r^2 - k^2) (n^2 - m^2)^2} \right\}$$

Le système d'équations (16) devient

$$\alpha_{rr}^{(n)} \ddot{q}_m + \beta_{rr}^{(n)} q_m + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{rk}^{(n)} \dot{q}_{kn} = 0 \tag{17}$$

$\alpha_{rr}^{(n)}$  comprend en plus de la masse de la membrane, celle de l'eau associée au mouvement de celle-ci.

$\beta_{rr}^{(n)}$  représente la force de rappel élastique du système vibrant.

$\gamma_{rk}^{(n)}$  introduit un couplage de type hydrodynamique entre les différents modes  $r$  de la vibration de la membrane.

Posons, en effet,  $U_0 = 0$  dans (16), le système d'équations se réduit à une seule équation différentielle pour la coordonnée normale  $q_m$ . A chaque  $q_m$  correspond une vibration normale de la membrane. Lorsque  $U_0 \neq 0$  le terme  $\gamma_{rk}^{(n)}$  associe à chaque mode  $r$  une infinité de modes  $k$  tels que  $r+k$  soit impair.

Chaque vibration normale de (17) étant une combinaison linéaire de modes pairs et impairs, seuls, en vertu de la condition (12b), les modes  $n$  antisymétriques ( $n$  pairs) doivent être considérés. Par conséquent, la surface de la membrane est toujours divisée par un nombre impair de lignes nodales parallèles à l'axe des  $x$ .

Choisissons pour intégrer (17) une solution particulière de la forme

$$q_m(t) = \bar{q}_m e^{st}$$

$\bar{q}_m$  et  $s$  étant des constantes.

En introduisant cette solution particulière dans (17), on obtient après division par  $e^{st}$  un système d'équations linéaires homogènes

$$\bar{q}_m (\alpha_{rr}^{(n)} s^2 + \beta_{rr}^{(n)}) + s \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{rk}^{(n)} \bar{q}_{kn} = 0 \tag{18}$$

$$r = 1, 2, 3, \dots \infty$$

$$n = 2, 4, 6, \dots \infty$$

c'est-à-dire

$$\begin{bmatrix} (\alpha_{11}^{(n)} s^2 + \beta_{11}^{(n)}) & s\gamma_{12}^{(n)} & 0 & s\gamma_{14}^{(n)} & \dots \\ s\gamma_{21}^{(n)} & (\alpha_{22}^{(n)} s^2 + \beta_{22}^{(n)}) & s\gamma_{23}^{(n)} & 0 & \dots \\ 0 & s\gamma_{32}^{(n)} & (\alpha_{33}^{(n)} s^2 + \beta_{33}^{(n)}) & s\gamma_{34}^{(n)} & \dots \\ s\gamma_{41}^{(n)} & 0 & s\gamma_{43}^{(n)} & (\alpha_{44}^{(n)} s^2 + \beta_{44}^{(n)}) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}_{1n} \\ \bar{q}_{2n} \\ \bar{q}_{3n} \\ \bar{q}_{4n} \\ \vdots \end{bmatrix} = 0$$

Adoptons en première approximation la démarche de Dugundji [5] en ne conservant que les modes  $(r, n)$  et  $(r+1, n)$ . Le système d'équations (18) se réduit à un système de deux équations linéaires, homogènes, pour  $\bar{q}_m$  et  $\bar{q}_{r+1, n}$

$$(\alpha_{rr}^{(n)} s^2 + \beta_{rr}^{(n)}) \bar{q}_m + s\gamma_{r, r+1}^{(n)} \bar{q}_{r+1, n} = 0 \tag{19}$$

$$s\gamma_{r+1, r}^{(n)} \bar{q}_m + (\alpha_{r+1, r+1}^{(n)} s^2 + \beta_{r+1, r+1}^{(n)}) \bar{q}_{r+1, n} = 0$$

Pour que ce système admette une autre solution que la solution triviale  $\bar{q}_m = \bar{q}_{r+1, n} = 0$  à laquelle ne correspondrait aucun mouvement, il est nécessaire que le déterminant des coefficients des  $q$  soit nul, d'où l'équation

$$\begin{vmatrix} (\alpha_{rr}^{(n)} s^2 + \beta_{rr}^{(n)}) & s\gamma_{r, r+1}^{(n)} \\ s\gamma_{r+1, r}^{(n)} & (\alpha_{r+1, r+1}^{(n)} s^2 + \beta_{r+1, r+1}^{(n)}) \end{vmatrix} = 0$$

On obtient l'équation algébrique de degré 4 pour  $s$

$$a_4 s^4 + a_2 s^2 + a_0 = 0 \tag{20}$$

où

$$a_4 = \alpha_{rr}^{(n)} \alpha_{r+1, r+1}^{(n)}$$

$$a_2 = \alpha_{rr}^{(n)} \beta_{r+1, r+1}^{(n)} + \alpha_{r+1, r+1}^{(n)} \beta_{rr}^{(n)} - \gamma_{r+1, r}^{(n)} \gamma_{r, r+1}^{(n)}$$

$$a_0 = \beta_{rr}^{(n)} \beta_{r+1, r+1}^{(n)}$$

Les racines de (20) sont données par

$$s = \pm \left\{ \frac{-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4a_4 a_0}}{2a_4} \right\}^{1/2} \tag{21}$$

Le comportement de la membrane dépend des caractéristiques des racines  $s$ .

### 3. Résultats

#### 3.1 Instabilité statique (divergence)

Lorsque les racines de (20) sont réelles positives, il n'y a pas d'oscillation de la membrane, mais toute perturbation initiale croît avec le temps, la membrane est statiquement instable.

La condition tirée de (21) pour laquelle la membrane diverge est

$$a_0 \leq 0$$

c'est-à-dire

$$\beta_{rr}^{(n)} = S \frac{\lambda_{rm}^2}{4} - \rho U_0^2 \frac{4}{L^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^2 n^2 \coth(\lambda_{rm} h_2)}{\lambda_{rm} (n^2 - m^2)^2} = 0$$

d'où l'on tire la vitesse de divergence

$$U_{0D} = \left\{ \frac{S \frac{\lambda_{rm}^2}{4}}{4 \frac{\rho}{L^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^2 n^2 \coth(\lambda_{rm} h_2)}{\lambda_{rm} (n^2 - m^2)^2}} \right\}^{1/2} \tag{22}$$

$$r = 1, 2, 3, \dots \infty$$

$$n = 2, 4, 6, \dots \infty$$

$$m = 1, 3, 5, \dots \infty$$

$r$  et  $n$  sont respectivement le nombre de demi-ondes dans la direction longitudinale et latérale.

Les longueurs d'ondes correspondantes sont

$$\lambda_x = \frac{2L}{r} \quad \lambda_y = \frac{2b}{n}$$

La figure 3 représente, pour une traction  $S$  donnée, la vitesse de divergence en fonction de  $\lambda_x$  pour différentes valeurs de  $n$ . La vitesse la plus faible est obtenue pour  $\lambda_x \cong 2,5$  m ( $r = 224$ ) et  $n = 2$  ( $\lambda_y = 3$  m).

#### 3.2 Instabilité dynamique (flottement)

Lorsque les racines de (20) sont des nombres complexes dont la partie réelle est positive,  $e^{st}$  représente une oscillation de la membrane dont l'amplitude croît avec le temps. La membrane est dynamiquement instable. La condition tirée de (21) pour laquelle la membrane flotte est

$$P = a_2^2 - 4a_4 a_0 \leq 0$$

Le calcul de  $P$ , effectué pour différentes vitesses d'écoulement et différentes combinaisons de  $r$  et de  $n$  montre que la vitesse de flottement  $U_{0f}$  est plus élevée que la vitesse de divergence  $U_{0D}$ .



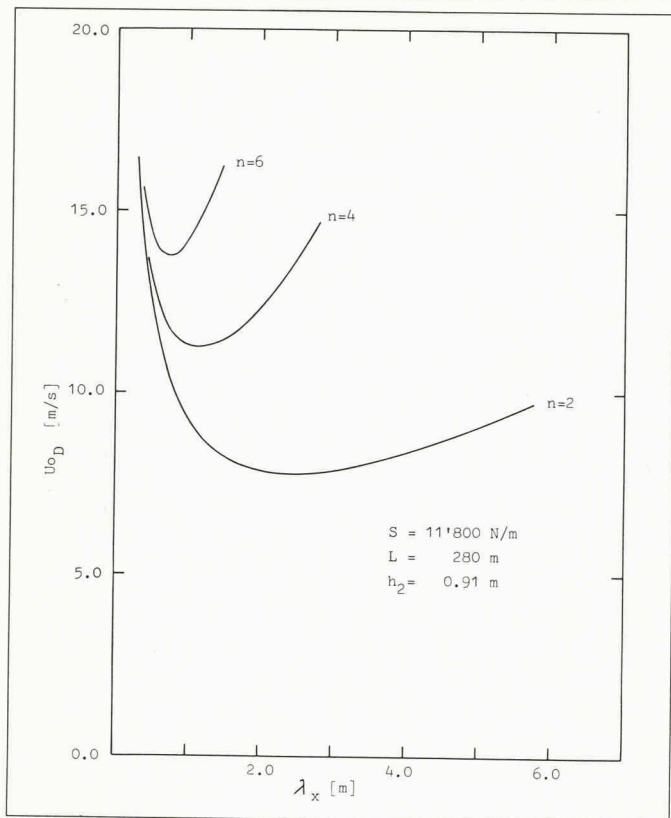


Fig. 3. — Vitesse de divergence en fonction de la longueur d'onde longitudinale.

#### Remerciements

L'auteur remercie les sociétés Gnehm + Schaefer et Hydroconseil d'avoir bien voulu autoriser la publication de cet article.

La figure 4 représente les vitesses de divergence et de flottement minimales en fonction de la traction  $S$ .

Dans le domaine compris entre la courbe  $U_{0D}$  (vitesse de divergence) et l'axe des  $S$ , le comportement de la membrane est stable. Si l'on continue d'augmenter la vitesse d'écoulement au-delà de la courbe  $U_{0D}$  tout en maintenant constante la traction  $S$ , la membrane diverge. Cette zone d'instabilité statique est toutefois limitée au voisinage immédiat de  $U_{0D}$  ( $S$ ). Lorsque  $U_0$  dépasse de quelque %  $U_{0D}$ , le comportement de la membrane est à nouveau stable, jusqu'au moment où l'écoulement atteint la vitesse de flottement  $U_{0F}$  (fig. 4).

Au-delà de la limite  $U_{0F}$  ( $S$ ) le comportement de la membrane est instable et l'amplitude du mouvement oscillatoire croît d'autant plus rapidement que la vitesse de l'écoulement est grande.

#### 4. Conclusions

Cette étude montre, compte tenu des simplifications et des hypothèses faites, que la membrane choisie ( $\delta = 12 \text{ mm}$ ,  $S = 11\,800 \text{ N/m}$ ) fixée environ à mi-hauteur, à l'intérieur du siphon, présente un comportement stable pour des vitesses ne dépassant pas 7,7 m/s environ. La vitesse de l'écoulement dans le siphon étant de 2 m/s au maximum, le dispositif prévu bénéficie, sur le plan de la stabilité d'une marge de sécurité importante.

La largeur  $b$  de la conduite rectangulaire étant choisie égale au diamètre du siphon ( $D = 3 \text{ m}$ ), la hauteur  $h_2$  a été déterminée en fonction du rayon de courbure  $R_M$  de la membrane placée dans le siphon (fig. 2). La variation de  $h_2$  correspondant à des rayons de courbure allant de 3 à 6 m n'influence que très peu les vitesses de divergences et de flottement.

#### Adresse de l'auteur :

Gérard Capitaine  
 D' sc. tech., ing., méc. EPFZ-SIA  
 Chemin de la Pralay 16  
 1294 Genthod

#### Bibliographie

- [1] Dispositif de régulation de la vitesse d'écoulement des eaux usées dans un siphon. Gnehm + Schaefer AG, Bâle, Hydroconseil Sàrl, L'Isle-Adam (F). Brevet n° 82/18643 déposé à l'Institut national de la propriété industrielle à Paris, le 4.11.82 au nom de M. U. Schaefer, Ingénieur-bureau Gnehm + Schaefer AG, Bâle.
- [2] E. H. DOWELL, *Aeroelasticity of plates and shells*, Noordhoff International Publishing, 1975.
- [3] H. FAVRE, *Cours de mécanique*, vol. II et III, Dunod Editeur, 1959.
- [4] W. I. SMIRNOW, *Lehrgang der höheren Mathematik*, vol. II, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1963.
- [5] J. DUGUNDJI, E. DOWELL & B. PERKIN, *Aeroelastic flutter of plates on continuous elastic foundations*, AIAA Journal, vol. 1, n° 5, 1963.

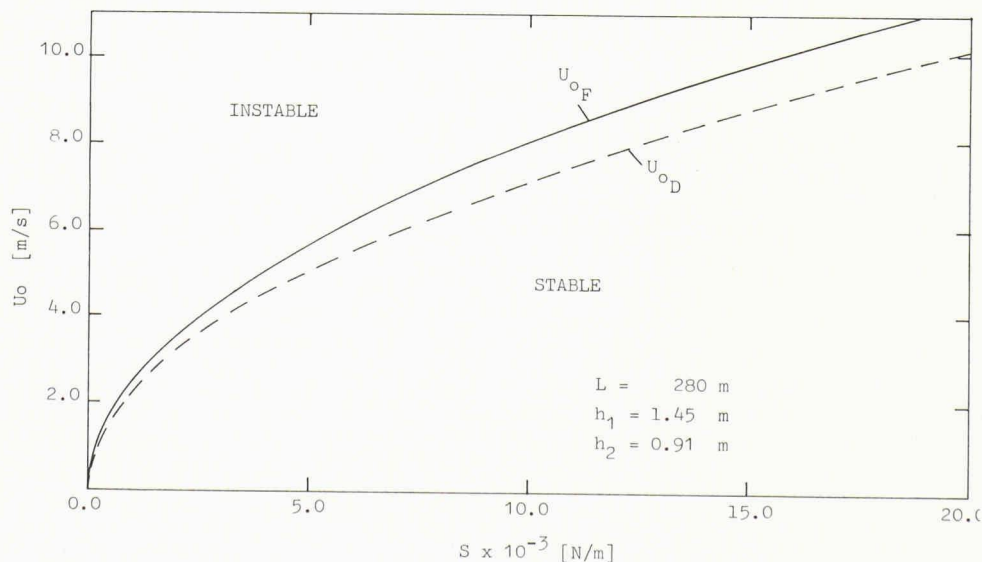


Fig. 4. — Vitesse de divergence,  $U_{0D}$  et de flottement  $U_{0F}$  en fonction de la traction  $S$ .