BERN, den 1. VII. 1950 № 7 JAHRGANG - ANNÉE - ANNO XXVIII

TECHNISCHE MITTEILUNGEN

HERAUSGEGEBEN VON DER SCHWEIZERISCHEN POST-, TELEGRAPHEN- UND TELEPHONVERWALTUNG

BULLETIN TECHNIQUE/BOLLETTINO TECNICO

PUBLIÉ PAR L'ADMINISTRATION DES POSTES, TÉLÉGRAPHES ET TÉLÉPHONES SUISSES

PUBBLICATO DALL'AMMINISTRAZIONE DELLE POSTE, DEI TELEGRAFI E DEI TELEFONI SVIZZERI

Theoretische Grundlage zu einer Messmethode für die Bestimmung des spezifischen Wechselstrom-Erdwiderstandes

Von *H. Weber*, Zürich

Principe théorique d'une méthode de mesure de la résistance spécifique de la terre pour le courant alternatif

Par *H. Weber*, Zurich

621.317.331:621.316.99

Zusammenfassung. *Es werden die theoretischen Grundlagen für eine Messmethode entwickelt, die gestattet, aus dem Verlauf des magnetischen Feldes einer Leitung mit Erdrückleitung auf den Wechselstromerdwiderstand des Bodens zu schliessen. Am Schluss der Arbeit wird das Vorgehen bei der praktischen Durchführung der Messung angegeben.*

Zur Berechnung der induktiven Beeinflussung von Fernmeldeleitungen — seien es solche in Kabeln oder auf Freileitungen — durch Hochspannungsleitungen im einphasigen Kurzschluss mit Erdrückleitung, ist die Kenntnis eines mittleren Wertes des spezifischen Erdwiderstandes Voraussetzung. Wird dieser für eine grössere Zone als konstant vorausgesetzt, so kann die Gegeninduktivität zweier paralleler Leitungen in Funktion der geometrischen Anordnung und der Frequenz, dank den Arbeiten von F. *Pollaczek*[1])[2]), gut berechnet werden. Besonders die zweite Arbeit enthält eine Reihe von Annäherungsformeln bei verschiedenen Voraussetzungen. *J. Collard*[3]) entwickelte auf Grund dieser und anderer Arbeiten eine Methode zur Messung des spezifischen Erdwiderstandes mittels einer Spule. Die Gegeninduktivität zwischen einer eindrähtigen, die Erde als Rückleiter benutzenden Leitung und einer im Vergleich zu deren Dimension kleinen Spule ist proportional zum Differentialquotienten der Gegeninduktivität mit einer zweiten am Ort der Spule gedachten parallelen Leitung in Abhängigkeit des seitlichen Abstandes. Schickt man durch die Leitung einen konstanten Wechselstrom, so findet man, dass in der Nähe der Leitung die in der Spule induzierte elektromotorische Kraft unabhängig vom spezifischen Erdwiderstand

[1]) *F. Pollaczek.* ENT **3,** 1926, S. 339...359.
[2]) *F. Pollaczek.* ENT **4,** 1927, S. 18...30.
[3]) *J. Collard.* J. Inst. Electr. Eng. **78,** 1936, p. 100...104.
J. Collard. Electr. Communication **14,** 1935/36, p. 270...274.

Résumé. *L'article ci-dessous expose les principes d'une méthode de mesure qui permet de déterminer la résistance du sol pour le courant alternatif d'après la courbe du champ magnétique produit par une ligne avec retour par la terre. Il décrit enfin en détail la manière de procéder à la mesure.*

Pour calculer l'influence inductive exercée sur des lignes de télécommunication (lignes en câble ou lignes aériennes) par des lignes à haute tension dans le cas de court-circuit d'une phase avec retour par la terre, il est nécessaire de connaître la valeur moyenne de la résistance spécifique de terre. Si l'on admet que celle-ci est constante pour une zone étendue, l'inductance mutuelle de deux lignes parallèles peut parfaitement être déterminée en fonction de la disposition géométrique et de la fréquence, grâce aux travaux de *F. Pollaczek*[1])[2]). Le deuxième travail en particulier contient une série de formules approximatives pour diverses conditions. D'après ces travaux et ceux d'autres chercheurs, *J. Collard*[3]) a trouvé une méthode pour mesurer la résistance spécifique de la terre à l'aide d'une bobine. L'inductance mutuelle entre une ligne d'un seul fil utilisant la terre pour le retour et une bobine de faible dimension par rapport à celle de la ligne, est proportionnelle à la dérivée, par rapport à la distance latérale, de l'inductance mutuelle de cette ligne avec une deuxième ligne supposée occuper la place de la bobine. Si l'on envoie sur la ligne un courant alternatif constant, on constate qu'au voisinage de la ligne la force électromotrice induite dans la bobine est indépendante de la résistance de terre spécifique, mais qu'en revanche

[1]) *F. Pollaczek.* ENT **3,** 1926, S. 339...359.
[2]) *F. Pollaczek.* ENT **4,** 1927, S. 18...30.
[3]) *J. Collard.* J. Inst. Electr. Eng. **78,** 1936, p. 100...104.
J. Collard. Electr. Communication **14,** 1935/36, p. 270...274.

wird, dagegen in grösserer Entfernung stark von diesem abhängt. *Collard* zieht die Zone unmittelbar bei der Leitung nicht in Betracht. Aber gerade deren Berücksichtigung vereinfacht seine Messmethode wesentlich, zudem gewinnen die Resultate an Sicherheit. *Collard* vernachlässigt in seiner Ableitung die Höhe der induzierenden Leitung über dem Erdboden, das heisst, seine Messmethode ist erst in einiger Entfernung von der Leitung anwendbar. In der folgenden Betrachtung wird den Beziehungen in Leitungsnähe grosses Gewicht beigemessen.

Es bedeuten in den Formeln:

h = Höhe der induzierenden Leitung (m)
y = Höhe der induzierten Leitung (m)
x = Horizontaldistanz der beiden Leitungen (m)
k = $\sqrt{\mu_0 \sigma w}$ (m^{-1})
σ = spezifische Leitfähigkeit der Erde ($\Omega^{-1}\,m^{-1}$)
μ_0 = $4\pi 10^{-7}$ H/m
ω = $2\pi f$ Kreisfrequenz (s^{-1})
γ = 1,7811. — (Eulersche Konstante)
M = Gegeninduktivität der parallelen Leitungen (H/m)
m = Gegeninduktivität der induzierenden Leitung mit einer Spule mit vertikaler Achse (H)
A = Spulenfläche (m^2)
w = Windungszahl der Spule
kx = Numerischer Abstand
ln = Natürlicher Logarithmus

Für grossen numerischen Abstand $(kx) > 3{,}5$ gilt nach *Pollaczek*

elle en dépend fortement lorsque la distance est grande. Collard ne prend pas en considération la zone située au voisinage immédiat de la ligne. Mais sa méthode de mesure est justement beaucoup simplifiée si l'on tient compte de cette zone, et les résultats gagnent en précision. Dans ses déductions, *Collard* néglige la hauteur de la ligne inductrice au-dessus du sol, c'est-à-dire que sa méthode n'est applicable qu'à une certaine distance de la ligne. Dans les considérations qui suivent, on a donné une grande importance aux relations existant au voisinage de la ligne. Les symboles employés dans les formules signifient:

h = hauteur de la ligne inductrice (m)
y = hauteur de la ligne induite (m)
x = distance horizontale entre les deux lignes (m)
k = $\sqrt{\mu_0 \sigma \omega}$ (m^{-1})
σ = conductivité spécifique de la terre ($\Omega^{-1}\,m^{-1}$)
μ_0 = $4\,\pi\,10^{-7}$ H/m
ω = $2\pi f$ pulsation (s^{-1})
γ = 1,7811. — (constante d'Euler)
M = inductance mutuelle des lignes parallèles (H/m)
m = inductance mutuelle de la ligne avec une bobine à axe vertical (H)
A = surface de la bobine (m^2)
w = nombre de spires de la bobine
kx = distance numérique
ln = logarithme naturel

Pour une distance numérique $(kx) > 3{,}5$, il faut, selon *Pollaczek*, appliquer la formule

$$1)\quad M = \frac{\mu_0}{2\pi}\left\{\ln\sqrt{\frac{x^2+(y+h)^2}{x^2+(y-h)^2}} - \frac{2}{k^2}\,\frac{x^2-(y+h)^2}{[x^2+(y+h)^2]^2} + 2\,\mathrm{j}\,k\,(y+h)\left[\frac{1}{k^2\,(x^2+(y+h)^2)} + \frac{3\,x^2-(y+h)^2}{k^4\,(x^2+(y+h)^2)^3}\right]\right\}$$

Wird $y = 0$ gesetzt und $x \gg h$ gewählt, so ist die Gegeninduktivität nur noch vom zweiten Glied bestimmt.

$$2)\qquad M = -\frac{\mu_0}{\pi \cdot k^2 \cdot x^2}$$

Die Gegeninduktivität m wird bei gleichen Voraussetzungen berechnet zu

$$3)\qquad m = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}\cdot A \cdot w = \frac{2\,\mu_0}{k^2 \cdot x^3}\cdot A \cdot w$$

$k^2 = \mu_0 \cdot \omega \cdot \sigma$ in 3) eingesetzt, erhält man

$$m = \frac{A \cdot w}{\pi^2 \sigma f x^3} \quad \text{und schliesslich}$$

$$4)\qquad \frac{m}{\sqrt{f}} = \frac{A \cdot w}{\pi^2}\cdot\frac{1}{\sigma}\cdot\left(\frac{1}{x\sqrt{f}}\right)^3$$

Es ergibt sich eine Kurvenschar mit dem Parameter σ = konstant der Grösse $\frac{m}{\sqrt{f}}$ in Funktion von $x\sqrt{f}$, die, im logarithmischen Maßstab aufgetragen, eine Schar steil abfallender paralleler Geraden darstellt (siehe Fig. 1). Dieser Teil deckt sich mit der von *Collard* verwendeten Kurvenschar.

Si l'on admet que $y = 0$ et si l'on choisit $x \gg h$, l'inductance mutuelle n'est plus déterminée que par le second terme.

$$2)\qquad M = -\frac{\mu_0}{\pi \cdot k^2 \cdot x^2}$$

Toutes choses restant égales, l'inductance mutuelle m devient

$$3)\qquad m = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}\cdot A \cdot w = \frac{2\,\mu_0}{k^2 \cdot x^3}\cdot A \cdot w$$

$k^2 = \mu_0 \cdot \omega \cdot \sigma$ intercalé dans la formule 3), on obtient

$$m = \frac{A \cdot w}{\pi^2 \sigma f x^3} \quad \text{et enfin}$$

$$4)\qquad \frac{m}{\sqrt{f}} = \frac{A \cdot w}{\pi^2}\cdot\frac{1}{\sigma}\cdot\left(\frac{1}{x\sqrt{f}}\right)^3$$

Il en résulte une famille de courbes, avec le paramètre σ = constante, de la valeur $\frac{m}{\sqrt{f}}$ en fonction de $x\sqrt{f}$; portée selon une échelle logarithmique, cela donne une famille de droites parallèles descendantes, à pente rapide (voir fig. 1). Cette partie correspond à la famille de courbes utilisée par *Collard*.

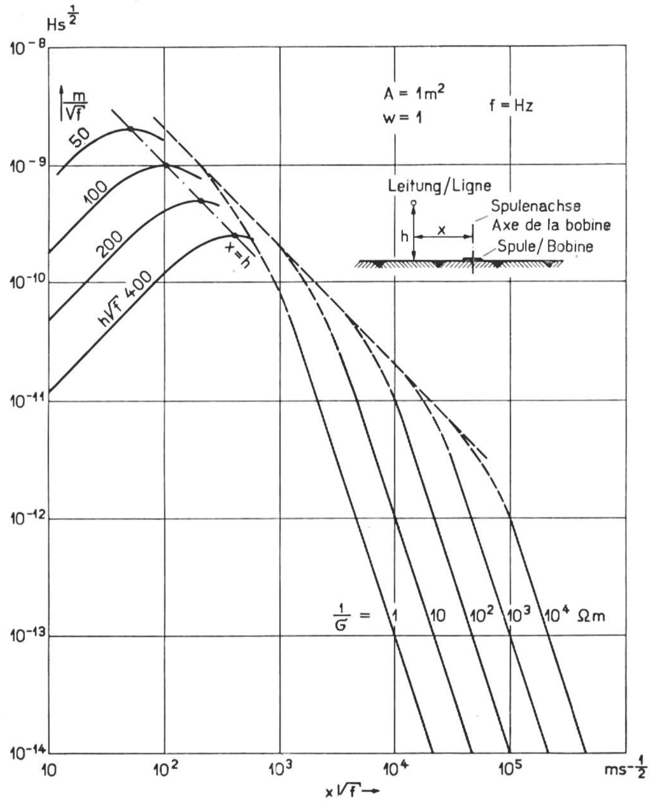

Fig. 1.
Gegeninduktivität einer Einfachleitung – mit Erde als Rückleitung — zu einer Spule, in Abhängigkeit des seitlichen Abstandes und der Frequenz

Inductance mutuelle d'une ligne à un conducteur — avec retour par la terre — et d'une bobine, en fonction de la distance latérale et de la fréquence.

Für kleinen numerischen Abstand $kx < 0{,}5$ gibt *Pollaczek* für die Gegeninduktivität zweier paralleler Einfachleiter mit Erdrückleitung folgenden Ausdruck:

Pour la faible distance numérique $kx < 0{,}5$, *Pollaczek* donne l'expression suivante pour l'inductance mutuelle de deux conducteurs simples parallèles avec retour par la terre:

5) $$M = \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{2\ln\frac{2}{\gamma k\sqrt{x^2+(y-h)^2}} + 1 - j\left[\frac{\pi}{2} + \frac{4k(y+h)}{3}\right]\right\}$$

Nur das erste Glied ist von x abhängig. $y = 0$ gesetzt, ergibt für m

6) $$m = \frac{dM}{dx} = -\frac{\mu_0 \cdot A \cdot w}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2+h^2}$$

Die maximale Gegeninduktivität zur Spule liegt bei $x = h$ und ihr absoluter Wert

7) $$m_{max} = \frac{\mu_0 \cdot A \cdot w}{4\pi \cdot h}$$

7') $$\frac{m_{max}}{\sqrt{f}} = \frac{10^{-7} \cdot A \cdot w}{h\sqrt{f}}$$

6') $$\frac{m}{\sqrt{f}} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot A \cdot w \frac{x\sqrt{f}}{(x\sqrt{f})^2 + (h\sqrt{f})^2}$$

Die Abhängigkeit von $\frac{m}{\sqrt{f}}$ ist in Fig. 1 für einige Werte von $h\sqrt{f}$ eingetragen. Diese Kurvenschar ist vom spezifischen Erdwiderstand $\frac{1}{\sigma}$ unabhängig und stellt den Verlauf der Gegeninduktivität bei kleinem $x \cdot \sqrt{f}$ dar. Bei $x = 0$ ist auch $m = 0$, was bei homogener Feldverteilung ohne weiteres erwartet werden muss.

Seul le premier terme dépend de x. Si l'on admet $y = 0$, on obtient pour m

6) $$m = \frac{dM}{dx} = -\frac{\mu_0 \cdot A \cdot w}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2+h^2}$$

L'inductance mutuelle est maximum par rapport à la bobine lorsque $x = h$ et sa valeur absolue est alors

7) $$m_{max} = \frac{\mu_0 \cdot A \cdot w}{4\pi \cdot h}$$

7') $$\frac{m_{max}}{\sqrt{f}} = \frac{10^{-7} \cdot A \cdot w}{h\sqrt{f}}$$

6') $$\frac{m}{\sqrt{f}} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot A \cdot w \frac{x\sqrt{f}}{(x\sqrt{f})^2 + (h\sqrt{f})^2}$$

La valeur de $\frac{m}{\sqrt{f}}$ est reportée sur la fig. 1 pour quelques valeurs de $h\sqrt{f}$. Cette famille de courbes est indépendante de la résistance spécifique de la terre $\frac{1}{\sigma}$ et représente la variation de l'inductance mutuelle lorsque $x\sqrt{f}$ est petit. Lorsque $x = 0$, m est aussi égal à 0, ce à quoi on peut naturellement s'attendre lorsque la répartition du champ est homogène.

Wird in der Formel 6') $h = 0$ gesetzt, so erhält man den Ausdruck

$$8)\qquad \frac{m}{\sqrt{f}} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{A \cdot w}{x\sqrt{f}}$$

Die Formel 8) ist identisch mit der von *Collard* für seine Messungen benutzten Beziehung. In der Fig. 1 entspricht dies einer unter 45° abfallenden Geraden, in welche alle σ-Kurven grosser numerischer Entfernung bei abnehmenden x hineinlaufen. Da h nicht gleich Null ist, wird der tatsächliche Verlauf der Kurve für ein bestimmtes σ, h und f bei abnehmendem x diese Gerade nicht erreichen, sondern vorher in eine $h\sqrt{f}$ entsprechende Kurve abbiegen.

Die Berechnungsmethode ist zulässig, solange die Spulendimension klein gegen die Leitungshöhe der störenden Leitung ist, was im allgemeinen stets der Fall sein wird.

Die Messung wird nun folgendermassen ausgeführt:

1. Durch die induzierende Leitung wird ein konstanter Wechselstrom einer bestimmten Frequenz geschickt.
2. Die in der Suchspule induzierte EMK bei vertikaler Spulen-Achse und die Spule unmittelbar auf der Erdoberfläche liegend, wird mit einem relativ geeichten Rohrvoltmeter gemessen.
3. Die erste Messung erfolgt in einem horizontalen Abstand x von der Leitung, der gleich ist der Höhe h der Leitung über dem Erdboden. Da der Ordinatenmaßstab im Diagramm logarithmisch ist, kann die gemessene EMK mit dem $h.\sqrt{f}$ entsprechenden Maximalwert von $\frac{m}{\sqrt{f}}$ zur Deckung gebracht werden.
4. Weitere Messungen der EMK in verschiedenen, grossen numerischen Abständen seitlich der Leitung werden entsprechend der Abszisse $x \cdot \sqrt{f}$ als Ordinate bezüglich der ersten Messung eingetragen.
5. Sind die Voraussetzungen in bezug auf die Homogenität der Erde erfüllt, so liegen diese Messpunkte auf einer der σ-Geraden, woraus dann σ bzw. $\frac{1}{\sigma}$ abgelesen werden kann.

Näheres über die Erfahrungen, die mit der vorbeschriebenen Methode gemacht wurden, ist in der nachfolgenden Arbeit von *H. Meister*[4]) enthalten. Es sei hier noch darauf hingewiesen, dass diese Suchspulenmethode stark auf Inhomogenitäten des Erdbodens hinsichtlich der Erdleitfähigkeit reagiert, so dass sie wahrscheinlich mit Erfolg auch für erdphysikalische Forschungen ausgebaut werden kann.

[4]) Vgl. *Hans Meister*. Untersuchungen über die Beeinflussung eines Telephonnetzes durch eine Hochspannungs-Freileitung im Falle eines Erdschlusses. Techn. Mitt." PTT 1950, Nr. 7, S. 261...283 (das heisst in der vorliegenden Nummer).

Adresse des Verfassers: Prof. *H. Weber*, Institut für Fernmeldetechnik der Eidg. Technischen Hochschule, Sternwartestrasse 7, Zürich.

Si, dans la formule 6'), on prend $h = 0$, on obtient l'expression

$$8)\qquad \frac{m}{\sqrt{f}} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{A \cdot w}{x\sqrt{f}}$$

La formule 8) est identique à la relation employée par *Collard* pour ses mesures. Dans la figure 1, cette formule correspond à une droite tombant à 45 degrés dans laquelle se fondent les courbes pour tout σ lorsque la distance numérique est grande et que x diminue. Comme h n'est pas égal à zéro, la courbe pour des valeurs déterminées de σ, h et f n'atteint pas cette droite lorsque x diminue, mais elle est déviée avant en une courbe correspondant à $h\sqrt{f}$.

Cette méthode de calcul est applicable tant que la dimension de la bobine est faible par rapport à la hauteur de la ligne perturbatrice, ce qui est presque toujours le cas.

On exécute la mesure de la manière suivante:

1. Un courant alternatif constant de fréquence donnée est envoyé dans la ligne inductrice.
2. La force électromotrice induite dans la bobine lorsque l'axe de celle-ci est vertical et qu'elle repose directement sur le sol est mesurée à l'aide d'un voltmètre électronique étalonné relativement.
3. La première mesure a lieu à une distance horizontale x de la ligne, égale à la hauteur h de la ligne au-dessus du sol. Comme, dans le diagramme, l'échelle des ordonnées est logarithmique, il est possible de faire coïncider la force électromotrice mesurée avec la valeur $h \cdot \sqrt{f}$ correspondant au maximum de $\frac{m}{\sqrt{f}}$
4. D'autres mesures de la force électromotrice, faites latéralement en des points situés à différentes grandes distances numériques sont reportées sur l'abscisse $x \cdot \sqrt{f}$ et l'ordonnée correspondant à celle de la première mesure.
5. Si les conditions voulues d'homogénéité du sol sont remplies, les points mesurés se trouvent sur l'une des droites σ, et l'on peut alors lire la valeur de σ, respectivement de $\frac{1}{\sigma}$.

Le travail qui suit, de *H. Meister*,[4]) donne de plus amples détails sur les expériences faites avec la méthode que nous venons de décrire. Ajoutons que cette méthode de mesure au moyen d'une bobine réagit fidèlement aux défauts d'homogénéité du sol et qu'elle pourra probablement être adaptée avec succès aux recherches sur la constitution physique du sol.

[4]) Voir *Hans Meister*. Essais faits en vue de déterminer l'influence exercée sur un réseau téléphonique en cas de mise à terre d'une ligne aérienne à haute tension. Bull. techn. PTT 1950, N° 7, p. 261 à 283 (c'est-à-dire dans le présent numéro).

Adresse de l'auteur: *H. Weber*, professeur à l'Institut de technique des télécommunications de l'Ecole polytechnique fédérale, Sternwartestrasse 7, Zurich.