

# Messungen mechanischer und akustischer Impedanzen

Autor(en): **Kurtze, G.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Technische Mitteilungen / Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafienbetriebe = Bulletin technique / Entreprise des postes, téléphones et télégraphes suisses = Bollettino tecnico / Azienda delle poste, dei telefoni e dei telegrafi svizzeri**

Band (Jahr): **34 (1956)**

Heft 9

PDF erstellt am: **05.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-874539>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

TECHNISCHE MITTEILUNGEN  
BULLETIN TECHNIQUE

PTT  
BOLLETTINO TECNICO

Herausgegeben von der Schweizerischen Post-, Telegraphen- und Telephonverwaltung. Publié par l'administration des postes, télégraphes et téléphones suisses. Pubblicato dall'amministrazione delle poste, dei telegrafi e dei telefoni svizzeri

Messung mechanischer und akustischer Impedanzen

Von G. Kurtze, Göttingen

621.317.39

**Zusammenfassung.** Im Anschluss an eine kurze Betrachtung der elektromagnetischen Analogien wird eine Übersicht über die zur Messung mechanischer und akustischer Impedanzen gebräuchlichen Verfahren gegeben. Besonders eingehend wird dabei die Messung akustischer Impedanzen mittels stehender Wellen im schallhart und schallweich begrenzten Impedanz-Messrohr behandelt, wobei die hier sehr weit gehenden Analogien zwischen akustischer Messtechnik und der Messtechnik für elektromagnetische Wellen gleicher Wellenlänge aufgezeigt werden.

Der Anhang enthält eine Zusammenstellung der für Messungen an schwingungsfähigen Gebilden wichtigen Dämpfungs- und Gütebegriffe und ihrer gegenseitigen Verknüpfungen.

Während für die Messung elektrischer Impedanzen heute praktisch alle erforderlichen Messgeräte und Hilfsmittel vom Ohmmeter bis zum Ortskurvenschreiber in kommerzieller Form erhältlich sind, ist man für die Messung mechanischer Impedanzen fast ausschliesslich auf laboratoriumsmässig zusammengestellte Messanordnungen angewiesen. Zweifellos ist der Anwendungsbereich der elektrischen Impedanzmessung auch ein wesentlich grösserer als der der mechanischen Messung, aber schliesslich spielen auch in der Mechanik und Akustik Fragen der Anpassung etwa von Schwingungsgebern an das Objekt oder von Tonabnehmern an die Schallplatte usw. eine grosse Rolle. Obwohl mechanische Schaltelemente im allgemeinen wesentlich komplizierter sind als die entsprechenden elektrischen – man denke nur an die Schwierigkeit der Realisierung eines reellen (Reibungs-) Widerstandes gegebener Grösse –, ist man hier wegen des Fehlens geeigneter Messgeräte oft auf die Rechnung angewiesen.

Elektromechanische Analogien

Da die Messung mechanischer Grössen, mit Ausnahme der optischen Amplitudenmessung bei tiefen Frequenzen, stets mit elektrischen Geräten erfolgt, hat man fast immer gemischte elektromechanische

**Résumé.** L'auteur expose d'abord brièvement les analogies électromagnétiques, puis mentionne les procédés les plus employés pour la mesure d'impédances mécaniques et acoustiques. Il traite en particulier de la mesure d'impédances acoustiques au moyen d'ondes stationnaires dans le tube de mesure d'impédances ayant une terminaison rigide ou souple, et montre la grande analogie qui existe entre la technique de mesure des ondes acoustiques et celle de la mesure des ondes électromagnétiques de même longueur.

L'appendice contient une récapitulation des notions d'affaiblissement et de qualité importantes pour les mesures à exécuter sur des systèmes oscillants, ainsi que de leurs combinaisons réciproques.

Schwingungsgebilde vor sich. Aus diesem Grunde und wegen der meist grösseren Übung im Umgang mit elektrischen Schaltelementen werden elektromechanische Analogien benutzt, mit deren Hilfe gemischte Schaltungen durch rein elektrische Ersatzschaltbilder beschrieben werden können. Die wichtigsten Analogien seien deshalb im folgenden kurz dargestellt.

Die in Analogie zu setzenden Schaltelemente sind

<i>elektrisch:</i>		<i>mechanisch:</i>	
Widerstand	R	Widerstand	W
Kapazität	C	Federung	F
Induktivität	L	Masse	M

wobei die Federung F den Reziprokwert der Federsteife, bzw. der Federkonstanten darstellt. Für die Messgrössen Spannung u und Strom i im elektrischen und Kraft k und Geschwindigkeit v (Schnelle) im mechanischen Fall gelten die Beziehungen:

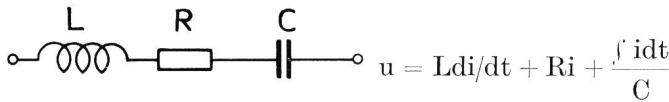
$$\begin{array}{lll}
 u = iR & k = vW & v = k/W \\
 u = \frac{\int i dt}{C} & k = \frac{\int v dt}{F} & v = \frac{\int k dt}{M} \\
 u = L di/dt & k = M dv/dt & v = F dk/dt.
 \end{array}$$

Daraus ergeben sich sofort die beiden wichtigsten Analogien:

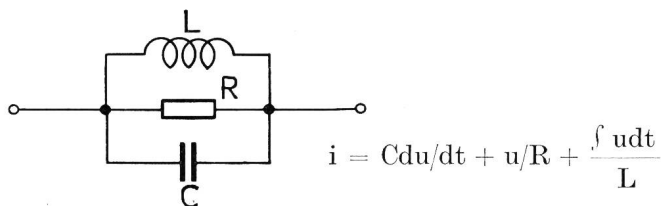
	I	II
u .....	k .....	v
i .....	v .....	k
L .....	M .....	F
C .....	F .....	M
R .....	W .....	1/W

Die wesentlichen Unterschiede zwischen den beiden Analogien zeigen sich, wenn man einfache Schwingungsgebilde wie zum Beispiel Resonanzkreise und ihre Differentialgleichungen betrachtet. Die Gleichungen für elektrische Schwingkreise lauten:

Serienkreis

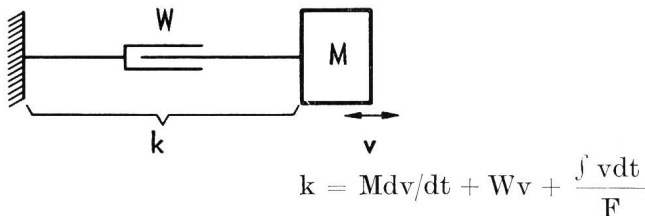


Parallelkreis

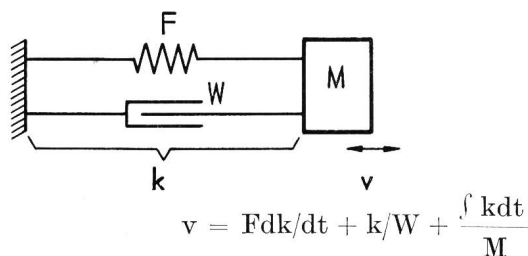


Das mechanische Analogon zum elektrischen Serienkreis ist derjenige mechanische «Kreis», bei dem alle Elemente vom gleichen «Strom» durchflossen werden, also bei Benutzung der Analogie I ( $i \sim v$ ) die gleiche Geschwindigkeit haben. Das ist beim mechanischen Parallelkreis der Fall.

Mechanischer Parallelkreis



Mechanischer Serienkreis



Beim mechanischen Serienkreis wirkt auf alle Elemente die gleiche Kraft ( $u \sim k$ ). Die Identität der Gleichungen zeigt, dass bei Benutzung der Analogie I die elektrische Parallelschaltung einer mechanischen Serienschaltung entspricht und umgekehrt. Bei der Analogie II bleibt die Schaltungsart erhalten, wodurch diese Analogie für die Aufstellung von rein elektrischen Ersatzschaltbildern für elektromechanische Gebilde geeignet ist. Der elektrische Widerstand entspricht hier jedoch dem Reziprokwert des mechanischen.

Analog der elektrischen Impedanz ist die mechanische Impedanz definiert als das komplexe Verhältnis von Kraft  $k$  und Geschwindigkeit (Schnelle)  $v$

$$W = k/v = \frac{k_0 e^{j\omega t}}{v_0 e^{j(\omega t - \varphi)}} = |W| e^{j\varphi} = x + jy.$$

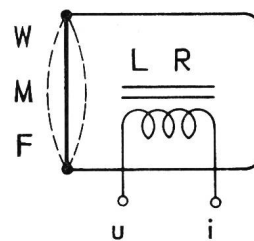
Zu dem oft allein interessierenden Betrag  $|W|$  der Impedanz gehört also ein Phasenwinkel  $\varphi$ , bzw. es sind Realteil  $x$  (Wirkwiderstand) und Imaginärteil  $y$  (Blindwiderstand) zur Charakterisierung erforderlich.

Von den verschiedenen Möglichkeiten der graphischen Darstellung von Impedanzkurven als Funktion der Frequenz seien hier nur die Ortskurven erwähnt. Dabei werden Real- und Imaginärteil der Impedanz in der komplexen Ebene mit der Frequenz als laufendem Parameter aufgetragen. Man erhält dann Kurvenzüge, aus denen die Eigenschaften der untersuchten Schwingungsgebilde deutlich ersichtlich sind. Die Ortskurve eines mechanischen Parallelkreises zum Beispiel ist eine Gerade, parallel zur imaginären Achse, die die reelle Achse bei dem Wert  $W$  des Dämpfungswiderstandes schneidet. Ein mechanischer Serienkreis liefert als Ortskurve einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf der reellen Achse liegt und der die reelle Achse bei dem Wert des Dämpfungswiderstandes  $W$  (Resonanzfrequenz) und im Ursprung (Frequenzen 0 und  $\infty$ ) schneidet.

Wie wir im elektrischen Fall neben den Impedanzen konzentrierter Schaltelemente die Feldimpedanzen (Wellenwiderstände) haben, so gibt es auch in der Mechanik neben der mechanischen Impedanz ( $W = k/v$ ) die akustische Impedanz  $Z$ , definiert als Quotient aus Schalldruck und -schnelle ( $Z = p/v$ ). Im Gegensatz zur mechanischen Impedanz ist diese also eine flächenbezogene Grösse.

Messung mechanischer Impedanzen

Eine einfache, aber relativ ungenaue Methode, mechanische Impedanzen zu messen, ist die Messung der elektrischen Eingangsimpedanz eines elektromechanischen Wandlers, der mit der betreffenden Impedanz belastet ist, als Funktion der Frequenz. Dies sei am Beispiel eines elektromagnetischen Telefons erläutert.



Das Telefon ist charakterisiert durch die elektrischen Grössen  $L$  und  $R$  und durch Masse  $M$ , Widerstand  $W$  und Federung  $F$  der Membran und des dahinter liegenden Luftpolsters. Mit dem elektromechanischen

Kopplungsfaktor  $\alpha$  gelten bei sinusförmiger Erregung mit der Kreisfrequenz  $\omega$  die Beziehungen:

$$k = \alpha i = M \ddot{x} + W \dot{x} + \frac{x}{F} = v [W + j(\omega M - \frac{1}{\omega F})] = vW$$

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + \alpha \frac{dx}{dt}; \frac{dx}{dt} = v = \alpha i/W,$$

wobei  $x$  die Auslenkung der Membran bedeutet. Der an den Eingangsklemmen des Telefons gemessene elektrische Scheinwiderstand setzt sich demnach zusammen aus

$$Z_{el} = \frac{u}{i} = R + j\omega L + \frac{\alpha^2}{W}.$$

Man erhält die gesuchte Impedanz  $W$  in Form einer Grösse, die sich zu der elektrischen Impedanz des Systems addiert. Die rein elektrischen Anteile der Gesamtimpedanz können dadurch ermittelt werden, dass man  $W$  gegen unendlich gehen lässt, also im Falle des Telefons die Membran festbremst. Da die mechanische Impedanz sich somit aus der Differenz zweier Messungen ergibt, ist die erzielbare Messgenauigkeit, wie bereits erwähnt, relativ gering. Günstiger ist es, die mechanische Impedanz direkt zu messen, wie das mit einem Vibrometer möglich ist.

Das Prinzip des Vibrometers besteht darin, mit zwei gekoppelten elektromechanischen Systemen erregende Kraft und erzeugte Schnelle gleichzeitig direkt zu messen. Dabei ist es belanglos, welche Arten von elektromechanischen Wandlern benutzt werden. Bei dem von *Matsudeira* und *Nukiyama* [1] beschriebenen Vibrometer werden zwei elektrodynamische Systeme verwendet. Dies ist zwar wegen der Schwierigkeit der magnetischen Entkopplung beider Systeme sicher nicht die günstigste Anordnung, doch hat sie den Vorteil, besonders instruktiv zu sein.

Das zu messende Objekt wird an die Schwing-spule eines elektrodynamischen Systems starr ange-koppelt, wobei der in der Spule fliessende Erreger-strom  $i$  ein Mass für die anregende Kraft  $k$  ist ( $k = \alpha i$ ). Auf den Spulenkörper der Erregerspule ist eine zweite gleichartige Spule aufgebracht, deren Aus-gangsspannung ein Mass für die Schnelle liefert ( $u = \alpha' v$ ). Wegen der Gleichheit der beiden im glei-chen Feld befindlichen Spulen gilt  $\alpha = \alpha'$ , so dass sich für die gesuchte Impedanz ergibt

$$W = \frac{k}{v} = \alpha^2 \cdot \frac{i}{u}.$$

Zur Entkopplung der beiden Spulen verwendet man zwei weitere, gegensinnig auf den starren Kern des Magneten gewickelte Spulen, von denen die eine mit der Erregerwicklung und die andere mit der Empfängerwicklung in Serie geschaltet ist. Die Mes-sung des Phasenwinkels zwischen  $u$  und  $i$  kann zum Beispiel mit einem *Larsen*kompensator oder aber auch mit einem direkt anzeigenden Phasemessgerät vorgenommen werden. Zur Impedanzmessung ist die Kenntnis des Kopplungsfaktors  $\alpha$  und der mecha-nischen Impedanz der bewegten Teile des Vibro-meters erforderlich. Letztere ist eine reine Masse, wenn die Einspannresonanz hinreichend weit unter-halb der Messfrequenz liegt, das heisst, wenn die Schwing-spule hinreichend weich aufgehängt ist. Beide Grössen lassen sich ermitteln, indem man das System

einmal im Leerlauf betreibt und in einem zweiten Versuch mit einer bekannten Masse belastet. Von den am Objekt gemessenen Werten ist dann lediglich noch die Masse der Schwing-spule in Abzug zu bringen. Da diese sehr klein gehalten werden kann, ist die mit dem Vibrometer erzielbare Messgenauigkeit wesent-lich grösser als bei dem vorerwähnten Verfahren.

Konstruktiv einfacher ist die Verwendung ver-schiedenartiger elektromechanischer Systeme im Vi-brometer, wie zum Beispiel elektrodynamische An-regung und piezoelektrische Schnellmessung. Die Entkopplung der beiden Systeme macht dann keine Schwierigkeiten. Da jedoch piezoelektrische Empfän-ger im allgemeinen keine Schnelleempfänger sind, ist eine elektrische Korrektur des Frequenzganges erfor-derlich.

### Messung akustischer Impedanzen

Prinzipiell könnte man bei der Messung akusti-scher Impedanzen genau so vorgehen wie bei den mechanischen Impedanzen, das heisst, man könnte Druck und Schnelle getrennt messen und den Quo-tienten bilden. Dieses Verfahren wird jedoch, da es Absolutmessungen erfordert, in der Praxis nicht an-gewandt. Man benutzt vielmehr – wie im elektri-schen Analogon – die in einem bekannten Medium (Luft, Wasser) an dem zu messenden Objekt auf-tretende Schallreflexion, um die Impedanz des Ob-jektes relativ zu der des umgebenden Mediums zu bestimmen.

Trifft eine Schallwelle, aus dem Medium 1 kom-mend, auf das Medium 2 auf, so erhalten wir neben der einfallenden Welle mit dem Schalldruck  $p_e$  und der Schnelle  $v_e$  eine reflektierte ( $p_r, v_r$ ) und eine durchgelassene Welle ( $p_d, v_d$ ). Nehmen wir an, dass die einfallende Welle eben ist und in  $x$ -Richtung fortschreitet, so gilt mit den Wellenzahlen  $k_{1,2} = 2\pi/\lambda_{1,2}$  und den Wellenwiderständen  $Z_{1,2}$  in den Me-dien 1 und 2:

$$\begin{aligned} p_e &= A e^{j(\omega t - k_1 x)}, & v_e &= \frac{A}{Z_1} e^{j(\omega t - k_1 x)} \\ p_r &= B e^{j(\omega t + k_1 x)}, & v_r &= -\frac{B}{Z_1} e^{j(\omega t + k_1 x)} \\ p_d &= C e^{j(\omega t - k_2 x)}, & v_d &= \frac{C}{Z_2} e^{j(\omega t - k_2 x)} \end{aligned}$$

An der Grenzfläche ergeben die Stetigkeitsbedin-gungen

$$\begin{aligned} A + B &= C & (\text{Gleichheit der Kräfte}) \text{ und} \\ \frac{A}{Z_1} - \frac{B}{Z_1} &= \frac{C}{Z_2} & (\text{Kontinuität der Bewegung}). \end{aligned}$$

Definiert man den Reflexionsfaktor  $P$  als das – wegen des Phasensprunges bei der Reflexion im all-gemeinen komplexe – Verhältnis  $P = B/A$  der Am-plituden der reflektierten und der einfallenden Welle, so ergibt sich:

$$P = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{Z_2/Z_1 - 1}{Z_2/Z_1 + 1}$$

[1] *Matsudeira, M., Nukiyama, H.*, J. Inst. Elect. Engrs Japan, May 1927.

und damit

$$Z_2 = Z_1 \frac{1 + P}{1 - P}$$

Die Impedanz lässt sich also in einfacher Weise aus dem Reflexionsfaktor errechnen.

Analog gilt für den «Durchlassfaktor»:

$$\frac{C}{A} = D = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}; \quad Z_2 = Z_1 \frac{D}{2 - D}$$

Für die Ermittlung des Reflexionsfaktors – der Durchlassfaktor wird nur in Ausnahmefällen zur Bestimmung der Impedanz benutzt – gibt es zwei Wege, nämlich die Ausmessung des Feldes stehender Wellen vor dem Objekt und den direkten Vergleich der reflektierten und der einfallenden Welle. Im zweiten Falle kann, damit die beiden Wellen getrennt erscheinen, entweder mit Empfängern hoher Richtwirkung oder im Impulsbetrieb gearbeitet werden. Das Impulsverfahren hat den Vorteil, dass Störungen im Schallfeld dann keine Rolle spielen, wenn die Störimpulse eine andere Laufzeit haben als das zu messende Signal. Es wird daher immer dann angewandt, wenn Störungen unvermeidlich sind, also bei Messungen in endlich ausgedehnten Medien, wie zum Beispiel in Wasserschall-Messtanks usw. Mit dem Impulsverfahren lässt sich allerdings nur der Betrag des Reflexionsfaktors ohne grosse Schwierigkeiten ermitteln, der jedoch vielfach allein von Interesse ist.

### Impedanzmessungen mittels stehender Wellen

Die sich vor dem Messobjekt ausbildende stehende Welle ist charakterisiert durch zwei Grössen: 1. Verhältnis der Wechseldruck- (oder Schnelle-) Amplituden in Minimum und Maximum der stehenden Welle  $\delta = p_{\min}/p_{\max}$  und 2. Abstand  $\Delta x$  zwischen Objekt (Bezugsebene) und nächstgelegenen Minimum der stehenden Welle. Man wählt zur Messung die Minima, da sie schärfer ausgeprägt sind als die Maxima.

Die Schalldruckverteilung in der stehenden Welle ist gegeben durch:

$$p(x,t) = f(t) (e^{-jkx} + Pe^{jkx})$$

und mit  $P = Pe^{j\varphi}$ :

$$p(x,t) = f(t) (e^{-jkx} + Pe^{j(kx+\varphi)}).$$

Gemessen wird der zeitliche Mittelwert des Betrages, der gegeben ist durch

$$p^2(x) = C [1 + P^2 + 2P\cos(2kx + \varphi)]. \quad (1)$$

Diese Ortsfunktion liefert Minima für

$$2kx + \varphi = -\pi, -3\pi, -5\pi, \dots$$

und Maxima für

$$2kx + \varphi = 0, -2\pi, -4\pi, \dots$$

wenn  $x = 0$  als Bezugsebene gewählt wird. Als Quotient aus den Extremwerten ergibt sich

$$p_{\min}/p_{\max} = \delta = \frac{1 - P}{1 + P}$$

das heisst, wir erhalten

$$P = |P| = \frac{1 - \delta}{1 + \delta}$$

für den Betrag des Reflexionsfaktors.

Der Phasensprung  $\varphi$  des Reflexionsfaktors lässt sich ebenfalls nach Gl. (1) ermitteln. Mit dem Abstand  $\Delta x$  des ersten Minimums von der Bezugsebene (Objektoberfläche) gilt wegen

$$\begin{aligned} -2k\Delta x + \varphi &= -\pi \\ &= \frac{4\pi\Delta x}{\lambda} - \pi = \pi(4\Delta x/\lambda - 1) \end{aligned}$$

mit  $\lambda$  = Wellenlänge der Schallwelle. Durch die Grössen  $\delta$ ,  $\Delta x$  und  $\lambda$  ist der Reflexionsfaktor  $P = Pe^{j\varphi}$  also vollständig bestimmt.

Die gesuchte, auf das Medium 1 bezogene Impedanz des Mediums 2 ergibt sich aus dem Reflexionsfaktor mit der Beziehung

$$Z = Z_2/Z_1 = \frac{1 + P}{1 - P}$$

Die Berechnung des Real- und Imaginärteiles von  $Z$  aus dem nach Betrag und Phase gemessenen Reflexionsfaktor  $P$  ist umständlich, und man benutzt daher für diese Umrechnung Diagramme (*Smith-Diagramm*), die eine konforme Abbildung der  $Z$ -Ebene auf die  $P$ -Ebene darstellen. Wie sich leicht ausrechnen lässt, liefert die Figur zwei orthogonale Kreisscharen in der  $P$ -Ebene für konstante Werte des Real- und Imaginärteiles von  $Z$ . In diesem Diagramm braucht dann also nur noch der gemessene Wert von  $P$  aufgesucht und der zugehörige Wert von  $Z$  an den Kreisscharen abgelesen zu werden.

Für die Praxis (Raumakustik) ist oft weniger die akustische Impedanz als die von dem betreffenden Medium absorbierte Energie von Interesse. Sie wird gekennzeichnet durch den Absorptionsgrad  $\alpha$ , der den Bruchteil der auftreffenden Energie in Prozenten angibt, der von dem betreffenden Medium nicht reflektiert, also entweder absorbiert oder weitergeleitet wird. Die Energiebilanz liefert für den Absorptionsgrad  $\alpha$ :

$$\alpha = 1 - |P|^2.$$

### Impedanzmessung im hart begrenzten Rohr

Messungen in stehenden Wellen setzen ein Feld von ebenen Wellen voraus. Zwar kann, wenn man in hinreichend grossem Abstand von der Schallquelle arbeitet, der Fall ebener Wellen auch im freien Schallfeld einigermaßen angenähert werden, doch sind dann wegen der Beugungseffekte sehr grosse Objektflächen erforderlich, so dass Messungen dieser Art in der Praxis nur im Rohr durchgeführt werden. In einem hart begrenzten Rohr von quadratischem Querschnitt treten nur ebene Wellen auf, solange die Breite des Rohres kleiner als die halbe Wellenlänge ist (im runden Rohr für  $\varnothing < 0,77\lambda$ ). Die stehenden Wellen, die sich bei Beschallung des Objektes im Rohr ausbilden, sind also nur durch die Ausbreitungsdämpfung im Rohr beeinflusst, die jedoch durch

schwere, harte, oberflächlich glatte und porenfreie Wände sehr klein gehalten werden kann.

Die Ermittlung der Grössen  $\delta$ ,  $\Delta x$  und  $\lambda$  erfolgt mittels eines längs der Rohrachse verschiebbaren Schallempfängers, der ein reiner Druck- (oder gegebenenfalls Schnelle-) Empfänger sein muss und dessen Position (Abstand vom Objekt) von aussen genau ablesbar ist. Da die Messwerte in den Minima sehr leicht durch Oberwellen verfälscht werden können, sollte dem Mikrophon ein Filter von höchstens Oktavbreite nachgeschaltet sein.

Die Ausführungsformen der Rohre sind sehr verschieden. Da der Frequenzbereich eines Rohres durch die Bedingung, dass die Breite kleiner als die halbe Wellenlänge sein muss, nach oben, und durch die zweite Bedingung, dass die Meßstrecke mindestens  $\lambda/2$  lang sein muss (1 Maximum und 1 Minimum mindestens messbar) nach unten begrenzt ist, sind für den hauptsächlich interessierenden Bereich zwischen 100 und 3200 Hz mindestens zwei, besser drei Rohre erforderlich. Der Rohrquerschnitt muss nämlich anderseits möglichst gross gehalten werden, damit bei inhomogenen Materialien keine zu grossen Streuungen der Messwerte auftreten und damit insbesondere Resonatoren, bei denen eine maßstäbliche Verkleinerung nicht möglich ist (Plattenresonatoren, bei denen die Biegesteife der Deckplatte nicht vernachlässigbar ist), in Originalgrösse gemessen werden können. Mit dem Querschnitt ändert sich die Art des verwendeten Schallempfängers. Bei grossem Querschnitt kann das Mikrophon selbst in die Rohrachse gebracht werden, während bei kleineren Rohren Sondenmikrophone verwendet werden, bei denen nur die Sonde von der Lautsprecherseite her in das Rohr hineinragt.

Die Schallquelle (Lautsprecher) kann entweder zentral, dem Objekt gegenüber, oder auch seitlich angebracht werden. Letzteres ist besonders dann zu empfehlen, wenn die Sendeseite des Rohres mit einem reflexionsarmen Abschluss versehen werden soll. Ein solcher Abschluss ist zwar messtechnisch nicht erforderlich, macht sich jedoch durch geringe Frequenzabhängigkeit der Anregungsbedingungen angenehm bemerkbar.

Das objektseitige Ende des Rohres wird mit einer schweren, luftdicht schliessenden Platte schallhart abgeschlossen. Diese Platte muss hinter dem Objekt noch um  $\frac{1}{4}$  Wellenlänge längs des Rohres verschiebbar sein, damit gegebenenfalls auch mit schallweichem Abschluss gemessen werden kann. Ein solcher Abschluss ( $Z = 0$ ), der zum Beispiel zur Messung des dynamischen Strömungswiderstandes erforderlich ist, kann in Luft nicht direkt realisiert werden und wird daher immer durch einen harten Abschluss ( $Z = \infty$ ) in  $\lambda/4$  Abstand ersetzt.

Das Messobjekt wird an den akustisch harten Wänden des Rohres gespiegelt. Demzufolge gelten die Resultate nicht für ein einzelnes Element von der Grösse des Objektes, sondern für eine unendlich aus-

gedehnte, mit dem Messobjekt in spiegelbildlicher Wiederholung bedeckte Fläche. Bei quadratischen oder rechteckigen Rohren ergibt sich diese Spiegelung analog zur Optik, während man bei runden Rohren, da der Durchmesser klein gegen die Wellenlänge ist, das (runde) Objekt mit dem flächengleichen Quadrat identifizieren kann, so dass sich die gleiche Zusammensetzung der Spiegelbilder ergibt.

Der einfachste und zugleich umfassendste Test für die Prüfung der Qualitäten des Messrohres und der zugehörigen elektrischen Messapparatur ist die Messung des Minimum-Maximum-Verhältnisses  $\delta$ , bzw. der Pegeldifferenz  $\Delta L$  in der stehenden Welle bei schallhartem Rohrabschluss. Diese Pegeldifferenz sollte für alle Messfrequenzen mindestens

$$\Delta L = 20 \log \delta = -40 \text{ dB}$$

betragen. Dieser Wert erlaubt zugleich, den infolge der Rohrdämpfung auftretenden Messfehler roh abzuschätzen. Bei dem genannten Mindestwert  $\Delta L = -40$  dB beträgt der scheinbare Absorptionsgrad bei hartem Rohrabschluss  $\alpha = 4\%$ . Er würde im ungünstigsten Falle, das heisst bei schallweichem Abschluss (Abstand des ersten Minimums  $\Delta x = \lambda/2$ ), demnach 8% betragen. Mit zunehmendem Absorptionsgrad nimmt der mögliche Fehler jedoch linear ab, so dass er bei  $\alpha = 50\%$  noch 4% betragen und bei 100% ganz verschwinden würde. Die Abschätzung setzt voraus, dass der Wert  $-40$  dB ausschliesslich durch die Dämpfung längs des Rohres zustande kommt, die Abschlussplatte also ideal hart ist, was in der Praxis nicht zutrifft. Der durch Dämpfung zu erwartende Fehler wird also stets wesentlich kleiner als die angegebenen Werte sein.

Bei Messungen mit mehreren im Frequenzbereich aneinander anschliessenden Rohren am gleichen Objekt zeigen sich oft Unterschiede in den Messwerten bei gleichen Frequenzen. Diese Unterschiede können einmal durch Inhomogenitäten in den untersuchten Materialien bedingt sein. In diesem Falle müssen sie verschwinden, wenn über eine hinreichend grosse Zahl von Messungen an verschiedenen Proben des gleichen Materials gemittelt wird. Unterschiede, bedingt durch die entsprechend den verschiedenen Rohrdurchmessern verschiedenen Probengrössen, treten jedoch notwendigerweise auf, wenn es sich um mitschwingende Absorber handelt. Als solche sind zum Beispiel auch poröse Platten zu betrachten, deren Skelett zu Schwingungen angeregt werden kann. Da diese Unterschiede dann unter Umständen wertvolle Aufschlüsse geben können, wäre es falsch, bei der Wiedergabe der Messergebnisse etwa nur die Mittelwerte zweier solcher Messungen anzugeben.

Das hart begrenzte Impedanzmessrohr stellt ein vollkommenes Analogon zum Lecher-Draht-System, bzw. zur koaxialen Messleitung in der Elektrik dar. Das Rohr mit schallhartem Abschluss ( $v = 0$ ) entspricht nach Analogie I der Leitung mit offenem Ende ( $i = 0$ ), während der schallweiche Abschluss

( $p = 0$ ) dem Kurzschlussfall ( $u = 0$ ) entspricht. Ebenso wie in der Elektrik, ist es auch bei akustischen Messungen oft von Vorteil, mit den Mitteln der Vierpoltheorie zu arbeiten. Es sind dann Messungen der Eingangsimpedanz des zu untersuchenden «Vierpols» mit schallhartem und schallweichem Abschluss erforderlich. Dass man dabei den schallweichen Abschluss, der wegen des Fehlens eines Mediums mit genügend kleiner Eingangsimpedanz nicht realisiert werden kann, durch ein  $\lambda/4$  langes, hart abgeschlossenes Rohrstück ersetzen kann, ergibt sich aus der Betrachtung der Eingangsimpedanz eines ungedämpften Rohres als Funktion der Länge. Bei hartem Abschluss ( $v = 0$  bei  $x = 0$ , entsprechend  $Z_2 = \infty$ ,  $P| = 1$ ,  $\varphi = 0$ ) gilt für die Druck- und Schnelleverteilung längs des Rohres

$$p(x, t) = f(t) (e^{-jkx} + e^{jkx})$$

$$v(x, t) = \frac{f(t)}{Z_1} (e^{-jkx} - e^{jkx}).$$

Für die Impedanz als Funktion der Rohrlänge  $x$  ergibt sich damit

$$\frac{P}{v} = Z(x) = -Z_1 \coth(jkx) = jZ_1 \cot(2\pi \frac{x}{\lambda}).$$

Mit zunehmender Rohrlänge  $x$  schwankt der Betrag der Impedanz zwischen 0 und  $\infty$ , wobei der Phasenwinkel nur die Werte  $+90^\circ$  oder  $-90^\circ$  annehmen kann (reine Blindwiderstände). Ein kurzes Rohrstück ( $x < \lambda/4$ ) hat Federungscharakter, während ein längeres ( $\lambda/2 > x > \lambda/4$ ) Massenwiderstand zeigt. Man erhält  $Z = 0$  für  $x = \lambda/4, 3\lambda/4, \dots$  und  $Z = \infty$  für  $x = 0, \lambda/2, \dots$

### Bestimmung der Rohrdämpfung

Wird bei den Impedanzmessungen im Rohr hohe Messgenauigkeit verlangt, so muss die Dämpfung berücksichtigt werden. Diese Dämpfung, die durch die Schallableitung in die nicht ideal harten Wände und durch die Reibung an den Wandflächen zustande kommt, ist im allgemeinen so klein, dass die Maxima in der stehenden Welle keine messbaren Unterschiede zeigen. Die Tiefe der Minima nimmt jedoch mit zunehmendem Abstand von der schallharten Abschlussplatte merklich ab. Für die Messung der Grösse  $\delta = p_{\min}/p_{\max}$  sollte daher stets das dem Objekt nächstgelegene noch einwandfrei messbare Minimum ausgenutzt werden. Der so gemessene Wert muss, wenn grosse Genauigkeitsansprüche gestellt werden, auf die Oberfläche des Messobjektes extrapoliert werden. Diese Extrapolation setzt die Kenntnis der Rohrdämpfung voraus, die in folgender Weise relativ einfach ermittelt werden kann.

Das Rohr sei hart abgeschlossen ( $v = 0$  und  $\bar{p} = p_0$  bei  $x = 0$ ), und für die Schallausbreitung in seinem Inneren gelte die komplexe Wellenzahl  $k = \beta + j\alpha$ . Für die Schalldruckverteilung längs des Rohres gilt dann

$$p(x, t) = f(t) (e^{-jkx} + e^{jkx})$$

$$= 2f(t) \cos[(\beta + j\alpha)x]$$

$$= 2f(t) (\cos \beta x \cdot \cosh \alpha x - j \sin \beta x \cdot \sinh \alpha x)$$

Betragsbildung und zeitliche Mittelung ergeben

$$|p| = p_0 \sqrt{\cos^2 \beta x \cdot \cosh^2 \alpha x + \sin^2 \beta x \cdot \sinh^2 \alpha x},$$

und wir erhalten Minima für

$$\beta x = -\pi/2, -3\pi/2, \dots = -(n - 1/2)\pi$$

$$x = -\frac{n - 1/2}{\beta} \pi = -\lambda/2(n - 1/2) \quad \text{mit } \beta = 2\pi/\lambda,$$

wobei  $n = 1, 2, 3, \dots$  die vom Abschluss her gezählte Nummer des Minimums ist. Der Betrag des Schalldruckes in den Minima ist gegeben durch

$$|p| = p_0 \cdot \sinh \alpha x = p_{\min},$$

so dass wir für die im  $n$ -ten Minimum gemessene Grösse

$$\delta^{(n)} = p_{\min}^{(n)}/p_{\max} \quad \text{erhalten}$$

$$\delta^{(n)} \approx p_{\min}^{(n)}/p_0 = \sinh \alpha x \approx \alpha x.$$

Für die kleinen Werte von  $\alpha$ , mit denen wir hier zu tun haben, kann  $\cosh \alpha x \approx 1$ , also  $p_{\max}^{(n)} \approx p_0$ , und  $\sinh \alpha x \approx \alpha x$  gesetzt werden. Man erhält dann für das gesuchte Dämpfungsmass:

$$\alpha = -\frac{2\delta^{(n)}}{\lambda (n - 1/2)}$$

Es genügt also im Prinzip eine einzige Messung von  $\delta^{(n)}$  mit möglichst grossem Wert von  $n$  bei schallhartem Abschluss, um die Rohrdämpfung für die betreffende Messfrequenz zu ermitteln.

Da auf diese Weise auch der Einfluss der Dämpfung im Rohr eliminiert werden kann, stellt die Impedanzmessung im Rohr ein sehr genaues Messverfahren dar, das für die akustische Messtechnik unentbehrlich ist, obwohl auf diese Weise nur die Impedanz, bzw. der Schallabsorptionsgrad für senkrechten Schalleinfall ermittelt werden kann. Die Umrechnung auf den in der Raumakustik interessierenden allseitigen (statistischen) Schalleinfall ist nur möglich, wenn man das Cosinusetz für die Winkelabhängigkeit des Absorptionsgrades als gültig annimmt, eine Voraussetzung, die jedoch nur selten hinreichend gut erfüllt ist.

### Impedanzmessung in flüssigen Medien

Das Verfahren der Impedanzmessung im hart begrenzten Rohr lässt sich prinzipiell auch auf Messungen in flüssigen Medien anwenden. Die wesentlichste Schwierigkeit, die dabei jedoch auftritt, ergibt sich sofort aus einer Betrachtung der Wellenwiderstände von Luft, Wasser und Stahl, von denen der letztere als Material für die Rohrwandung praktisch allein in Frage kommt:

Wellenwiderstände in ak. Ohm (c.g.s.)

Luft . . . . .	44
Wasser . . . . .	$0,15 \cdot 10^6$
Stahl . . . . .	$3,9 \cdot 10^6$

Während also eine Stahlplatte in Luft praktisch vollkommen reflektiert, ist die Forderung, dass die Wandung hart sein muss gegenüber dem Medium im Innern des Rohres, für Wasser kaum noch erfüllbar. Der Reflexionsfaktor einer dicken Stahlplatte in Wasser beträgt nur noch etwa 90%, das heisst, es geht ein beträchtlicher Teil der Schallenergie in die Rohrwandung über. Das hat einmal eine Verschiebung der oberen, durch den Rohrdurchmesser gegebenen Grenzfrequenz zur Folge, die jedoch ohne Bedeutung ist. Auch der Energieverlust selbst ist kein wesentliches Hindernis für die Anwendung der Methode, da die damit verbundene Rohrdämpfung rechnerisch eliminiert werden kann. Schwerwiegender ist die Tatsache, dass der in die Wandung übergehende Schall sich längs des Rohres mit anderer Ausbreitungsgeschwindigkeit fortpflanzt und wieder in das Rohrinne abgestrahlt wird, wodurch die zu messenden stehenden Wellen gestört werden. Es muss also die Schallfortpflanzung in den Rohrwänden unterbunden werden, was nach *Tamm* [2] dadurch erreicht werden kann, dass man die Rohrwandung durch periodische Änderung der Wandstärke (eingedrehte Rillen) als mechanischen Tiefpass ausbildet, dessen Grenzfrequenz unterhalb der Messfrequenzen liegt. Mit einem solchen Rohr können Impedanzmessungen in der gleichen Weise wie für Luftschall mit grosser Genauigkeit vorgenommen werden. Allerdings ist dieses Verfahren noch mit mancherlei technischen Schwierigkeiten verbunden, die zum Beispiel durch störende Luftfilme und Blasen an der Rohrwand hervorgerufen werden.

Für Impedanzmessungen in Flüssigkeiten bietet sich jedoch noch eine andere Möglichkeit [2], nämlich die Verwendung eines schallweich begrenzten Rohres. Diese Möglichkeit sei vor allem deswegen hier noch eingehender diskutiert, weil sie in vollständiger Analogie zur Hohlleiter-Messtechnik für elektrische Wellen steht.

**Impedanzmessung im schallweich begrenzten Rohr**

Während es für Luftschall nicht möglich ist, einen in einem hinreichend grossen Frequenzbereich schallweichen Abschluss herzustellen, bestehen hierbei wegen des grossen Unterschiedes in den Wellenwiderständen zwischen Gasen und Flüssigkeiten für Wasserschall keine Schwierigkeiten. Eine freie Wasseroberfläche stellt stets einen schallweichen Abschluss dar, und Gefässboden und -wände können mit luftgefüllten porösen Stoffen, wie Schaum-Kunststoffe, Schwammgummi usw., ausgekleidet werden, deren Oberfläche durch Folien wasserdicht abgedeckt ist. Die Impedanz solcher luftgefüllter poröser Schichten unterscheidet sich nur unwesentlich von der der freien Luft. Die Ausbreitungsbedingungen in einem auf diese Weise allseitig schallweich begrenzten Rohr sind jedoch völlig anders als die in einer hart begrenzten Flüssigkeitssäule. Die schallweiche Begrenzung

entspricht im elektrischen Analogon (Analogie I) einer Kurzschluss-Begrenzung, das heisst, einer Begrenzung mit leitenden Materialien wie im elektrischen Hohlleiter. Es ist also zu erwarten, dass die Ausbreitungsbedingungen in den genannten Leitern analog zueinander sind.

Der untenstehenden Skizze entsprechend, ergeben sich die Ausbreitungsbedingungen aus der zeitunabhängigen Wellengleichung

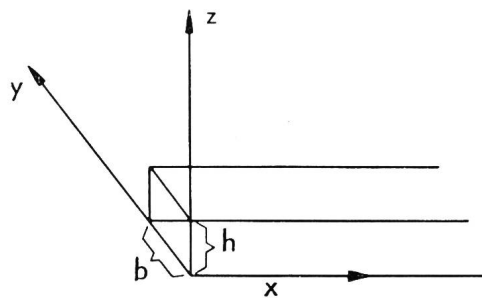
$$\Delta \varphi + k^2 \varphi = 0$$

mit den Randbedingungen

$$p = 0 \text{ für } y = 0, h \text{ und } z = 0, b$$

also wegen  $v = \text{grad } \varphi$  und  $p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ :

$$\varphi_{z=0} = \varphi_{z=h} = 0 \text{ und } \varphi_{y=0} = \varphi_{y=b} = 0.$$



Der Separationsansatz liefert

$\varphi_{(x,y,z)} = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) = Ae^{-j k_x x} \cdot \sin k_y y \cdot \sin k_z z$ , wobei  $Y(y)$  und  $Z(z)$  bereits den Randbedingungen  $\varphi_{y=0, z=0} = 0$  angepasst sind. Einsetzen liefert

$$k_x^2 = k^2 - (k_y^2 + k_z^2).$$

Die Randbedingungen  $\varphi_{y=b, z=h} = 0$  ergeben

$$b = \frac{1}{2} n \lambda_y \text{ und } h = \frac{1}{2} m \lambda_z$$

also

$$k_y = \frac{2\pi}{\lambda_y} = \frac{n\pi}{b}; \quad k_z = \frac{2\pi}{\lambda_z} = \frac{m\pi}{h}$$

$$k_x^2 = k^2 - \pi^2 [(n/b)^2 + (m/h)^2]$$

$$\frac{1}{c_x^2} = \frac{1}{c^2} - \frac{1}{4v^2} [(n/b)^2 + (m/h)^2];$$

$v = \text{Frequenz.}$

Damit gilt für die Phasengeschwindigkeit in x-Richtung

$$c_{ph} = c_0 / \sqrt{1 - \frac{c_0^2}{4v^2} [(n/b)^2 + (m/h)^2]}$$

und für die Wellenlänge in x-Richtung

$$\lambda_x = \lambda_0 / \sqrt{1 - \frac{\lambda_0^2}{4} [(n/b)^2 + (m/h)^2]}.$$

Es besteht also Dispersion, und jeder durch bestimmte Werte von  $n$  und  $m$  charakterisierte Wellentyp hat eine durch das Verschwinden des Nenners gegebene untere Grenzfrequenz

$$v_{gr} = \frac{c_0}{2} \sqrt{(n/b)^2 + (m/h)^2}.$$

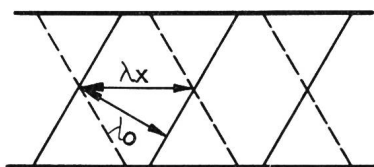
[2] *Tamm, K., Akust. Z. 6 (1941), 16.*



Die tiefste Grenzfrequenz  $\nu_{gr}^{(1)}$  ergibt sich für  $n = m = 1$ . Im Frequenzbereich bis  $\nu_{gr}^{(2)}$  für  $n = 2, m = 1$  ist also nur ein Wellentyp möglich, das heisst, dieser Bereich ist für Messzwecke am besten geeignet. In Ausnahmefällen kann jedoch auch der zweite Wellentyp noch zugelassen werden, da er in der Rohrmitte ein Minimum aufweist, also nicht wesentlich stört, wenn der Schallempfänger in der Rohrachse angeordnet ist.

In einem solchen Rohr kann die akustische Impedanz in üblicher Weise mittels stehender Wellen bestimmt werden. Wie bei einem elektrischen Hohlleiter ergeben sich hier jedoch nicht die Werte für senkrechten Schalleinfall, sondern für einen bestimmten, von der Wellenlänge im Rohr  $\lambda_x$  abhängigen Einfallswinkel. Man kann sich nach *Tamm* [2] die Wellen im Rohr superponiert vorstellen, aus zwei schräg verlaufenden Wellen, deren Phasenebenen in nachstehender Skizze als ausgezogene, bzw. gestrichelte Linien dargestellt sind. Daraus ergibt sich für den Einfallswinkel:

$$\sin \vartheta = \lambda_0 / \lambda_x.$$



Interessiert nur der Betrag des Reflexionsfaktors, so ist es bei dieser Messanordnung unter Umständen günstiger, mit Impulsen zu arbeiten, wobei, um die Dämpfung längs des Rohres sofort zu eliminieren, das Objekt mit einem vollständig reflektierenden (schallweichen) Reflektor gleicher Grösse verglichen wird, der vorher oder nachher an seine Stelle gebracht wird. Wegen der Dispersion breiten sich die Impulse natürlich mit der entsprechenden Gruppengeschwindigkeit

$$\frac{1}{c_{gr}} = \frac{1}{c_{ph}} \left( 1 - \frac{\omega}{c_{ph}} \frac{dc_{ph}}{d\omega} \right)$$

aus, was aber im allgemeinen ohne Bedeutung für die Messungen ist.

Die hier am Beispiel des hart und weich begrenzten Rohres geschilderte Messtechnik kann gelegentlich auch für Messungen in festen Körpern nützlich sein. Sie wurde mit Erfolg angewandt für die Schallausbreitung längs Stäben, das heisst, zum Beispiel zur Messung des Reflexionsfaktors weicher Isolierschichten [3] und der an Ecken auftretenden Reflexion von Biege- und Dehnwellen [4], ja sogar für die Messung der Schallausbreitung in körnigen Substanzen [5], wie Sand, Ziegelsplitt usw.

Messungen mittels stehender Wellen bieten naturgemäss immer dann die günstigsten Möglichkeiten,

[3] Exner, M.-L., Böhme, W., *Acustica* 3 (1953), 105;

[4] Kurtze, G., Tamm, K., Vogel, S., *Acustica* 5 (1955), 223;

[5] Schmidt, H., *Acustica* 4 (1954), 639.

wenn eindimensionale leitungsähnliche Gebilde vorliegen, während Feldmessungen in zwei- oder dreidimensionalen Medien meist besser mit Hilfe der Impulstechnik durchgeführt werden können.

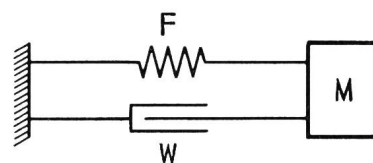
## Anhang

### Gedämpfte schwingungsfähige Systeme

Bei der Messung mechanischer Impedanzen hat man es in vielen Fällen mit schwingungsfähigen Gebilden zu tun, und es erscheint deshalb angebracht, an dieser Stelle die zur Charakterisierung der Dämpfung solcher Gebilde verwendeten Begriffe einmal kurz zusammenzustellen und ihre gegenseitige Verknüpfung aufzuzeigen.

Wegen ihrer leichten Messbarkeit wird bei mechanischen Schwingungen oft nicht die Kraft oder die Schnelle, sondern die Amplitude (Auslenkung) als Messgrösse herangezogen. Da im elektrischen Analogon – nach Analogie I ( $u \sim k$ ) entspricht die Amplitude ( $\int v dt$ ) der Ladung ( $\int i dt$ ) – solche Messungen nicht üblich sind, erscheint es wichtig, in Erinnerung zu rufen, dass bei gedämpften Schwingungsgebilden Amplitudenresonanz und Geschwindigkeitsresonanz nicht bei der gleichen Frequenz liegen.

Betrachten wir zum Beispiel einen gedämpften mechanischen Parallelkreis mit den Elementen Masse  $M$ , Federung  $F$  und Widerstand  $W$ , so ergeben sich folgende Resonanzfrequenzen:



- a) Geschwindigkeitsresonanz:  $\omega_0^2 = 1/MF$   
 b) Amplitudenresonanz:  $\omega_a^2 = 1/MF - W^2/2M^2$   
 c) Energieresonanz:  $\omega_E^2 = 1/MF - W^2/4M^2$

Die Frequenz der Geschwindigkeitsresonanz ist also identisch mit der Eigenfrequenz des ungedämpften Systems, während die Energieresonanz bei der Frequenz der freien Schwingung des gedämpften Systems liegt. Die Amplitudenresonanz liegt zwischen beiden.

Bezeichnet man das Dämpfungsmass für die Amplitude mit  $\beta = W/2M$ , so klingt die angestossene freie Schwingung des Systems nach der Funktion  $A = A_0 e^{-\beta t}$  ab. Die *Abklingzeit*  $T$  auf  $1/e$  des Anfangswertes ist also

$$T = 1/\beta.$$

Mit der Schwingungsdauer  $\tau$  ergibt sich das *logarithmische Dekrement*  $\Lambda$  zu

$$\Lambda = \beta\tau = 2\pi\beta/\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

oder, für kleine Dämpfungen

$$\Lambda \approx 2\pi\beta/\omega_0 = \pi W \sqrt{\frac{F}{M}}.$$

Als weiteres Mass für die Dämpfung wird die *Resonanzüberhöhung* bei Erregung mit konstanter

Kraft  $Q = A_{\max}/A_0$ , das heisst, das Verhältnis der Amplituden bei der (Amplituden-) Resonanz und der Frequenz Null verwendet. Dieses Mass ist nur auf die Auslenkung anwendbar, da bei der Frequenz Null keine endliche Geschwindigkeit mehr existiert. Die Rechnung liefert für die Resonanzüberhöhung bei dem erwähnten mechanischen Parallelkreis

$$Q = A_{\max}/A_0 = \frac{M \omega_0^2}{W \sqrt{1 - W^2/4M^2\omega_0^2}} = \frac{\omega_0}{2\beta \sqrt{1 - \beta^2/\omega_0^2}}$$

$$Q \approx \omega_0/2\beta.$$

Es gilt also

$$Q \approx \frac{1}{W} \sqrt{\frac{M}{F}} \approx \pi/\Lambda,$$

wobei die Beziehung zwischen den beiden äusseren Termen ebenfalls nur näherungsweise Gültigkeit hat.

T,  $\Lambda$  und Q sind Grössen, die im allgemeinen zur Charakterisierung der Dämpfung langsamer, optisch beobachtbarer Schwingungen verwendet werden. Wird die Impedanz als Funktion der Frequenz gemessen, so werden gern die 45°-Verstimmung oder die Halbwertsbreite als Charakteristika benutzt.

Die 45°-Verstimmung ist die Verstimmung  $V = \omega_0/\omega - \omega/\omega_0$ , bei der der Phasenwinkel der Impedanz  $Z = x + jy$  gerade 45° beträgt (0° in Resonanz), x und y also gleich sind. Sie ergibt sich bei unserem Parallelresonanzkreis zu

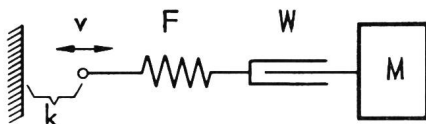
$$V_{45^\circ} = W \sqrt{\frac{F}{M}} \approx \Lambda/\pi.$$

Wie man leicht ausrechnet, ist die relative Halbwertsbreite  $\Delta\omega/\omega_0$  nur näherungsweise, das heisst für  $\Delta\omega \ll \omega_0$  der 45°-Verstimmung gleich, und es gilt also

$$\Delta\omega/\omega_0 \approx W \sqrt{\frac{F}{M}} \approx \Lambda/\pi.$$

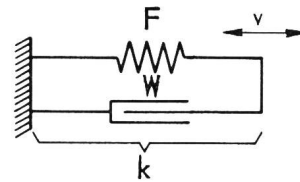
Die Güte  $q$  eines Systems oder Elements ist allgemein definiert als das Verhältnis Blindleistung/Wirkleistung. Sie ist also, im Gegensatz zu den bisher erwähnten Begriffen, sowohl auf schwingungsfähige Systeme wie auch auf einzelne Schaltelemente anwendbar. Im letzten Falle ist sie einfach durch das (frequenzabhängige) Verhältnis Imaginärteil/Realteil einer Impedanz oder Admittanz gegeben. Die Güte eines Massenwiderstandes  $Z_m$  mit dem Wirkanteil (Reibungswiderstand) W ist gegeben durch

$$Z_m = W + j\omega M; q_m = \omega M/W$$



und die einer verlustbehafteten Feder durch

$$Z_f = W + 1/j\omega F; q_f = 1/\omega F W.$$



Als Güte eines schwingungsfähigen Gebildes (Resonanzkreis) wird das Verhältnis Blindleistung/Wirkleistung bei der Resonanzfrequenz bezeichnet, das für den mechanischen Parallelkreis durch

$$q = \frac{\omega_0 M}{W} = \frac{1}{\omega_0 F W} = \frac{1}{W} \sqrt{\frac{M}{F}}$$

gegeben ist. Man kann also die Verluste entweder der Masse oder der Feder zuordnen, und die Güte dieses Elementes ist dann identisch mit der Güte des Kreises.

Der Verlustfaktor  $\eta$ , der dem Tangens des Verlustwinkels  $\delta$  gleich ist, ist definiert als Reziprokwert der Güte

$$\eta = \tan \delta = \frac{1}{q} = \frac{\text{Wirkleistung}}{\text{Blindleistung}}.$$

Je nach Schaltungsart (parallel oder in Serie) ist also der Phasenwinkel der Impedanz oder der Admittanz.

Zusammengefasst ergeben sich somit die folgenden Beziehungen zwischen den einzelnen Grössen:

$$\begin{aligned} \eta = \tan \delta &= \frac{1}{q} = V_{45^\circ} = \frac{2\beta}{\omega_0} = \frac{2}{\omega_0 T} \\ &\approx \Delta\omega/\omega_0 && \text{(für } \beta/\omega_0 \ll 1) \\ &\approx \Lambda/\pi = \frac{2\beta}{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2/\omega_0^2}} && \text{(für } \beta^2/\omega_0^2 \ll 1) \\ &\approx 1/Q = \frac{2\beta}{\omega_0} \sqrt{1 - \beta^2/\omega_0^2} && \text{(für } \beta^2/\omega_0^2 \ll 1) \end{aligned}$$

- mit  $\eta$  = Verlustfaktor
- $\delta$  = Verlustwinkel
- $q$  = Güte
- $V_{45^\circ}$  = 45°-Verstimmung
- $\beta$  = Dämpfungsmass für die Amplitude
- $\omega_0$  = Resonanzfrequenz (Geschwindigkeitsresonanz)
- T = Abklingzeit auf 1/e (Amplitude)
- $\Lambda$  = logarithmisches Dekrement
- Q = Resonanzüberhöhung

Adresse des Verfassers: Dr. Günther Kurtze, III. Physikalisches Institut der Universität, Göttingen, Bürgerstr. 42.