

Darstellung der Verstärkereigenschaften von Transistoren als lineare aktive Vierpole durch die Streuparameter (I)

Autor(en): **Hauri, Ernst R.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Technische Mitteilungen / Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafienbetriebe = Bulletin technique / Entreprise des postes, téléphones et télégraphes suisses = Bollettino tecnico / Azienda delle poste, dei telefoni e dei telegrafi svizzeri**

Band (Jahr): **48 (1970)**

Heft 1

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-876037>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Darstellung der Verstärkereigenschaften von Transistoren als lineare aktive Vierpole durch die Streuparameter (I)

Ernst R. HAURI, Bern

621.375.4:621.372.5
621.382.3:621.372.5

Zusammenfassung. Einleitend werden die Vorteile erläutert, die die Messung der Streuparameter von Transistoren anstelle der bisher verwendeten Admittanzparameter bei Frequenzen von einigen hundert MHz an bietet. Anhand der Betrachtung des Anpassungsproblems beim Zweipol werden einige notwendige Grundlagen abgeleitet. Die Bedeutung der Vierpol-Streuparameter wird erklärt, und die Bedingungen für unbedingte Stabilität werden auf eine neue Art abgeleitet. Die Betrachtung der Leistungsverstärkung führt auf die Bedingung, dass beidseitige konjugiert-komplexe Anpassung möglich ist; diese Bedingung kann aber auch direkt hergeleitet werden. Den Kreisen konstanter Leistungsverstärkung in der Ebene des Lastreflexionsfaktors kann ein Stabilitätsfaktor zugewiesen werden. Abschliessend wird die unilaterale Rechnung erläutert, wenn der Transistor als annähernd rückwirkungsfrei betrachtet werden kann.

Caractéristiques d'amplification par les paramètres de répartition de transistors employés comme quadripôles actifs linéaires

Résumé. On explique tout d'abord les avantages que présente, pour les fréquences supérieures à quelques centaines de MHz, la mesure des paramètres de répartition (paramètres s) des transistors, en lieu et place des paramètres d'admittance employés jusqu'ici. L'étude du problème de l'adaptation dans le cas du bipôle permet d'établir quelques principes de base nécessaires. On précise la signification des paramètres de répartition dans le cas du quadripôle, et les conditions de stabilité absolue sont trouvées par une nouvelle méthode. En partant de l'amplification en puissance, on peut déduire la condition pour que l'adaptation complexe conjuguée soit possible du côté du générateur et du côté de la charge; cette condition peut aussi être établie directement. Il est possible d'attribuer un facteur de stabilité aux cercles représentant dans le plan du facteur de réflexion de la charge une amplification de puissance constante. L'article explique pour terminer le calcul unilatéral appliqué lorsque le transistor peut être considéré comme pratiquement exempt de réaction.

Caratteristiche di amplificazione dei transistori quali quadripoli attivi lineari tramite i parametri di diffusione

Riassunto. Nell'introduzione si spiegano i vantaggi che offre, per frequenze superiori ad alcune centinaia di MHz, la misurazione dei parametri di diffusione (parametri s) di transistori al posto dei parametri d'admettenza usati finora. Sulla scorta delle considerazioni in merito al problema di adattamento del bipolo si deducono alcuni principi di base necessari. Si spiega il significato dei parametri di diffusione del quadripolo e si desumono in modo nuovo le condizioni di assoluta stabilità. Dall'esame dell'amplificazione della potenza si determina la condizione che rende possibile un adattamento coniugato complesso da parte del generatore e della carica; questa condizione può però anche essere dedotta direttamente. Ai circoli di amplificazione di potenza costante nel piano del fattore di riflessione di carica si può attribuire un fattore di stabilità. In seguito si spiega il calcolo unilaterale utilizzato quando il transistoro può essere considerato praticamente esente di reazione.

1. Einleitung

Bekanntlich gibt es sechs verschiedene Vierpolmatrizen, die einen Vierpol in der «klassischen» Strom-Spannungsdarstellung kennzeichnen. Zur Charakterisierung des Transistors als (linearer aktiver) Vierpol wurden bis jetzt vorzugsweise die Hybrid- oder h-Parameter für niedrige Frequenzen und die Admittanz- oder y-Parameter für hohe Frequenzen verwendet. Die Parameter sind die Elemente der Matrizen, also etwa gemäss

$$Y = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix} \quad (1)$$

Die entsprechenden Vierpolgleichungen sind Strom-Spannungsgleichungen, wie

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= y_{11} u_1 + y_{12} u_2 \\ i_2 &= y_{21} u_1 + y_{22} u_2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

oder in Matrixschreibweise

$$I = YU \quad (2a)$$

mit den Spaltenvektoren

$$I = \begin{vmatrix} i_1 \\ i_2 \end{vmatrix} \quad U = \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{vmatrix} \quad (2b)$$

Die «klassischen» Vierpolparameter sind mit Hilfe eines Leerlaufs oder Kurzschlusses definiert; so folgt etwa aus Gl. (2):

$$y_{11} = i_1/u_1 \text{ für } u_2 = 0 \text{ (Kurzschluss)}$$

Die i_1 , i_2 und u_1 , u_2 sind die Eingangs- und Ausgangsströme beziehungsweise -spannungen des Vierpols nach Fig. 1. Im folgenden werden alle Ströme, Spannungen und Wellen als *Effektivwerte* verstanden.

Einer der Gründe, warum sich die y-Parameter seinerzeit für HF-Anwendungen anboten, bestand darin, dass sich ein Kurzschluss bei HF besser approximieren lässt als ein Leerlauf. Auch dieser Vorteil hat aber seine Grenzen bei immer zunehmender Frequenz, etwa von 100 MHz an. Es treten dann immer mehr die Streuinduktivitäten und -kapazitäten in Erscheinung, und ein breitbandiger Kurzschluss kann nicht mehr realisiert werden, was z. B. Messungen mit gewobelter Frequenz (zur Darstellung von Ortskurven) unmöglich macht. Abgesehen davon, dass dann auch eine Bezugsebene recht ungenau lokalisierbar ist, wird die Abschlussimpedanz bei gewissen Frequenzen reaktiv und stark variabel, so dass der Transistor infolge der inneren Rückwirkung instabil werden kann und schwingt, was sogar zur Zerstörung führen kann.

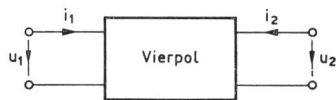


Fig. 1
Vierpol in Strom-Spannungs-Darstellung

Schon in einem IRE-Standard aus dem Jahr 1956 [1] sind Messungen an Transistoren mit endlichem Abschluss (finite termination measurements) für den Fall erwähnt, dass Kurzschluss- oder Leerlaufbedingungen nicht angemessen seien. In den letzten Jahren hat sich die Transistor-messtechnik im Frequenzgebiet oberhalb von etwa 100 MHz immer mehr an die für passive Mikrowellen-Komponenten verwendete Technik angeglichen. Man misst nun Wellen (statt Spannungen und Ströme), und zwar bei definierten Abschlüssen von endlichem Wert, z. B. 50Ω (statt Kurzschluss oder Leerlauf). Daraus hervorgehend wurde eine neue Darstellungsmöglichkeit der Vierpoleigenschaften von Transistoren in den sogenannten Streuparametern (s-Parametern) gefunden. Die Streuparameter sind die Elemente der Streumatrix S:

$$S = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{vmatrix} \quad (3)$$

Man unterscheidet *einlaufende Wellen* a_1 und a_2 sowie *auslaufende Wellen* b_1 und b_2 , die durch die Streuparameter wie folgt verknüpft sind:

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= s_{11} a_1 + s_{12} a_2 \\ b_2 &= s_{21} a_1 + s_{22} a_2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

oder in Matrixschreibweise

$$B = SA \quad (4a)$$

mit den Spaltenvektoren

$$A = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \end{vmatrix} \quad (4b)$$

Die Wellen werden im Abschnitt 2.2 definiert. Das entsprechende Vierpol-Blockschema ist in *Figur 2* dargestellt. Die Streuparameter sind messtechnisch als Reflexionsfaktoren beziehungsweise – zu diesen in einer ähnlichen Beziehung wie etwa y_{21} zu y_{11} stehende – Übertragungsfaktoren zu bezeichnen. So wie zu einem Reflexionsfaktor immer eine Bezugsgrösse gehört, nämlich der Wellenwiderstand der entsprechenden Übertragungsleitung, so kann auch eine Streumatrix nicht allein stehen, sondern es gehört die Angabe der Bezugsimpedanz dazu. Bei einem Vierpol können auf der Eingangs- und Ausgangsseite verschiedene komplexe Bezugsimpedanzen Z_{01} und Z_{02} vorhanden sein, aber aus praktischen Gründen gleicht man

sich der Messtechnik an und verwendet identische und rein reelle Bezugsimpedanzen $Z_0 = R_0 > 0$.

Bei passiven Mikrowellenkomponenten ist in weitaus den meisten Fällen die Bezugsimpedanz bei der Messung gleich dem tatsächlichen Abschluss im Betrieb (etwa $Z_0 = R_0 = 50 \Omega$). Dies trifft bei Transistoren nicht zu. Aus messtechnischen Gründen müssen bei den fraglichen Frequenzen (von etwa hundert MHz an aufwärts) Wellenwiderstände von HF-Leitungen als Bezugsimpedanz verwendet werden, aber die Abschlussimpedanzen des Transistors im Verstärkerbetrieb haben in der Regel andere Werte als diese Bezugsimpedanz. (Ein Verstärker kann an seinen Klemmen für 50Ω dimensioniert sein, aber zwischen den Verstärkerklemmen und dem Transistor befinden sich Anpassungsnetzwerke.) Dieser Umstand hat zu Missverständnissen Anlass gegeben, die auch in der Literatur verewigt wurden.

Es ist zu betonen, dass die Streumatrix eine Charakterisierung des Vierpols darstellt, die derjenigen durch andere gebräuchliche Matrizen gleichwertig ist, wenn auch die praktische Anwendung bei jeder Darstellung gewisse Vorteile und Nachteile aufweist. Es scheint, dass es für gewisse Anwendungen besser ist, die Streuparameter lediglich zu messen, um dann daraus «klassische» Vierpolparameter (vorzugsweise die y-Parameter) zu berechnen, mit denen praktischer weitergerechnet werden kann. Insbesondere seit die Amplituden- und Phasenverhältnisse von Wellen auf Übertragungsleitungen (zum Beispiel Koaxialkabel) verhältnismässig einfach zu messen sind, haben sich aber die Streuparameter für Transistoren immer mehr durchgesetzt.

Bei der Messung der Streuparameter sind Eingang und Ausgang des Transistors mit einer Bezugsimpedanz abgeschlossen, die gleich dem Wellenwiderstand einer HF-Übertragungsleitung ist (Koaxialleitung mit $Z_0 = 50 \Omega$). Diese Abschlüsse können genau und sehr breitbandig gemacht werden. Die eingangs- und ausgangsseitige «Dämpfung» mit 50Ω lässt eine Unstabilität (Schwingungen) kaum mehr auftreten. Streuimpedanzen machen viel weniger aus, so dass die Genauigkeit der Messung verbessert wird. Die Messung kann auch breitbandig mit variabler Frequenz (gewobbelt) vorgenommen werden.

Bei Frequenzen von einigen GHz an aufwärts hat es sich gezeigt, dass die Erdungsleitung des dritten Anschlusses



Fig. 2
Richtung der ein- und auslaufenden Wellen beim Vierpol in Wellendarstellung

eine nicht mehr zu vernachlässigende Impedanz darstellt und Unstabilitäten bei der Messung verursachen kann. Man ist daher dazu übergegangen, auch den dritten Anschluss mit einer Bezugsimpedanz abzuschliessen [18], [19], was zu einer Dreitor- oder Sechspol-Streumatrix führt. Aus dieser kann die Vierpol-Matrix entnommen werden, und man kann auf dem hier beschriebenen Weg vorgehen.

Die Verwendung der Streuparameter für lineare aktive Vierpole ist bis jetzt im wesentlichen nur in zwei Artikeln dargestellt worden. Der erste von *Kurokawa* [2] ist sehr knapp gehalten und gibt nur die wichtigsten Resultate ohne Ableitungen. Der zweite von *Bodway* [3] ist ausführlicher, aber die Resultate werden teilweise auf unnötigen Umwegen erhalten. Mit der vorliegenden Arbeit wird eine anschaulichere und leichter verständliche Darstellung angestrebt, die öfters auf anderen Wegen geht als [2], [3].

Zuerst werden anhand der Betrachtung des Anpassungsproblems beim Zweipol einige notwendige Grundlagen abgeleitet. Bei der Betrachtung des Vierpols wird nur auf Verstärkerprobleme eingetreten; einige allgemeinere Probleme mussten aus Platzgründen weggelassen werden, zumal die Mathematik schwieriger wird¹. Es werden dabei einige Parallelen zur Darstellung mit den *y*-Parametern (als Beispiel für die «klassischen» Vierpolparameter) hergestellt.

2. Das Anpassungsproblem beim Zweipol

2.1 Wellen- und Leistungsanpassung

Es wird die Schaltung von *Figur 3* betrachtet, die eine Leerlauf-Spannungsquelle u_0 in Serie mit einer komplexen Generatorimpedanz $Z_0 = R_0 + jX_0$ und einer Lastimpedanz $z = r + jx$ zeigt. R_0 wird positiv (> 0) angenommen. Der Abschnitt zwischen den vertikalen gestrichelten Linien soll ein kurzes Stück einer homogenen Leitung andeuten [4]. Ist die Generatorimpedanz $Z_0 = R_0$ rein reell und gleich dem Wellenwiderstand der homogenen Leitung, so besteht Anpassung an beiden Enden der Leitung, sofern auch die Lastimpedanz $z = R_0$ beträgt. Man nennt dies wellenmässige Anpassung und kann sagen, auf dem Leitungsstück existiere eine vom Generator zum Abschluss laufende Welle a. Ist der Abschluss nicht gleich R_0 , so entsteht auch eine auslaufende (reflektierte) Welle b.

Nimmt man nun an, die homogene Leitung, die den Wellen a und b zur Existenz verhalf, sei unendlich kurz, so wird sie als Tor bezeichnet. Sie ist dann nichts anderes als das Klemmenpaar des Zweipols z. Man nennt nun den Zweipol auch Eintor, und man spricht in der Vierpoltheorie

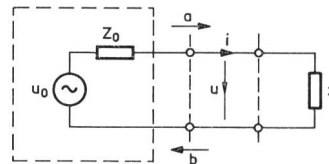


Fig. 3

Zum Anpassungsproblem beim Zweipol (Eintor), mit einem Wellentor zwischen Generator und Last

weiterhin von Wellen a und b, die durch das Tor fließen, obwohl gar keine Leitung mehr vorhanden ist.

Ganz allgemein spricht man von *wellenmässiger Anpassung* (matching on the image basis) [5], wenn

$$z = Z_0 \quad (5)$$

gemacht wird. Maximale Wirkleistung wird dann aber an z nur abgegeben, wenn Z_0 rein reell ist. Ist Z_0 komplex, so muss für maximale Leistungsabgabe z konjugiert-komplex zu Z_0 gemacht werden:

$$z = Z_0^* \quad (6)$$

Dies wird *Leistungsanpassung* oder konjugiert-komplexe Anpassung genannt (matching on the conjugate-image basis). Die Gleichung (6) zerfällt in zwei Bedingungen:

$$r = R_0 \text{ und } x = -X_0 \quad (6a)$$

Der Strom i in der Schaltung von *Figur 3* beträgt

$$i = u_0 / (Z_0 + z) \quad (7)$$

und die Spannung u über z :

$$u = zu_0 / (Z_0 + z) \quad (8)$$

Die Wirkleistung P_w in z beträgt:

$$P_w = |i|^2 r \quad (9)$$

Man kann Gl. (9) umformen zu

$$P_w = P_v (1 - s_p s_p^*) = P_v (1 - |s_p|^2) \quad (10)$$

P_v ist die verfügbare Generatorwirkleistung

$$P_v = |u_0|^2 / 4 R_0 \quad (11)$$

und s_p ist gegeben durch

$$s_p = \frac{z - Z_0^*}{z + Z_0} \quad (12)$$

Die komplexe Grösse s_p könnte als «Anpassungsfaktor» bezeichnet werden; in Analogie zur Leitungstheorie wird sie «Reflexionsfaktor» genannt, und zwar, da sie mit Leistungsanpassung zu tun hat, als «Reflexionsfaktor der Leistungswellen» [2] – zu dieser Bezeichnung siehe die

¹ Grundlagen und Allgemeines über die Streumatrix in Hinsicht auf die Verwendung für aktive Vierpole wurden in einem Bericht Nr. 37.093 der Abteilung Forschung und Versuche der GD PTT zusammengefasst.

Bemerkungen im Anschluss an (21). Ihr Betragsquadrat $|s_p|^2$ ist ein Leistungs-Reflexionsfaktor; siehe Gl. (10), die zeigt, dass ein entsprechender Leistungsanteil reflektiert wird. Ist $z = Z_0^*$, so wird $s_p = 0$, und die ganze verfügbare Generatorwirkleistung P_v wird an die Impedanz z abgegeben, das heisst im Realteil r verbraucht (Leistungsanpassung).

Um den Anschluss an die s -Parameter zu gewinnen, wird hier für den Reflexionsfaktor das Symbol s (statt des normierten r oder ρ) gewählt. Der Reflexionsfaktor s_p der Leistungswellen nach (12) unterscheidet sich vom gebräuchlichen Spannungs-Reflexionsfaktor s der Leitungstheorie dadurch, dass im Zähler Z_0^* und nicht Z_0 steht. Ist Z_0 rein reell, so gehen die beiden ineinander über.

2.2 Wellendarstellung

Ein Reflexionsfaktor ist in der Leitungstheorie durch das Verhältnis der auslaufenden (reflektierten) Welle b zur einlaufenden Welle a gegeben:

$$s = b/a \quad (13)$$

Der dimensionslose Faktor s ist in der Wellendarstellung das Analogon zur Impedanz $z = u/i$ oder Admittanz $y = i/u$ in der Strom-Spannungs-Darstellung. Durch geeignete Definition der Wellen a und b in Figur 3 kann man den Reflexionsfaktor s_p nach (12) erhalten, wobei immer daran zu denken ist, dass die Leitung in Figur 3 nicht mehr existiert und dass Z_0 eine komplexe Grösse ist. Die üblichen Wellengleichungen der Leitungstheorie können also nicht benützt werden, da dort Z_0 als rein reell vorausgesetzt ist.

Eine geeignete Definition wurde erstmals von *Penfield* [6] angegeben; sie lautet:

$$a = \frac{u + Z_0 i}{2\sqrt{R_0}} = i \frac{u/i + Z_0}{2\sqrt{R_0}} \quad (14)$$

$$b = \frac{u - Z_0^* i}{2\sqrt{R_0}} = i \frac{u/i - Z_0^*}{2\sqrt{R_0}} \quad (15)$$

Danach verschwindet die auslaufende Welle b , wenn $u/i = z = Z_0^*$ ist. Die Bedeutung dieser Wellen und die Eigenschaften der entsprechenden Streumatrix waren jedoch nicht die eigentlichen Ziele der Arbeit [6]; dies untersuchte als erster *Youla* [7], der aber $R_0 > 0$ voraussetzte, während *Penfield* [6] auch negative Realteile von Z_0 zulies. Eine ähnliche Definition wie (14) wurde von *Kurokawa* [2] gefunden, die ebenfalls für $R_0 < 0$ anwendbar ist, indem im Nenner der Betrag $|R_0|$ unter der Wurzel steht; sie ergibt etwas elegantere Rechnungen und führt zur sogenannten «verallgemeinerten Streumatrix».

Die Grösse Z_0 wird als «komplexe Bezugsimpedanz» oder «komplexe Normierungszahl», auch «komplexe Torzahl» (port number) bezeichnet. Es wird lediglich $R_0 \neq 0$ vorausgesetzt, das heisst der Realteil darf nicht verschwin-

den. Im folgenden sei aber nicht auf die Bedeutung dieser Gleichungen eingegangen, wenn $R_0 < 0$ ist [2], sondern vorerst Z_0 komplex und der Realteil $R_0 > 0$ angenommen.

Die Grössen a und b sind im allgemeinen lineare Transformationen (oder Kombinationen) von Strom und Spannung, die je nach Definition physikalisch oder im Sinne der Vierpoltheorie als Wellen zu verstehen sind. Nimmt man Z_0 als rein reell und positiv an, so folgen aus (14) und (15) die bekannten Gleichungen für normierte Wellen auf Übertragungsleitungen vom Wellenwiderstand $Z_0 = R_0$. Die Wellen a und b haben die Dimension (Wurzel aus Leistung).

Aus (14) und (15) folgen die umgekehrten Transformationen für Strom i und Spannung u wie folgt:

$$u = \frac{Z_0^* a + Z_0 b}{\sqrt{R_0}} \quad (16)$$

$$i = \frac{a - b}{\sqrt{R_0}} \quad (17)$$

Nach Figur 3 beträgt die Spannung u über z :

$$u = u_0 - Z_0 i \quad (18)$$

Setzt man dies in (14) ein, so wird das Betragsquadrat von a

$$|a|^2 = \frac{|u_0|^2}{4 R_0} = P_v \quad (19)$$

gleich der verfügbaren Wirkleistung P_v des Generators mit dem Innenwiderstand Z_0 nach Gl. (11).

Mit $z = u/i$ folgt ferner aus (14) und (15):

$$\frac{b}{a} = \frac{z - Z_0^*}{z + Z_0} = s_p \quad (20)$$

Die Definition von a und b nach (14) und (15) führt somit über (13) zum Reflexionsfaktor s_p der Leistungswellen nach (12). Es folgt daraus ferner, dass die Differenz der Betragsquadrate

$$|a|^2 - |b|^2 = P_v (1 - |s_p|^2) = P_w \quad (21)$$

gleich der übertragenen Wirkleistung P_w nach (10) ist. Dasselbe ergibt sich, wenn man aus (14) und (15) die Differenz der Betragsquadrate bildet; man findet nämlich:

$$|a|^2 - |b|^2 = \frac{u i^* + u^* i}{2} = \text{Re}(u i^*) = P_w \quad (21a)$$

Diese Beziehungen sind in Worten wie folgt zu verstehen: Der Generator sendet die verfügbare Wirkleistung $|a|^2$ zur Last. Bei Fehlanpassung ($z = Z_0^*$ nicht erfüllt) wird ein Teil $|b|^2$ der einlaufenden Wirkleistung reflektiert; sie läuft wieder aus. Die von der Last z aufgenommene Wirkleistung beträgt also $|a|^2 - |b|^2$.

Man sieht nun den Grund, warum s_p im Anschluss an (12) als «Reflexionsfaktor der Leistungswellen» bezeichnet

wurde: Die Wellen a und b nach (14) und (15) stehen unmittelbar mit der Leistungsübertragung in Zusammenhang und werden daher als «Leistungswellen» bezeichnet [2]. Zur Diskussion der Leistungsverhältnisse betrachtet man aber nicht direkt die einlaufende und auslaufende Wirkleistung, sondern man benützt die lineare Beziehung für den Zweipol

$$b = s_p a \quad (22)$$

die sich aus (20) ergibt und die sich für den Vierpol oder 2n-Pol zur Matrizengleichung

$$B = SA$$

nach (4a) erweitert. Dies erweist sich als vorteilhafter, als wenn man direkt mit den Wirkleistungen rechnet. Obige Beziehungen sind analog etwa zur Zweipolgleichung $i = yu$, der die Matrizengleichung $I = YU$ nach (2a) gegenübersteht.

Wie s kann man auch s_p mit komplexem Z_0 in der «Smith chart» (Smith-Diagramm) darstellen, und zwar in deren normierter Form. Mit $Z_0 = R_0 + jX_0$ und $z = r + jx$ kann man schreiben

$$s_p = \frac{r + j(x + X_0) - R_0}{r + j(x + X_0) + R_0} \quad (23)$$

Für die Darstellung im Smith-Diagramm ergibt sich, dass s_p dem Vektor entspricht, der vom Nullpunkt (Zentrum des Smith-Diagramms) zum Punkt mit der normierten Impedanz $[r + j(x + X_0)/R_0]$ gezogen wird, das heisst, man muss den Imaginärteil von Z_0 zu z addieren und in bezug auf R_0 normieren.

Aus (23) ergibt sich ferner folgende wichtige Eigenschaft von s_p :

Wenn r und R_0 das gleiche Vorzeichen haben, ist $|s_p| < 1$, und wenn sie entgegengesetztes Vorzeichen haben, ist $|s_p| > 1$.

Man bedenke, dass das Smith-Diagramm die Abbildung der rechten Halbebene (Impedanzen mit positivem Realteil) in das Innere des Einheitskreises (Radius $\rho = 1$) darstellt; siehe Figur 4. Der Einheitskreis selbst entspricht reinen

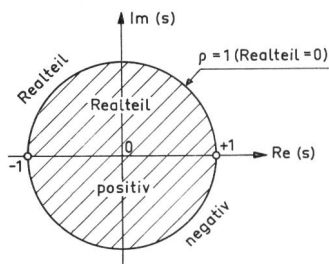


Fig. 4
Lage der Impedanzen in der Ebene des Reflexionsfaktors. Das Innere des Einheitskreises entspricht dem Smith-Diagramm.

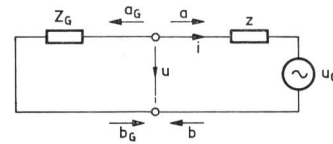


Fig. 5
Zur Definition des Reflexionsfaktors r_G von Z_G

Reaktanzen oder Leerlauf und Kurzschluss. Die linke Halbebene (Impedanzen mit negativem Realteil) wird dagegen auf die Gegend ausserhalb des Einheitskreises abgebildet. Letztere Eigenschaft wird beim Arbeiten mit Leitungen und passiven Reaktanzen nicht benötigt, weshalb das gebräuchliche Smith-Diagramm bei $\rho = 1$ aufhört. Bei aktiven Vierpolen dagegen können negative Realteile der Eingangs- und Ausgangsimpedanzen auftreten, deren Abbildung in der Ebene des entsprechenden Reflexionsfaktors ausserhalb des Einheitskreises fällt.

2.3 Passive und verlustlose Zweipole

Aus (21) sehen wir, dass P_w negativ wird, wenn $|s_p| > 1$ ist. Das bedeutet, dass die Impedanz z Leistung an den Generatorkreis zurückliefert. Nach dem soeben Gesagten ist $|s_p| > 1$, wenn r und R_0 entgegengesetztes Vorzeichen haben. Wegen der Voraussetzung $R_0 > 0$ ist also r negativ, das heisst die Impedanz z ist nicht passiv, sondern aktiv. Also ist

$$1 - |s_p|^2 \geq 0 \quad (24)$$

ein Kriterium für die Passivität von z . (Für einen rigoroseren Beweis siehe zum Beispiel [8].)

Nimmt die Impedanz z keine Leistung auf, so wird $P_w = 0$. Somit ist nach (21)

$$|s_p|^2 = 1 \quad (25)$$

das heisst für eine verlustlose Reaktanz ist der Betrag des Reflexionsfaktors gleich 1. Diese Beziehungen gelten für alle Arten von Reflexionsfaktoren, die später auftreten werden.

2.4 Z_G von Z_0 verschieden

Der Fall einer Generatorimpedanz $Z_G = R_G + jX_G$ soll nun betrachtet werden, die von der Bezugsimpedanz Z_0 verschieden ist, welche bisher als Generatorimpedanz angenommen wurde. Dieser Fall ist später beim Vierpol von beträchtlichem Interesse. Wir betrachten Figur 5, wo nun die Leerlauf-Spannungsquelle u_0 in Serie mit der Impedanz z liegt. Es sind ferner Leistungswellen a_G und b_G gezeichnet, die in Z_G ein- und auslaufen, neben den bisher verwendeten a und b nach (14) und (15). Offensichtlich ist

$$a_G = b \text{ und } b_G = a \quad (26)$$

Definieren wir nun durch den Quotienten b_G/a_G einen *Reflexionsfaktor* r_G der Generatorimpedanz Z_G , so wird wegen den Identitäten (26):

$$r_G = b_G/a_G = a/b \quad (27)$$

Die Spannung u beträgt nach Figur 5:

$$u = -i Z_G \quad (28)$$

Setzen wir (28) in (14) und (15) ein, so resultiert folgender Ausdruck für r_G nach (27):

$$r_G = \frac{-Z_G i + Z_0 i}{-Z_G i - Z_0^* i} = \frac{Z_G - Z_0}{Z_G + Z_0^*} \quad (29)$$

Man kann r_G als «inneren Reflexionsfaktor der Quelle» bezeichnen. Da die Impedanz Z_0 in Figur 5 nicht mehr vorhanden ist, hat sie nun eine mehr formale Bedeutung zum Zwecke der Normierung, womit ihre Bezeichnung als Bezugsimpedanz deutlicher wird. Es besteht aber dennoch ein physikalischer Hintergrund, wenn man an die Messung von Z_G auf dem Umweg über eine Reflexionsfaktormessung denkt, die auf einen Wellenwiderstand $Z_0 = R_0$ bezogen wird.

Die Bedingung für Leistungsanpassung lautet im Falle $Z_G \neq Z_0$:

$$z = Z_G^* \quad (30)$$

Dies lässt sich mit (29) und (20) als Bedingung für die Reflexionsfaktoren angeben, nämlich

$$s_p = r_G^* \quad (31)$$

2.5 Die Wellenquelle

Bringt man nach Figur 6 die Spannungsquelle u_0 wieder auf der linken Seite in Serie mit Z_G an, so gilt bekanntlich folgende Beziehung für die Klemmenspannung u :

$$u = u_0 - Z_G i \quad (32)$$

Es liegt nahe, eine analoge Beziehung auch für Wellen aufzustellen, also die zur Spannungsquelle u_0 analoge *Wellenquelle* b_0 zu definieren. Solche Beziehungen wurden von *Butterweck* [9] und *Kerns* [10] für reelle Z_0 aufgestellt; schon *Epprecht* [11] hat von «Leistungsquellen» im vorliegenden Sinn gesprochen, die er aber als angepasst ($r_G = 0$)

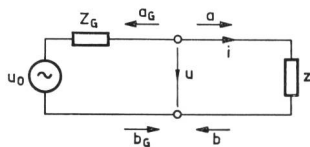


Fig. 6
Zur Definition der Ersatzwellenquelle

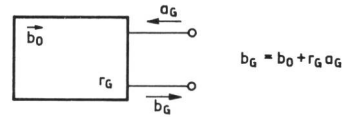


Fig. 7
Der Wellengenerator

annahm. Diese Beziehungen sollen hier auf komplexe Z_0 mit $R_0 > 0$ verallgemeinert werden.

Setzt man (16) und (17) in (32) ein, so erhält man folgende Beziehung mit den Abkürzungen b_0 und r_G :

$$a = b_0 + r_G b \quad (33)$$

oder, da $a = b_G$ und $b = a_G$ ist:

$$b_G = b_0 + r_G a_G \quad (34)$$

Der Reflexionsfaktor r_G wurde bereits in (29) gegeben; die «Wellenquelle» b_0 hat folgenden Wert:

$$b_0 = \frac{\sqrt{R_0}}{Z_G + Z_0^*} u_0 \quad (35)$$

(33) und (34) sind gleichwertig. (34) wird häufiger [9, 10] zur Charakterisierung des «Wellengenerators» benützt, dessen kennzeichnende Grössen die Wellenquelle b_0 und der innere Reflexionsfaktor r_G sind; ein solcher Wellengenerator kann nach *Figur 7* dargestellt werden. (33) führt aber direkter auf den Zusammenhang mit dem Leistungsfluss zur Last z .

Die verfügbare Wirkleistung des Generators mit $Z_G = R_G + jX_G$ beträgt

$$P_v = |u_0|^2 / 4 R_G \quad (36)$$

Andererseits ist

$$|b_0|^2 = |u_0|^2 \frac{R_0}{|Z_G + Z_0^*|^2} \quad (37)$$

Man kann aus (29) berechnen, dass

$$1 - |r_G|^2 = \frac{4 R_0 R_G}{|Z_G + Z_0^*|^2} \quad (38)$$

Somit folgt aus den drei letzten Gleichungen:

$$|b_0|^2 = P_v (1 - |r_G|^2) \quad (39)$$

Das Betragsquadrat von b_0 ist also von der verfügbaren Generatorleistung P_v und von r_G abhängig. Für $r_G = 0$ (also $Z_G = Z_0$) ist $|b_0|^2 = P_v$ sowie auch $a = b_0$.

Setzt man $b = s_p a$ in (33) ein, so folgt

$$a = \frac{b_0}{1 - r_G s_p} \quad (40)$$

Die in die Last z einlaufende Welle a ist demnach von r_G und s_p abhängig. Es resultiert $a = b_0$ auch für $s_p = 0$,

neben dem soeben erwähnten Fall $r_G = 0$. Bei Leistungsanpassung nach (31) wird

$$a_m = \frac{b_0}{1 - |r_G|^2} \quad (41)$$

und mit (39) folgt für das Betragsquadrat

$$|a_m|^2 = \frac{P_v}{1 - |r_G|^2} \quad (42)$$

Setzt man umgekehrt $a = b/s_p$ in (33) ein, so folgt für die aus z auslaufende Welle b :

$$b = \frac{s_p b_0}{1 - r_G s_p} \quad (43)$$

Danach ist $b = 0$ für $s_p = 0$ und $b = s_p b_0$ für $r_G = 0$. Bei Leistungsanpassung $s_p = r_G^*$ wird

$$b_m = \frac{r_G^* b_0}{1 - |r_G|^2} \quad (44)$$

und das Betragsquadrat folgt mit (39) zu

$$|b_m|^2 = \frac{|r_G|^2 P_v}{1 - |r_G|^2} \quad (45)$$

Die bei Leistungsanpassung übertragene Wirkleistung ergibt sich aus (42) und (45) zu P_v , wie zu erwarten war:

$$P_m = |a_m|^2 - |b_m|^2 = P_v \quad (46)$$

Für beliebige Werte der Reflexionsfaktoren s_p und r_G beträgt die übertragene Wirkleistung $P_w = |a|^2 - |b|^2$, was sich wie folgt ausdrücken lässt:

$$P_w = P_v \frac{(1 - |r_G|^2)(1 - |s_p|^2)}{|1 - r_G s_p|^2} = P_v \left(1 - \frac{|s_p - r_G^*|^2}{|1 - r_G s_p|^2}\right) \quad (47)$$

3. Allgemeine Eigenschaften des linearen aktiven Vierpols

3.1 Die Streumatrix

Gleich wie man von der Zweipolgleichung $i = yu$ auf die Matrixgleichung $\mathbf{I} = \mathbf{YU}$ für den Vierpol übergeht – siehe (1)...(2b) –, so kommt man von der Zweipolgleichung $b = s_p a$ (22) auf die Vierpolgleichungen

$$b_1 = s_{11} a_1 + s_{12} a_2 \quad (48)$$

$$b_2 = s_{21} a_1 + s_{22} a_2 \quad (49)$$

mit der Matrixschreibweise gemäss (3)...(4b). Damit der Vierpol vollständig charakterisiert ist, müssen neben der Streumatrix S die Bezugsimpedanzen angegeben werden. Bei einem $2n$ -Pol können im allgemeinsten Fall für die n Klemmenpaare n komplexe ungekoppelte Bezugsimpedanzen $Z_{01} \dots Z_{0n}$ mit positiven oder negativen, aber nichtverschwindenden Realteilen $R_{01} \dots R_{0n}$ vorhanden sein.

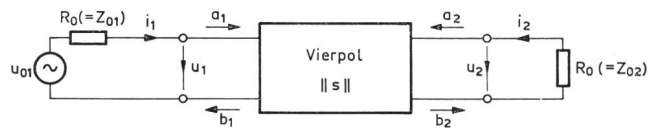


Fig. 8

Schaltung bei der Messung der s-Parameter (schematisch), mit positivem Bezugswiderstand R_0

Entsprechend der messtechnischen Praxis sollen hier für den Vierpol identische und positiv-reelle Bezugswiderstände $Z_{01} = Z_{02} = R_0 > 0$ angenommen werden, vergleiche *Figur 8*; dies im Gegensatz zum vorangehenden Kapitel 2, wo aus Gründen der Allgemeinheit Z_0 komplex vorausgesetzt wurde. R_0 ist der Wellenwiderstand einer Übertragungsleitung, zum Beispiel einer coaxialen Leitung mit $Z_0 = R_0 = 50 \Omega$. Die einlaufenden Wellen a , auf der Eingangsseite und a_2 auf der Ausgangsseite ergeben sich somit aus (14) zu

$$a_i = \frac{u_i + R_0 i_i}{2 \sqrt{R_0}} \quad (i = 1 \text{ oder } 2) \quad (50)$$

und die auslaufenden Wellen b_1 und b_2 aus (15) zu

$$b_i = \frac{u_i - R_0 i_i}{2 \sqrt{R_0}} \quad (i = 1 \text{ oder } 2) \quad (51)$$

Die Spannungen u_1 und u_2 beziehungsweise die Ströme i_1 und i_2 betragen als Transformation der Wellengrößen:

$$u_i = \sqrt{R_0} (a_i + b_i) \quad (i = 1 \text{ oder } 2) \quad (52)$$

$$i_i = \frac{a_i - b_i}{\sqrt{R_0}} \quad (i = 1 \text{ oder } 2) \quad (53)$$

Der Transistor ist ein nichtlineares Bauelement; der Zusammenhang zwischen Wechselspannungen und -strömen ist aber praktisch linear, wenn die Amplituden genügend klein sind (Kleinsignal-Betrieb). Unter dieser Voraussetzung gelten die angegebenen linearen Beziehungen zwischen den Spannungen und Strömen oder ein- und auslaufenden Wellen.

Gleich wie es bekanntlich sechs verschiedene Strom-Spannungsmatrizen für den Vierpol gibt, je nach Wahl der unabhängigen und abhängigen Größen, so existiert für die Beziehung zwischen den ein- und auslaufenden Wellen nicht nur das eine Gleichungspaar (48) und (49), sondern es gibt – je nach Wahl der a_i und b_i als abhängige oder unabhängige Größen – sechs verschiedene Gleichungspaare, und damit *sechs Wellenmatrizen*. Die Streumatrix ist von diesen die am meisten verwendete.

Die Bedeutung der Streuparameter ergibt sich, beginnend mit s_{11} aus (48), wie folgt:

$$s_{11} = b_1/a_1 \text{ für } a_2 = 0 \quad (54)$$

Nach (50) ist $a_2 = 0$ für $u_2 = -R_0 i_2$, also wenn der Vierpol mit dem Bezugswiderstand R_0 abgeschlossen ist; siehe Figur 8. Mit (50) und (51) folgt

$$s_{11} = \frac{u_1/i_1 - R_0}{u_1/i_1 + R_0} = \frac{Z_{1B} - R_0}{Z_{1B} + R_0} \quad (55)$$

wobei $Z_{1B} = u_1/i_1$ die Eingangsimpedanz des Vierpols bei ausgangsseitigem Abschluss mit R_0 ist. Der Streuparameter s_{11} ist somit der Eingangs-Reflexionsfaktor des Vierpols bei Belastung des Vierpols am Ausgang mit dem Bezugswiderstand R_0 . Umgekehrt ist

$$Z_{1B} = R_0 \frac{1 + s_{11}}{1 - s_{11}} \quad (56)$$

Analog findet man für den Parameter s_{22} aus (49):

$$s_{22} = b_2/a_2 = \frac{Z_{2B} - R_0}{Z_{2B} + R_0} \text{ für } a_1 = 0 \quad (57)$$

Dies stellt den Ausgangs-Reflexionsfaktor des Vierpols dar für den Fall, dass der Eingang mit dem Bezugswiderstand R_0 abgeschlossen ist, wobei $Z_{2B} = u_2/i_2$ die entsprechende Ausgangsimpedanz ist.

Für den Parameter s_{21} folgt aus (49):

$$s_{21} = b_2/a_1 \text{ für } a_2 = 0 \quad (58)$$

Der Parameter s_{21} ist ein Vorwärts-Übertragungsfaktor, der das komplexe Verhältnis der am Ausgang auslaufenden Welle b_2 zu der am Eingang einlaufenden Welle a_1 angibt, wenn der Ausgang mit dem Bezugswiderstand R_0 belastet ist.

Nach Figur 8 ist

$$u_2 = -R_0 i_2 \quad (59)$$

und

$$u_{01} = u_1 + R_0 i_1 \quad (60)$$

so dass man auch schreiben kann:

$$s_{21} = \frac{u_2 - R_0 i_2}{u_1 + R_0 i_1} = \frac{2 u_2}{u_{01}} \Big|_{u_2 = -R_0 i_2} \quad (61)$$

Somit ist s_{21} auch gleich zweimal dem (komplexen) Verhältnis der Ausgangsspannung u_2 zur Leerlauf-Generatorspannung u_{01} am Eingang, wenn die Generator- und Belastungsimpedanzen gleich dem Bezugswiderstand R_0 sind. Diese Grösse wird Betriebs-Spannungsübertragungsfaktor genannt.

Ähnlich findet man den Parameter s_{12}

$$s_{12} = b_1/a_2 \text{ für } a_1 = 0 \quad (62)$$

als einen Rückwärts-Übertragungsfaktor, der das komplexe Verhältnis der am Eingang auslaufenden Welle b_1 zur am

Ausgang einlaufenden Welle a_2 angibt, wenn der Eingang mit dem Bezugswiderstand R_0 belastet ist.

Legt man eine Spannungsquelle u_{02} in Serie mit R_0 (= Z_{02}) am Ausgang und lässt u_{01} am Eingang weg, so resultiert ähnlich wie in (61):

$$s_{12} = \frac{u_1 - R_0 i_1}{u_2 + R_0 i_2} = \frac{2 u_1}{u_{02}} \Big|_{u_1 = -R_0 i_1} \quad (63)$$

Somit ist s_{12} auch gleich zweimal dem (komplexen) Verhältnis der Eingangsspannung u_1 zur Leerlauf-Generatorspannung u_{02} am Ausgang, wenn die Generator- und Belastungsimpedanzen gleich dem Bezugswiderstand R_0 sind (= Rückwärts-Betriebs-Spannungsübertragungsfaktor).

Voraussetzung der Bestimmung von s_{21} und s_{12} nach (61) beziehungsweise (63) ist die Messbarkeit der Spannungen u_1 , u_2 , u_{01} und u_{02} . Dies wird eher bei niedrigeren Frequenzen der Fall sein. Neuerdings kann man aber bei hohen Frequenzen mit geeigneten Instrumenten die Wellen leichter messen, so dass man nach (58) oder (62) vorgehen wird.

Die Streuparameter sind dimensionslose Grössen, die im allgemeinen einen komplexen Wert haben. Am üblichsten ist ihre Darstellung im *Smith-Diagramm* (normierte Form) nach Betrag und Phasenwinkel. Besonders für s_{21} können Beträge grösser als 1 vorkommen, so dass das gebräuchliche *Smith-Diagramm* erweitert werden muss. Bei s_{11} und s_{22} kann man im *Smith-Diagramm* die zugehörigen Impedanzen Z_{1B} beziehungsweise Z_{2B} ablesen. Man kann die *s*-Parameter aber auch durch Realteil und Imaginärteil darstellen; diese können ebenfalls im *Smith-Diagramm* abgelesen werden.

Typische Werte der Streuparameter eines Transistors 2N3570 ($U_{CE} = 10 \text{ V}$; $I_C = 4 \text{ mA}$) für $R_0 = 50 \Omega$ betragen bei 750 MHz:

$$s_{11} = 0,277 \angle -59^\circ \quad s_{21} = 1,92 \angle +64^\circ$$

$$s_{12} = 0,078 \angle +93^\circ \quad s_{22} = 0,848 \angle -31^\circ$$

Die *Betragsquadrate der s-Parameter* sind ebenfalls interessant. Im Anschluss an (19) und (21) gilt vorerst für die Betragsquadrate der Wellen a_1 und b_1 :

$$\begin{aligned} |a_1|^2 &= \begin{cases} \text{Einfallende Wirkleistung am Vierpol-Eingang} \\ \text{Verfügbare Wirkleistung eines Generators der} \\ \text{Impedanz } R_0 \end{cases} \\ |b_1|^2 &= \text{Am Eingang des Vierpols reflektierte Wirkleistung} \\ |a_2|^2 &= \begin{cases} \text{Am Ausgang des Vierpols einfallende Wirkleistung} \\ \text{Von der Belastung reflektierte Wirkleistung} \end{cases} \\ |b_2|^2 &= \begin{cases} \text{Am Ausgang des Vierpols austretende Wirk-} \\ \text{leistung} \\ \text{In die Belastung einfallende Wirkleistung} \end{cases} \end{aligned}$$

Daraus folgt für die Betragsquadrate der s-Parameter, wobei immer an den Abschluss mit R_0 zu denken ist:

$$|s_{11}|^2 = \frac{\text{Am Eingang des Vierpols reflektierte Wirkleistung}}{\text{Einfallende Wirkleistung am Vierpol-Eingang}}$$

$$|s_{22}|^2 = \frac{\text{Am Ausgang des Vierpols austretende Wirkleistung}}{\text{Am Ausgang des Vierpols einfallende Wirkleistung}}$$

$$|s_{21}|^2 = \frac{\text{An den Bezugswiderstand } R_0 \text{ gelieferte Wirkleistung}}{\text{Verfügbare Wirkleistung eines Generators der Impedanz } R_0}$$

= Betriebsverstärkung des mit dem Bezugswiderstand R_0 belasteten Vierpols, wenn die Generatorimpedanz R_0 beträgt.

$|s_{12}|^2$ = Betriebsverstärkung in Rückwärtsrichtung, wenn der Vierpol ausgangsseitig von einem Generator mit der Impedanz R_0 gespeist und eingangsseitig mit dem Bezugswiderstand R_0 belastet ist.

Ferner ist zum Beispiel:

$$1 - |s_{11}|^2 = \frac{|a_1|^2 - |b_1|^2}{|a_1|^2} = \frac{\text{Eingangs-Wirkleistung}}{\text{verfügbare Generatorleistung}}$$

Die Streuparameter stehen also in einem engen Zusammenhang mit der Leistungsübertragung und der Fehlanpassung der Vierpols. Im allgemeinen Fall beträgt die Generator- und Lastimpedanz nicht R_0 , und es stellen sich dann etwa folgende Fragen:

- Gibt es optimale Abschlussimpedanzen für maximale Leistungsübertragung des Vierpols?
- Ist der Vierpol unbedingt oder bedingt stabil?
- Welche Abschlussimpedanz ist für einen vorgeschriebenen Gewinn erforderlich?

Es erweist sich als günstig, nicht mit Generator- und Lastimpedanz Z_G und Z_L zu rechnen, sondern mit deren Reflexionsfaktoren r_G und r_L , bezogen auf R_0 .

3.2 Betriebsschaltung des Vierpols

In *Figur 9* ist die Betriebsschaltung eines Vierpols in wellenmässiger Darstellung gezeichnet. Der Generator ist durch eine Wellenquelle b_0 und deren Reflexionsfaktor r_G dargestellt, die Lastimpedanz durch ihren Reflexions-

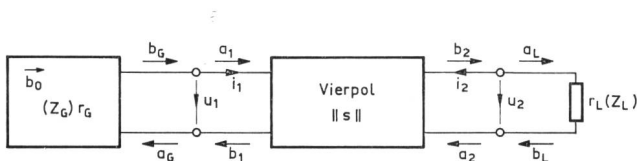


Fig. 9
Betriebsschaltung eines Vierpols in Wellendarstellung, mit Wellenquelle (b_0 ; r_G) und Last-Reflexionsfaktor r_L

faktor r_L . Wegen der nunmehr rein reell angenommenen Bezugsimpedanz wird aus (35)

$$b_0 = \frac{\sqrt{R_0}}{Z_G + R_0} u_0 \quad (64)$$

und aus (29)

$$r_G = \frac{Z_G - R_0}{Z_G + R_0} \quad (65)$$

Es gilt ferner nach (33) und (34), wegen $b_G = a_1$ und $a_G = b_1$:

$$b_G = b_0 + r_G a_G \quad \text{oder} \quad a_1 = b_0 + r_G b_1 \quad (66)$$

Ferner beträgt der Lastreflexionsfaktor r_L

$$r_L = \frac{Z_L - R_0}{Z_L + R_0} \quad (67)$$

Schliesslich gilt

$$r_L = b_L/a_L = a_2/b_2 \quad (68)$$

da aus der *Figur 9* die Beziehungen $a_2 = b_L$ und $b_2 = a_L$ ersichtlich sind. Für diese gelten (48)...(53). Man beachte, dass der Bezugswiderstand R_0 in *Figur 9* nicht erscheint, der in den obigen Gleichungen enthalten ist. Er hat aber trotzdem eine physikalische Bedeutung, da er als Bezugsgrösse bei der Messung der s-Parameter oder der Reflexionsfaktoren r_G und r_L dient.

Eingangs- und Ausgangs-Reflexionsfaktor

Setzt man $b_2 = a_2/r_L$ aus (68) in (49) ein, so folgt

$$a_2 = \frac{s_{21} r_L}{1 - r_L s_{22}} \quad (69)$$

Dies in (48) eingesetzt, gibt

$$b_1 = a_1 \left(s_{11} + \frac{s_{12} s_{21} r_L}{1 - s_{22} r_L} \right)$$

Daraus folgt der Eingangs-Reflexionsfaktor S_1

$$S_1 = \frac{b_1}{a_1} = s_{11} + \frac{s_{12} s_{21} r_L}{1 - s_{22} r_L} = \frac{s_{11} - r_L \Delta}{1 - s_{22} r_L} \quad (70)$$

mit der Determinante der s-Parameter

$$\Delta = s_{11} s_{22} - s_{12} s_{21} \quad (71)$$

S_1 stellt den Reflexionsfaktor der Eingangsimpedanz bei Abschluss des Ausgangs mit beliebiger Last r_L dar. Für $r_L = 0$ geht dieser Ausdruck über in $S_1 = s_{11}$, wie erforderlich bei Abschluss mit dem Bezugswiderstand R_0 .

Gleichung (70) ist analog zur Eingangsadmittanz Y_1 ausgedrückt durch die y-Parameter:

$$Y_1 = \frac{i_1}{u_1} = y_{11} - \frac{y_{12} y_{21} Z_L}{1 + y_{22} Z_L} \quad (72)$$

Bei Kurzschluss ($Z_L = 0$) wird $Y_1 = y_{11}$, wie nach der Definition der y-Parameter erforderlich.

Ähnlich findet man den Ausgangs-Reflexionsfaktor S_2 bei Abschluss des Eingangs mit r_G :

$$S_2 = \frac{b_2}{a_2} = s_{22} + \frac{s_{12} s_{21} r_G}{1 - s_{11} r_G} = \frac{s_{22} - r_G \Delta}{1 - s_{11} r_G} \quad (73)$$

Man kann S_1 und S_2 wie andere Reflexionsfaktoren im *Smith*-Diagramm darstellen. Hier sei besonders die Abbildung der Punkte in der r_L -Ebene mit konstantem Betrag (= konzentrische Kreise um den Nullpunkt als Mittelpunkt mit Radius $|r_L|$) in der S_1 -Ebene betrachtet. Aus (70) lässt sich

$$S_1 - s_{11} = (S_1 s_{22} - \Delta) r_L$$

ableiten. Die Bildung des Betragsquadrats auf beiden Seiten führt zur Gleichung eines Kreises:

$$|S_1|^2 - (c_{r1} S_1^* + c_{r1}^* S_1) = \frac{|r_L \Delta|^2 - |s_{11}|^2}{1 - |s_{22} r_L|^2} \quad (74)$$

wobei die Abkürzung

$$c_{r1} = s_{11} + s_{12} s_{21} s_{22}^* \frac{|r_L|^2}{1 - |s_{22} r_L|^2} \quad (75)$$

den Mittelpunkt des Kreises angibt. Aus der allgemeinen Kreisgleichung

$$|S_1 - c_{r1}|^2 = \varrho_{r1}^2 \quad (76)$$

resultiert, dass die rechte Seite von (74) den Wert $\varrho_{r1}^2 - |c_{r1}|^2$ hat; daraus folgt der Kreisradius ϱ_{r1} zu

$$\varrho_{r1} = \frac{|s_{12} s_{21} r_L|}{1 - |s_{22} r_L|^2} \quad (77)$$

Hier und in folgenden wird vorausgesetzt, dass $|s_{22}|$ und $|s_{11}|$ kleiner als 1 seien, das heisst, dass die Eingangs- und Ausgangsimpedanz des Vierpols bei Abschluss der Gegenseite mit R_0 einen positiven Realteil hat.

Für $r_L = 0$ ist $c_{r1} = s_{11}$ und $\varrho_{r1} = 0$; der Kreis schmilzt auf den Punkt s_{11} zusammen.

Aus (75) sieht man, dass die Kreismittelpunkte c_{r1} bei zunehmendem $|r_L|$ auf einer Geraden liegen, die durch den Punkt s_{11} geht und deren Neigung durch das Produkt $s_{12} s_{21} s_{22}^*$ gegeben ist. Aus (77) folgt, dass die Kreisradien mit zunehmendem $|r_L|$ wachsen. Der Kreis für $|r_L| = 1$ (entsprechend Lastimpedanzen mit verschwindendem Realteil oder Leerlauf oder Kurzschluss) hat Radius ϱ_1 und Mittelpunkt c_1 gemäss

$$\varrho_1 = \frac{|s_{12} s_{21}|}{1 - |s_{22}|^2} \quad c_1 = \frac{\gamma_1}{1 - |s_{22}|^2} \quad (78)$$

mit der Abkürzung

$$\gamma_1 = s_{11} - \Delta s_{22}^* \quad (79)$$

Dieser Kreis ist von besonderer Bedeutung für die Betrachtung der Stabilität; siehe Abschnitt 3.3. Grössere

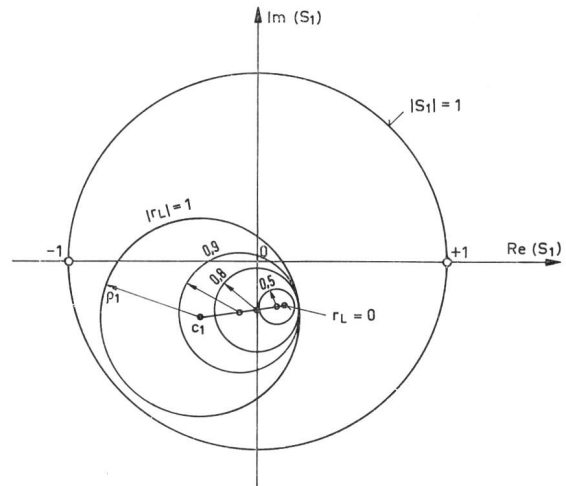


Fig. 10

Abbildung von Kreisen $|r_L| = \text{konst.}$ in der Ebene des Eingangs-Reflexionsfaktors S_1 für einen Transistor 2N3570 bei 750 MHz ($K = 1,033$). Innerhalb des Kreises $|S_1| = 1$ denke man sich das *Smith*-Diagramm.

Kreise würden $|r_L| > 1$ entsprechen, also Lastimpedanzen mit negativem Realteil. *Figur 10* zeigt berechnete Kreise für einen Transistor mit den im Abschnitt 3.1 angegebenen Werten der s -Parameter. Innerhalb des mit $|r_L| = 1$ angeschriebenen Kreises oder auf diesem liegen alle Eingangs-Reflexionsfaktoren, die sich aus einer passiven Belastung (mit positivem oder verschwindendem Realteil) ergeben. – In *Figur 10* könnte man noch die geometrischen Orte für konstanten Phasenwinkel von r_L eintragen. In der r_L -Ebene sind dies Geraden durch den Nullpunkt; nach der bilinearen Transformation werden diese als Kreise in der S_1 -Ebene abgebildet.

Entsprechende Beziehungen sind auch für S_2 ableitbar, die sich durch Vertauschen der Indizes 1 und 2 sowie von r_G mit r_L in den obigen Gleichungen ergeben.

Übertragungsfaktoren

Das Verhältnis einer Ausgangsgrösse σ_2 zu einer Eingangsgrösse σ_1 eines Vierpols wird Übertragungsfaktor genannt; die Grössen σ_1 und σ_2 können gleich- oder verschiedenartig sein. Übertragungsfaktoren sind beispielsweise die Spannungsverstärkung $A_u = u_2/u_1$ oder die Übertragungsimpedanz $Z_{21} = u_2/i_1$.

Von den sich anbietenden Verhältnissen von Wellen sei nur der Übertragungsfaktor b_2/a_1 berechnet, der unten im Zusammenhang mit den Wirkleistungsverhältnissen auftritt. Setzt man $a_2 = r_L b_2$ nach (68) in (49) ein, so folgt

$$\frac{b_2}{a_1} = \frac{s_{21}}{1 - s_{22} r_L} \quad (80)$$

Die Welle b_2 soll auch noch ins Verhältnis zur Wellenquelle b_0 gesetzt werden. Nach (66) ist $a_1 = b_0 + r_G b_1$, und mit $b_1 = S_1 a_1$ folgt mit Hilfe von (70):

$$a_1 = \frac{b_0}{1 - r_G S_1} = \frac{b_0 (1 - s_{22} r_L)}{(1 - s_{11} r_G) (1 - s_{22} r_L) - s_{12} s_{21} r_G r_L} \quad (81)$$

Dies in (80) eingesetzt, gibt

$$\frac{b_2}{b_0} = \frac{s_{21}}{(1 - s_{11} r_G) (1 - s_{22} r_L) - s_{12} s_{21} r_G r_L} \quad (82)$$

Beliebte Grössen in der «klassischen» Vierpoldarstellung sind *Spannungs-* und *Stromverstärkung*. Auch diese können natürlich durch die Streuparameter dargestellt werden. Für die *Stromverstärkung* ergibt sich zunächst mit (53):

$$A_i = \frac{i_2}{i_1} = \frac{a_2 - b_2}{a_1 - b_1}$$

Setzt man $a_2 = r_L b_2$ und $b_1 = S_1 a_1$ ein, so folgt mit (80) und (70):

$$A_i = \frac{b_2 (r_L - 1)}{a_1 (1 - S_1)} = \frac{-s_{21} (1 - r_L)}{1 - s_{11} - r_L (s_{22} - \Delta)} \quad (83)$$

Ähnlich findet man für die *Spannungsverstärkung* mit (52):

$$\begin{aligned} A_u = \frac{u_2}{u_1} &= \frac{a_2 + b_2}{a_1 + b_1} = \frac{b_2 (r_L + 1)}{a_1 (1 + S_1)} = \\ &= \frac{s_{21} (1 + r_L)}{1 + s_{11} - r_L (s_{22} + \Delta)} \end{aligned} \quad (84)$$

Auf gleiche Weise könnte man die Übertragungsimpedanz $Z_{21} = u_2/i_1$ und die Übertragungsadmittanz $Y_{21} = i_2/u_1$ berechnen, was hier unterlassen sei.

Alle diese Übertragungsfaktoren werden wenig benützt, da man im fraglichen Frequenzgebiet in der Regel an den Leistungsverhältnissen interessiert ist. Schluss folgt