

Der Vertrauensbereich von Ausbreitungsstatistiken

Autor(en): **Debrunner, Walter E.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Technische Mitteilungen / Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafienbetriebe = Bulletin technique / Entreprise des postes, téléphones et télégraphes suisses = Bollettino tecnico / Azienda delle poste, dei telefoni e dei telegrafi svizzeri**

Band (Jahr): **61 (1983)**

Heft 7

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-875708>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Aus diesem Grunde fällt es schwer, aufgrund meteorologischer Daten anzugeben, ob das Experiment während einer «ungünstigen», einer «mittelmässigen» oder einer «günstigen» Periode durchgeführt worden ist. Eine Abschätzung der Zuverlässigkeit gemessener Statistiken ist daher wünschbar.

3 Abschätzung der «wahren» Wahrscheinlichkeit

31 Problemstellung

Die «wahre» Wahrscheinlichkeitsverteilung kann definitionsgemäss aufgrund einer unendlich grossen Stichprobe angegeben werden. Anhand von Stichproben beschränkten Umfangs lässt sich nur das Vertrauensintervall abschätzen, innerhalb dessen die «wahre» Verteilung voraussichtlich liegt. Vorerst wird für eine vorgegebene Aussagesicherheit W der Begriff des Vertrauensbereichs definiert. Die Berechnung benützt die Likelihood-Funktion und wird begründet. Abgeschätzt werden können einzelne Wahrscheinlichkeiten und Parameter von Verteilungen.

Das Vertrauensintervall $\hat{P} \leq P < \hat{P}$ ist von der verlangten Aussagesicherheit W abhängig und derart definiert, dass für die gesuchte «wahre» Wahrscheinlichkeit P_0 mit den Sicherheiten $(1-W)/2$ die beiden Aussagen $P_0 < \hat{P}$ und $P_0 \geq \hat{P}$ richtig sind. Die «wahre» Wahrscheinlichkeit P_0 liegt dann mit der Sicherheit W innerhalb des Intervalles $\hat{P} \leq P_0 < \hat{P}$. Der Begriff der Aussagesicherheit wird anhand eines Beispiels genauer erklärt. Zur Vereinfachung beschränken wir uns vorerst auf die Bestimmung der Aussagesicherheit $S = (1+W)/2$, mit der die Aussage $P_0 < \hat{P}\{S\}$ richtig sein soll.

In einer Urne befinden sich M Kugeln; davon sind N rot. Die «wahre» Wahrscheinlichkeit $P_0 = N/M$, eine rote Kugel zu ziehen, ist dem Experimentator nicht bekannt. Bei einer Stichprobe von m Zügen (und jeweiligem Zurücklegen) erhält er n rote Kugeln und soll nun den Wert \hat{P} so bestimmen, damit die Aussage $P_0 < \hat{P}$ mit der vorgegebenen Sicherheit S richtig ist.

Der Experimentator wird einen Algorithmus konstruieren müssen, um aus der Beobachtung (n von m) den gesuchten Wert \hat{P} zu berechnen. Bei Wiederholungen des Versuchs und unterschiedlichen Ergebnissen (n_i von m_i) liefert der Algorithmus auch unterschiedliche Werte $\hat{P}_1, \hat{P}_2, \dots, \hat{P}_i, \dots$. Die damit formulierten Aussagen $P_0 < \hat{P}_i$ werden zum Teil falsch sein; sie sollen jedoch mit der vorgegebenen relativen Häufigkeit S zutreffen. Dann ist die Aussagesicherheit auch gleich S . Dieselbe Forderung muss an die Abschätzung der Vertrauensintervalle der Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen gestellt werden.

32 Likelihood-Funktion

Es sei mit $x = x_1, x_2, \dots, x_k$ das Ergebnis einer Stichprobe (z. B. Messung von Überschreitungszeiten) bezeichnet. Die Verteilungsfunktion sei bekannt und weise die Parameter $a = a_1, a_2, \dots, a_j$ auf. Die Likelihood-Funktion $L\{a, x\}$ gibt nun die Wahrscheinlichkeitsdichte des Auftretens der Stichprobe x im Ereignisraum X an. Mit der Maximum-Likelihood-Methode werden die Parameter so geschätzt, dass das Auftreten der beobachteten

Stichprobe x von höchster Wahrscheinlichkeit ist. Damit ist einer jeden Stichprobe x eindeutig eine Schätzung \hat{a} zugeordnet. Im Ereignisraum X bilden die Stichproben T_x für $\hat{a} = \text{konstant}$ sich nicht schneidende Flächen.

Dadurch kann auch die Integration der Likelihood-Funktion $L\{a, x\}$ im Parameterraum A definiert werden. Im Ereignisraum X bestimmen $a' = \text{konstant}$ und $a'' = \text{konstant}$ die Begrenzungsflächen eines Teilraums. Das Integral von den Parameterwerten a' bis a'' ist nun gleich dem Integral im erwähnten Teilraum von X .

33 Abschätzungsverfahren

Anhand einer Stichprobe $x = x_1, x_2, \dots, x_k$ sind die «wahren» Parameter einer Verteilungsfunktion zu bestimmen. Zur Vereinfachung der Erklärung wird angenommen, dass nur *ein* Parameterwert abzuschätzen ist. Nach der Maximum-Likelihood-Methode wird der Stichprobe x der Parameter \hat{a} zugeordnet. Mit a_0 sei der «wahre» Parameterwert bezeichnet. Es ist nun ein Wert \hat{a} so zu bestimmen, damit die Aussage $a_0 \leq \hat{a}$ mit der Sicherheit S zutrifft.

Es wird die Behauptung aufgestellt, S entspräche dem Integral der Likelihood-Funktion $L\{\hat{a}, x\}$ von $a = \hat{a}$ bis $a = a_{\max}$ im Parameterraum (s. 32):

$$S = \int_{x=\hat{a}}^{x=a_{\max}} L\{\hat{a}, x\} dx \quad (1)$$

Diese Relation laute explizit in \hat{a} geschrieben, wobei x durch \hat{a} dargestellt wird

$$\hat{a} = f\{S, x\} = F\{S, \hat{a}\} \quad (2)$$

Ohne wirkungsvolle Einschränkung darf angenommen werden, dass für $S = \text{konstant}$

$$\partial \hat{a} / \partial \hat{a} \geq 0 \quad (3)$$

Zum Beweise definieren wir vorerst unter Benützung von (2) den Wert α

$$\alpha = F\{S, a_0\} \quad (4)$$

Eine Stichprobe x , der nach der Maximum-Likelihood-Methode ein Parameter $\hat{a} \geq \alpha$ zugeordnet wird, tritt also mit der Wahrscheinlichkeit

$$S = \int_{x=\alpha}^{x=a_{\max}} L\{a_0, x\} dx \quad (5)$$

auf. Für gleichbleibendes S ist bei den möglichen Stichproben zwischen den beiden folgenden Fällen zu unterscheiden:

- 1) wenn $\hat{a} < \alpha$, dann ist $\hat{a} < a_0$
- 2) wenn $\hat{a} \geq \alpha$, dann ist $\hat{a} \geq a_0$

Die Aussage $a_0 \leq \hat{a}$ ist im Falle 2) richtig. Gemäss der Abschätzung (5) soll dieser Fall mit der Häufigkeit S auftreten. Damit kann (1) zur Ermittlung der Aussagesicherheit verwendet werden.

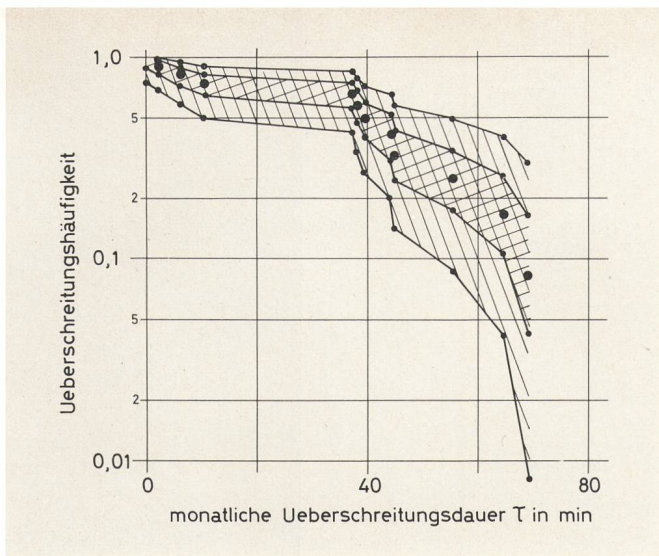


Fig. 2
Vertrauensbereiche für $P\{\tau\}$ nach dem ersten Jahr

- für Aussagesicherheit $W = 50\%$
- für Aussagesicherheit $W = 90\%$

34 Abschätzung einer Überschreitungswahrscheinlichkeit

Bei Messungen über m Monaten hat während n Monaten die monatliche Überschreitungsdauer einer bestimmten Dämpfung mehr als T betragen. Abzuschätzen ist die «wahre» monatliche Überschreitungshäufigkeit P_0 dieser Zeit T . Das Ergebnis der Stichprobe ist n positive Ergebnisse bei m Versuchen (s. Urnenmodell, 31). Die Wahrscheinlichkeit P einer Überschreitung je Monat stellt den Parameter der Verteilung dar. Damit ergibt sich für die Likelihood-Funktion L die Formel

$$L\{P, n\} = \binom{m}{n} \cdot p^n \cdot (1-p)^{m-n} \quad (6)$$

L ist nur für ganzzahlige n definiert und weist dort das Verhalten der δ -Funktion auf. Bei numerischen Berechnungen der Sicherheit S sind zweckmässigerweise für (1) deshalb folgende Formeln zu benutzen:

$$\text{für } n=0: \quad S = 1 - (1 - \hat{P})^m$$

$$\text{für } 0 < n < m: \quad S = \left[\sum_{i=n}^{m} \binom{m}{i} \cdot (\hat{P})^i \cdot (1 - \hat{P})^{m-i} \right] - 0,5 \binom{m}{n} (\hat{P})^n \cdot (1 - \hat{P})^{m-n} \quad (7)$$

$$\text{für } n=m: \quad S = (\hat{P})^m$$

Das Differential von S nach \hat{P} stellt die aufgrund der Stichprobe zu erwartende Wahrscheinlichkeitsdichte von \hat{P} dar. Damit lässt sich der Erwartungswert $E\{P\}$ der Wahrscheinlichkeit P bestimmen, nämlich

$$E\{P\} = \int_{p=0}^{p=1} P \cdot \frac{\partial S}{\partial P} \cdot dP = \frac{n+0,5}{m+1} \quad (8)$$

Eine solche Schätzung von P erscheint plausibler als die sich bei Anwendung der Maximum-Likelihood-Methode ergebende Annahme $\hat{P} = n/m$.

35 Schätzung der Parameter einer Verteilung

Die Abschätzung der Parameter einer Verteilung sei am Beispiel der Exponentialverteilung gezeigt. Deren Summenhäufigkeit $P\{x\}$ ist gegeben durch

$$P\{x\} = b \cdot \exp\{-x/c\}; \quad (\text{für } x \geq 0) \quad (9)$$

Der Parameter b gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Wert $x > 0$ auftritt. Eine grosse Vereinfachung ergibt sich, wenn b und c einzeln abgeschätzt werden. Die Bestimmung des Vertrauensintervalls von b ist dann in Abschnitt 34 beschrieben. Von der Stichprobe $x = x_1, x_2, \dots, x_m$ seien n Werte positiv, nämlich y_1, y_2, \dots, y_n . Diese sind zur Abschätzung des Parameters c zu benutzen. Die Likelihood-Funktion $L_c\{c, y\}$ der Summenhäufigkeit $P_c\{y\} = \exp\{-y/c\}$ ist dann

$$L_c\{c, y\} = c^{-n} \cdot \exp\left\{-\left[\sum_{i=1}^{i=n} y_i\right]/c\right\} \quad (10)$$

und nach der Maximum-Likelihood-Methode erhält man als Schätzung von c

$$\tilde{c} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} y_i \quad (11)$$

Wenn c_0 der «wahre» Wert des Parameters c , so ist die Sicherheit S_c der Aussage $c_0 \leq \hat{c}$

$$S_c = \left[\sum_{i=0}^{i=n-1} \frac{1}{i!} \cdot \left[\frac{n \cdot \tilde{c}}{\hat{c}}\right]^i \right] \cdot \exp\left\{-\frac{n \cdot \tilde{c}}{\hat{c}}\right\} \quad (12)$$

und der analog zu (8) berechnete «Erwartungsfunktions» von $P_c\{y\}$ ist

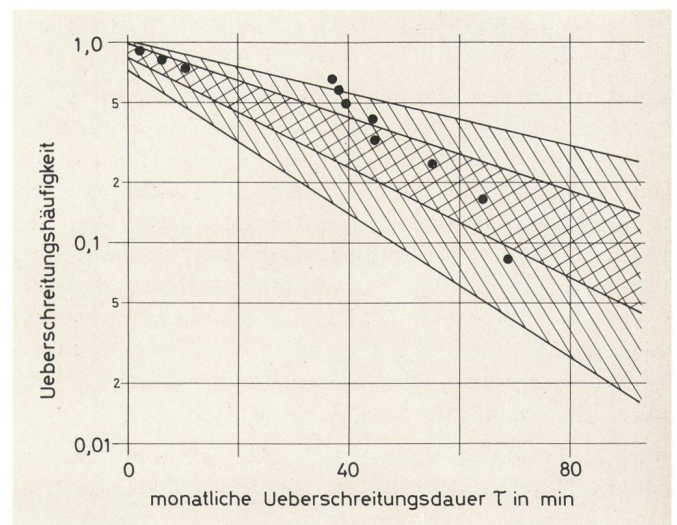


Fig. 3
Vertrauensbereiche für $P\{\tau\}$ nach dem ersten Jahr bei Annahme einer Exponentialverteilung

- für Aussagesicherheit $W = 50\%$
- für Aussagesicherheit $W = 90\%$

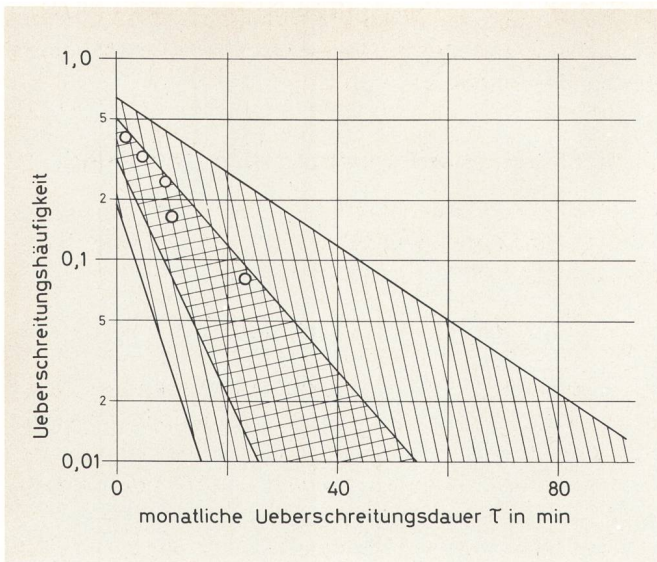


Fig. 4
Vertrauensbereiche von $P\{\tau\}$ aufgrund der Messungen des zweiten Jahres; Annahme einer Exponentialverteilung

- ⊠ für Aussagesicherheit $W = 50\%$
- ▨ für Aussagesicherheit $W = 90\%$

$$E\{P_c\{y\}\} = \frac{1}{[1 + (y/n \cdot \hat{c})]^n} \quad (13)$$

Von einer Schätzung mit der Zuverlässigkeit S soll erwartet werden, dass die beiden Aussagen ($b_0 \leq \hat{b}$) und ($c_0 < \hat{c}$) mit der Sicherheit S richtig sind. Mathematisch exaktere Lösungen sind unter Verwendung der Dichten ($\partial S_b / \partial b$) und ($\partial S_c / \partial c$) möglich.

4 Vertrauensintervalle der beobachteten Statistiken

Die Anwendung der Schätzungsverfahren muss zeigen, inwiefern die Voraussetzungen der statistischen Betrachtungsweise in der Praxis zulässig sind. Die Art der in Fig. 1 dargestellten Summenhäufigkeiten $P\{\tau\}$ ist repräsentativ für viele Richtstrahlstrecken.

Vorerst seien nur die Ergebnisse des ersten Jahres diskutiert. Sind keine Annahmen über den Typ der Verteilung möglich, so ist die in 34 beschriebene Methode anzuwenden. Die auf diese Weise berechneten Vertrauensintervalle sind in Fig. 2 aufgezeichnet. Nun bestehen jedoch gute Gründe, eine Exponentialverteilung vorauszusetzen. Fig. 3 zeigt deshalb die nach dem Verfahren von Abschnitt 35 bestimmten Vertrauensintervalle. Beide Schätzungen stimmen ziemlich gut miteinander überein. Dasselbe kann bei den Auswertungen anderer Messperioden festgestellt werden.

Vergleicht man nun die nach der zweiten Methode (Abschnitt 35) ermittelten Vertrauensintervalle der Stichproben des ersten und des zweiten Jahres (Fig. 3 und 4), so sind wesentliche Unterschiede zu erkennen. Nur die Vertrauensintervalle mit den Aussagesicherheiten $W > 90\%$ überdecken sich teilweise. Dies ist *nicht* auf mathematische Fehler der Schätzungsmethode, sondern auf die grosse Variabilität der jährlichen Statistiken zurückzuführen. Der Vergleich eines «ungünstigen» mit

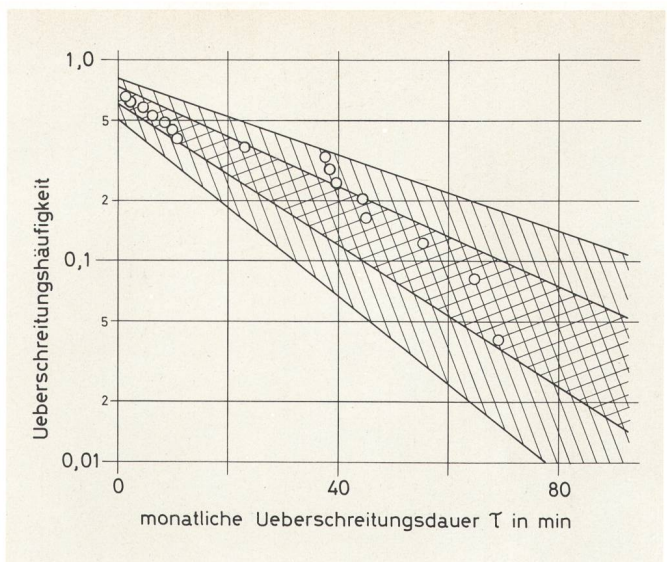


Fig. 5
Vertrauensbereiche von $P\{\tau\}$ nach den ersten zwei Jahren

- ⊠ für Aussagesicherheit $W = 50\%$
- ▨ für Aussagesicherheit $W = 90\%$

einem «günstigen» Jahr zeigt deutlich, dass nur auf mehrjährige Messungen abgestellt werden sollte. Auch durchdachtere Abschätzungsverfahren können die beschränkte Information kurzzeitiger informativer Experimente nicht kompensieren.

Die nach zwei- und nach vierjährigen Messungen sich ergebenden Vertrauensintervalle sind in den Figuren 5 und 6 dargestellt. Erwartungsgemäss ist die Breite der Vertrauensintervalle bezüglich τ etwa umgekehrt proportional zur Wurzel aus der Dauer des Experimentes. Diese Figuren zeigen, dass auch nach Messungen von vier Jahren die Unsicherheiten noch verhältnismässig gross sind. Es ist ihnen in der Planung daher Rechnung zu tragen.

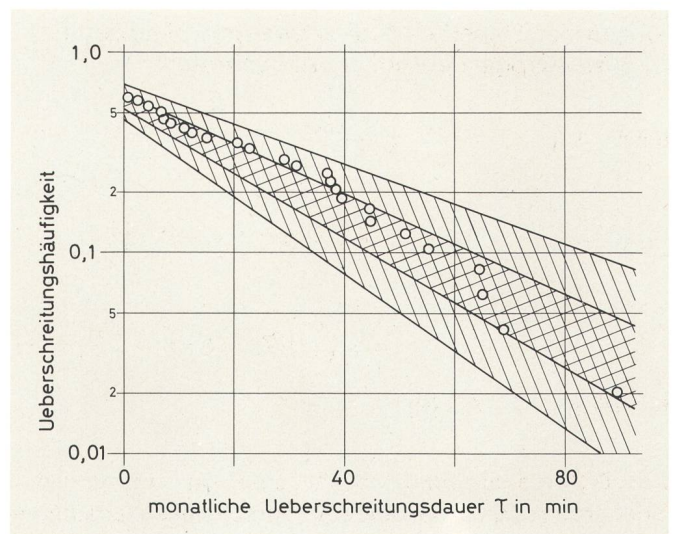


Fig. 6
Vertrauensbereiche von $P\{\tau\}$ nach vier Jahren

- ⊠ für Aussagesicherheit $W = 50\%$
- ▨ für Aussagesicherheit $W = 90\%$

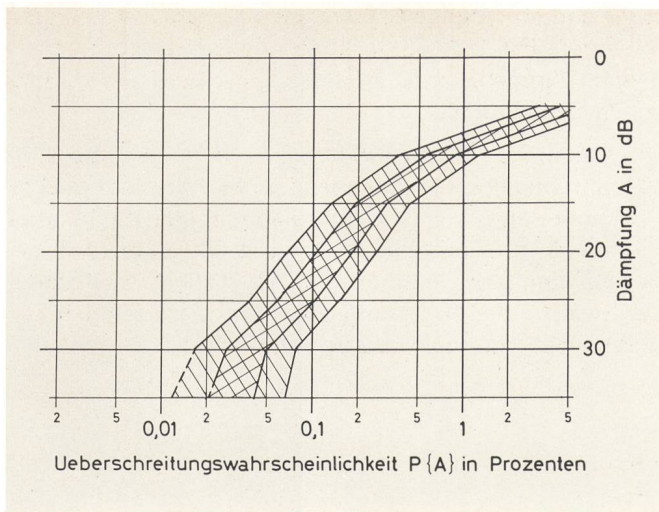


Fig. 7
Vertrauensbereiche der jährlichen Dämpfungsstatistik $P\{A\}$ aufgrund der Messungen des ersten Jahres

- Aussagesicherheit $W = 50\%$
- Aussagesicherheit $W = 90\%$

5 Planungsrisiko

Infolge unsicherer Annahmen ergeben sich Planungsrisiken. Es wird hier die mögliche Fehleinschätzung der Summenhäufigkeit $P\{A\}$ der zusätzlichen Ausbreitungsdämpfung A diskutiert. Für genauere Angaben der Variabilität über die Jahre sind Messungen von langer Dauer notwendig.

In Abschnitt 4 ist das Vertrauensintervall der Überschreitungszeit τ je Monat der Dämpfung $A = 25$ dB behandelt worden. Zur Abschätzung der Summenhäufigkeit $P\{A\}$ sind die angegebenen Rechenregeln für alle Dämpfungsstufen A anzuwenden. Bei Annahme einer Exponentialverteilung gemäss (9) erhält man für das Jahresmittel den Wert $(c \cdot b)$. In ähnlicher Weise lassen sich die Summenhäufigkeiten des «ungünstigsten Monats» abschätzen (vgl. [3]).

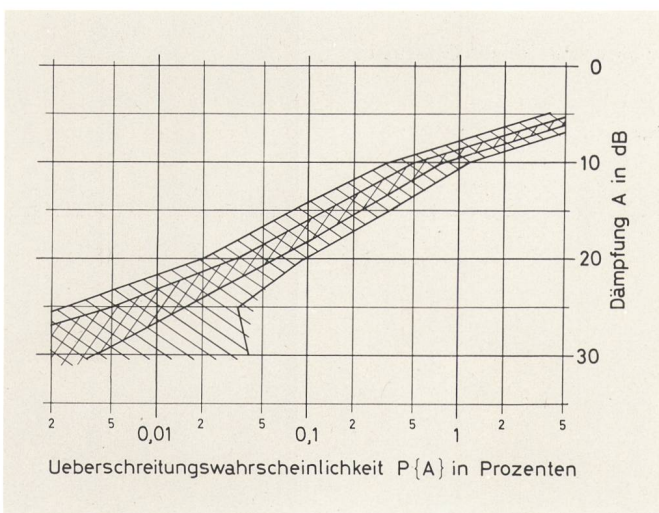


Fig. 8
Vertrauensbereich der jährlichen Dämpfungsstatistik $P\{A\}$ aufgrund der Messungen des zweiten Jahres

- Aussagesicherheit $W = 50\%$
- Aussagesicherheit $W = 90\%$

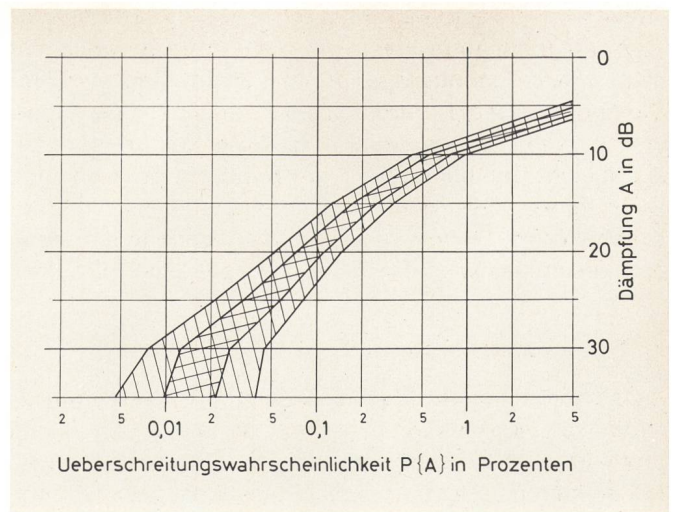


Fig. 9
Vertrauensbereiche der jährlichen Dämpfungsstatistik $P\{A\}$ aufgrund der Messungen der beiden ersten Jahre

- Aussagesicherheit $W = 50\%$
- Aussagesicherheit $W = 90\%$

Die Figuren 7 und 8 zeigen die aufgrund der Messungen des ersten und nur des zweiten Jahres ermittelten Summenhäufigkeiten $P\{A\}$ der Jahresmittel. Auf den Figuren 9 und 10 sind die sich nach zwei und nach vier Jahren ergebenden Vertrauensbereiche dargestellt. Bezüglich der Dämpfung A sind Unsicherheiten von 10 dB anzunehmen. Die Genauigkeit der Messung (\rightarrow beschreibende Statistik) ist aber um eine Grössenordnung besser. Zuverlässige Aussagen über Dämpfungen von 30 dB sind im schweizerischen Klima in der Regel erst nach drei Jahren möglich.

Je grösser die Aussagesicherheit W sein soll, desto grösser ist der entsprechende Vertrauensbereich, und um so ungünstigere Summenhäufigkeiten $P\{A\}$ sind zu berücksichtigen. Der Kosten wegen darf eine Planung aber nicht auf der denkbar ungünstigsten Dämpfungs-

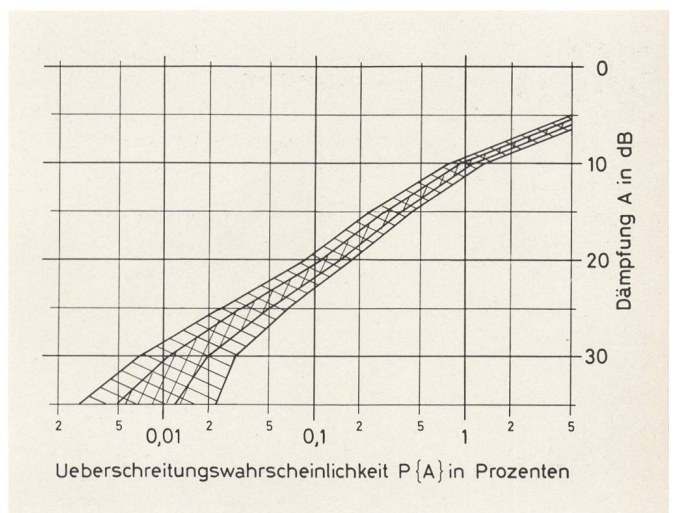


Fig. 10
Vertrauensbereiche der jährlichen Dämpfungsstatistik $P\{A\}$ aufgrund von vierjährigen Messungen

- Aussagesicherheit $W = 50\%$
- Aussagesicherheit $W = 90\%$

statistik $P\{A\}$ beruhen. Eine wichtige Aufgabe des Planers besteht nun darin, abzuschätzen, in welchem Masse das Planungsrisiko durch Verwendung stärkerer Sender, grösserer Antennen und ähnlichem verringert werden soll. Da dabei nicht bloss die Kosten, sondern auch nicht zahlenmässig beschreibbare Grössen eine Rolle spielen, lässt sich zur Lösung nicht eine mathematische Formel angeben. Die numerische Bestimmung des Vertrauensbereiches stellt hingegen eine Hilfe dar.

6 Schlussbemerkungen

Zur Abschätzung der Zuverlässigkeit von Ausbreitungsstatistiken wurden mögliche Formeln angegeben. Deren praktische Anwendung hat gezeigt, wie gross die Vertrauensbereiche gemessener Statistiken sein können. Die Beispiele zeigen auch, welche Aussagesicherheiten W vernünftigerweise einzusetzen sind.

Die gewählte Betrachtungsweise erscheint mindestens plausibel. So wie in bestimmten Klimagebieten in schöner Regelmässigkeit Jahr um Jahr dieselben meteorologischen Bedingungen auftreten, ist es auch vorstellbar, dass die Ausbreitungsverhältnisse in grösseren Perioden

stark ändern. Mangels ausreichender Unterlagen kann im letzten Fall jede statistische Abschätzung zu groben Fehlern führen. Hier liegt auch das Problem des statistischen Schliessens.

Die Variabilität der Ausbreitungsbedingungen von Jahr zu Jahr bedingt die Angabe des Vertrauensbereiches beobachteter Statistiken. Die angegebene Rechenmethode liefert quantitative Ergebnisse und ist deshalb bei der Planung brauchbar. Sie hilft aber auch zu entscheiden, welche der Verteilungsarten plausibel sein können und welche eher zu verwerfen sind.

Bibliographie

- [1] *Aitchison J.* und *Dunsmore I. R.* Statistical Prediction Analysis. Cambridge University Press (1975) S. 272.
- [2] *Brandt S.* Statistische Methoden der Datenanalyse. Mannheim, Bibliographisches Institut (1968) S. 267.
- [3] *Crane R. K.* und *Debrunner W. E.* Worst-month statistics. Electron. Letters, GB, 14 (1978) S. 267.
- [4] *Stegmüller W.* Jenseits von Popper und Carnap: Die logischen Grundlagen des statistischen Schliessens. Berlin, 1973.

Die nächste Nummer bringt unter anderem

Vous pourrez lire dans le prochain numéro

8/83

Steffen W. A. Messung der Übertragungsbandbreite von Glasfasern
Kotyrzka Dr. W.

Scheidegger A. Universaltelephone UT 760
Stähli K.