

# La théorie des jeux dans la littérature économique, politique et sociale : une perspective historique

Autor(en): **Haurie, Alain**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Colloquium Helveticum : cahiers suisses de littérature générale et comparée = Schweizer Hefte für allgemeine und vergleichende Literaturwissenschaft = quaderni svizzeri di letteratura generale e comparata**

Band (Jahr): - **(2012)**

Heft 43: **Die Literatur und ihr Spiel = La littérature et son jeu**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-1006307>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

*Alain Haurie*

## La théorie des jeux dans la littérature économique, politique et sociale

### Une perspective historique

La théorie des jeux propose un langage qui facilite la modélisation, l'analyse et la communication dans l'étude des conflits. La littérature en sciences économiques, sciences politiques, relations internationales, conduite des opérations militaires et même biologie (théorie de l'évolution) accumule l'usage de paradigmes basés sur la théorie mathématique des jeux « non coopératifs » ou « coopératifs ».

Dans ce bref essai, je retracerai les principales étapes du développement de cette littérature qui est, aujourd'hui, comme dans beaucoup de domaines scientifiques, largement diffusée en langue anglaise.<sup>1</sup>

### La Mishna mystérieuse

On peut retracer les premiers écrits pouvant être considérés comme des prémisses au développement d'une théorie des jeux dans certains des plus vieux écrits religieux.<sup>2</sup> En effet, un des plus surprenants résultats de la théorie moderne des jeux concerne l'élucidation d'un des mystères du Talmud de Babylone. Robert Aumann et Michael Mashler<sup>3</sup> ont pu montrer que la règle du « partage de la partie contestée » qui se retrouve dans plusieurs mishnas du Talmud correspondait

<sup>1</sup> Plusieurs revues scientifiques de haut niveau contribuent au développement et à la diffusion de la théorie des jeux ; citons, par exemple, *econometrica*, *Journal of Game Theory and Economic Behavior*, *International Journal of Game Theory*, *International Game Theory Review*, *Annals of the International Society of Dynamic Games*, etc.

<sup>2</sup> Barry O'Neill, « A problem of rights arbitration from the Talmud », *Mathematical Social Sciences*, 2, 1982, pp. 345–371.

<sup>3</sup> Robert J. Aumann et Michael Mashler, « Game Theoretic Analysis of a Bankruptcy Problem from the Talmud », *Journal of Economic Theory*, 36, 1985, pp. 195–213.

à un des critères de solution élaborés dans la théorie mathématique des jeux « coopératifs », avec coalition, appelé le « nucleolus ». La Mishna mystérieuse qui a suscité de nombreux commentaires des exégètes juifs du Moyen-Âge propose différentes manières de partager un héritage entre des héritiers ayant des réclamations différentes. La règle paraît changer avec le montant de l'héritage et elle a souvent été considérée comme incohérente par les exégètes. Les héritages sont évidemment source de conflit et la Mishna en cause propose différentes façons de partager un bien (estate) entre plusieurs personnes réclamant un montant qui leur est dû (claims). Le tableau suivant, qui est reproduit des articles d'Aumann et Mashler, indique le partage d'un avoir de 100, 200 ou 300 francs, entre trois réclameurs demandant, respectivement, 100, 200 et 300 francs. Si l'avoir est 100, la Mishna recommande de le partager en trois parts égales de  $33\frac{1}{3}$  francs chaque. Si l'avoir est 300, la Mishna recommande de le partager en trois parts de valeurs proportionnelles aux réclamations. Si l'avoir est 200, la Mishna recommande de donner 50 à celui qui réclame 100 et 75 à chacun des deux autres, même s'ils ont des réclamations de 200 et 300 respectivement.<sup>4</sup>

		CLAIM		
		100	200	300
ESTATE	100	33 1/3	33 1/3	33 1/3
	200	50	75	75
	300	50	100	150

Table 1: Division of the Estate in *Ketubot* 93a as per the Mishna

Aumann et Mashler ont étudié cette Mishna en s'inspirant des principes de la théorie moderne des jeux coopératifs. Ils ont pu tout d'abord établir un lien entre cette Mishna et une autre qui traite du partage d'un tissu entre deux fripiers. Le premier réclame 50% de la pièce, le second 100%. La Mishna donne 25% au premier, car réclamant 50% il a déjà reconnu que 50% appartiennent à l'autre.

<sup>4</sup> Les trois prochains tableaux, intitulés Table 1, Table 2 et Table 5 sont reproduits de la publication suivante, Robert J. Aumann, *Game Theory in the Talmud*, Research Bulletin Series on Jewish Law and Economics, June 2002 : <http://dept.econ.yorku.ca/~jros/docs/AumannGame.pdf>.

		CLAIM	
		50	100
GARMENT	100	25	75

Table 2: The Mishna in *Bava Metzia 2a*

Il s'agit là d'un « principe », appelé « partage de la part contestée » qui, comme on pourra le voir reste vérifié dans les recommandations de la Mishna mystérieuse. Aumann et Mashler ont ainsi découvert que le partage recommandé par la Mishna mystérieuse satisfaisait le principe du partage de la somme contestée pour chaque paire de joueurs. Ils ont aussi montré qu'il n'existait qu'une seule façon de partager que satisfasse ce principe. On voit ici poindre les prémices d'une théorie. Il y a un « principe » qui sous-tend les partages suggérés et, en appliquant ce principe, il y a une seule « solution » au problème du partage.

De fait, comme nous le verrons à la fin de cet essai, il se trouve que cette manière unique de partager correspond à un concept de solution dans la théorie moderne des jeux de coalition, appelé le « nucleolus ».5 Vérifions donc que le principe est respecté dans la Mishna mystérieuse.

		CLAIM				CLAIM				CLAIM	
		100	200			100	300			200	300
ESTATE	66 2/3	33 1/3	33 1/3	66 2/3	33 1/3	33 1/3	66 2/3	33 1/3	33 1/3		
	125	50	75		125	50		75	150	75	75
	150	50	100		200	50		150	250	100	150

Table 5: Some Examples of Equal Division of the Contested Sum

Considérons la paire constituée par les deux premiers héritiers, qui réclament 100 et 200, respectivement. Dans le cas où l'avoir est 100, la Mishna recommande de partager  $66^{2/3}$  entre ces deux héritiers. Chacun réclame plus que cette somme, qui est donc contestée en totalité. Elle est donc partagée également entre les deux héritiers, qui reçoivent  $33^{1/3}$  chacun. Quand l'avoir est 200, la Mishna recommande de donner 125 à ces deux héritiers. Le premier réclame 100, le second 200. La partie contestée est de 100, le premier héritier a concédé 25 à l'autre. On partage donc la partie contestée et on trouve bien, 50 au premier et 75 au second. Si l'avoir est 300, la Mishna recommande de donner 150 aux deux joueurs, le premier ne réclame que 100, la partie

5 Elon Kohlberg, *On the nucleolus of a characteristic function game*, SIAM Journal of Applied Mathematics, 20, 1971, pp. 62–66.

contestée est divisée en deux et le premier reçoit 50, pendant que le second reçoit 100. Les deux autres tableaux montrent que le principe est aussi respecté pour les autres paires d'héritiers.

Donc le principe du partage de la partie contestée est vérifié. Il est plus difficile d'établir que l'application de ce principe à un problème de partage conduit toujours à une solution unique. Les raisonnements de la théorie des jeux sont souvent subtils. La preuve que cette solution correspond aussi au concept de « nucleolus » proposé dans la théorie moderne des jeux est encore plus délicate. Il s'agit alors de mathématique, raisonnement logique irréfutable. La théorie des jeux est une branche des mathématiques.

### Pascal et le chevalier de Méré

Une autre version de ce problème de partage apparaît dans la littérature française du XVII<sup>e</sup> siècle, sous la plume du très catholique Blaise Pascal, dans sa célèbre et remarquable solution du problème des partis. Le problème posé par le chevalier de Méré est le suivant: « deux joueurs jouent à un jeu de hasard en plusieurs parties. Chacun a misé la moitié d'un enjeu total  $S$ , et le premier qui a gagné  $n$  parties obtient la somme totale  $S$ . Or, le roi venant à passer, le jeu doit être interrompu avant la victoire de l'un d'eux. Il faut alors faire le « parti », c'est-à-dire le partage de l'enjeu total. Comment le définir? »<sup>6</sup>

La solution proposée par Pascal contenait en germe les éléments caractéristiques de la théorie moderne des jeux dynamiques, avec intervention de la « nature » de manière aléatoire. Le problème posé est relié à un jeu de hasard. Il y a dans le problème des partis tous les ingrédients des jeux considérés dans la théorie moderne des jeux : des acteurs en interaction, des actions répétées dynamiquement, la recherche d'une solution équitable.

Les partages d'héritage et les dettes de jeu mènent souvent au conflit, voire aux guerres. Les jeux de société, échec, jeu de go, jeu de dame, poker, bridge-contrat sont des émulations de conflits, guerriers ou économiques. La spécification de règles du jeu précises devait attirer l'attention des mathématiciens, toujours intéressés à explorer les conséquences logiques de certaines règles ou axiomes.

<sup>6</sup> Blaise Pascal, *Œuvres Complètes*, ed. Jacques Chevalier, Gallimard, 1954.

## La théorie moderne des jeux

Il est convenu de dire que la théorie mathématique des jeux est fondée au début du XXe siècle par le mathématicien français Emile Borel,<sup>7</sup> le logicien allemand Ernst Zermelo et le génie mathématique hongrois John von Neumann qui prouvent les premiers « théorèmes » importants.

Zermelo s'intéresse aux jeux déterministes, c'est-à-dire où le hasard n'intervient pas sous la forme de lancers de dés ou de tirages de carte, avec des actions alternées des deux joueurs. On reconnaît ici la structure des jeux de dame, échecs, go, etc. Ces jeux sont aussi à information parfaite, car chaque joueur observe toutes les actions et s'en souvient. Le théorème de Zermelo (1913) établit que, dans un tel jeu, s'il est impossible d'arrêter le jeu sur un « match nul », alors un des deux joueurs doit avoir une stratégie gagnante. Il n'y a pas ainsi de « hasard de la guerre » dans le jeu d'échecs mais une assurance de gagner si on trouve la « bonne stratégie ». <sup>8</sup> Le raisonnement qui permet de prouver ce théorème est une récurrence, partant des situations de fin de jeu et remontant la séquence des « traits » <sup>9</sup> de deux joueurs. Cette manière de raisonner allait avoir des conséquences importantes dans la science du pilotage des systèmes, la cybernétique, selon le néologisme de Norbert Wiener.

En 1921, Emile Borel publie plusieurs théorèmes sur le « théorie des jeux ». <sup>10</sup> Il s'intéresse au jeu permettant le « bluff », comme le poker et, surtout, le bridge-contrat où l'art du bon joueur est d'anticiper la réaction de l'adversaire, dans une situation où l'information est imparfaite. Borel entrevoit que la théorie des jeux aura des applications importantes en économie et dans les opérations militaires. Malheureusement Emile Borel n'arrive pas à établir un théorème d'existence d'une façon optimale de jouer, qui étendrait le théorème de Zermelo à ces jeux à information imparfaite.

<sup>7</sup> Maurice Fréchet, « Émile Borel. Initiator of the Theory of Psychological Games and its Applications », *Econometrica*, 21, 1953, pp. 95–96 et 118–125.

<sup>8</sup> Ernst Zermelo, « Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels », *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians*, éd. par Ernest W. Hobson et Augustus E. H. Love, Cambridge, Cambridge University Press, 1913, vol. II, pp. 501–504.

<sup>9</sup> Dans le langage des jeux, le joueur qui « a le trait » est celui qui doit annoncer son choix d'action.

<sup>10</sup> Emile Borel, « La théorie des jeux et les équations à noyau symétrique gauche », *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, vol. CLXXIII, 1921, pp. 1304–1308.



C'est John von Neumann, en 1928, qui prouve le premier grand théorème, en établissant l'existence de stratégies optimales, dites de « point de selle » dans tout jeu à somme nulle (ce que gagne un joueur, l'autre le perd). Ces stratégies sont aléatoires (distribution de probabilité sur les actions possible et tirage aléatoire de l'action entreprise).<sup>11</sup> Von Neumann s'inspira du poker et du concept de « bluff » qui permet de laisser l'adversaire dans l'incertitude sur l'action que l'on va entreprendre.<sup>12</sup> Pour formaliser sa théorie, von Neumann a donc dû proposer une théorie (axiomatique) des décisions dans l'incertain.<sup>13</sup> Conscient de l'impact potentiel de sa théorie sur le développement des sciences économiques, il publia en 1944, avec Oscar Morgenstern, un ouvrage d'une importance considérable, *Theory of Games and Economic Behavior*,<sup>14</sup> posant les fondements de la théorie moderne des jeux et de la théorie de la décision dans l'incertain. Mais, pour pouvoir s'appliquer pleinement à l'économie et aux sciences politiques, la théorie des jeux devait s'attaquer aux situations de concurrence qui ne correspondent pas à des jeux à somme nulle.

John Nash, exploitant un des résultats les plus récents de la topologie, le théorème de point fixe de Kakutani, prouva en 1950 que tout jeu « bimatriciel » admet au moins un équilibre dans la classe des stratégies mixtes; ce résultat s'étend immédiatement au cas de plus de deux joueurs.<sup>15</sup> Dans un équilibre, chaque joueur répond de manière optimale au choix stratégique des autres joueurs. On comprend rapidement l'importance du concept quand on réalise qu'il n'est pas pos-

<sup>11</sup> John von Neumann, « Zur Theorie der Gesellschaftsspiele », *Mathematische Annalen*, 100, 1928, pp. 295–320; John von Neumann, « On the theory of game of strategy », *Contributions to the theory of games*, éd. par Albert W. Tucker et Robert D. Luce, Princeton, Princeton University Press, 1959, vol. IV, pp. 13–45.

<sup>12</sup> On prétend que le personnage de Dr. Strangelove dans le film de Stanley Kubrick, sur sa chaise roulante et racontant comment il avait conçu l'automate ultime permettant d'éviter toutes les guerres nucléaires, est directement inspiré de John von Neumann, lui aussi réduit à une mobilité assistée à la fin de sa vie. Ce film est entièrement basé sur l'analyse de l'équilibre de la terreur nucléaire et des propriétés liées à l'information dont disposent les joueurs.

<sup>13</sup> John von Neumann, « Communication on the Borel's notes », *Econometrica*, 21, 1953, pp. 124–125.

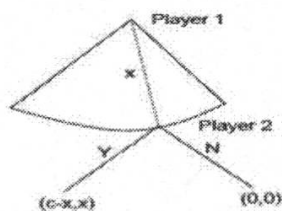
<sup>14</sup> John von Neumann et Oskar Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton, Princeton University Press, 1944.

<sup>15</sup> John F. Nash, « Equilibrium points in  $n$ -person games », *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 36, 1950, pp. 48–49.

sible de recommander à des joueurs de jouer autre chose que des stratégies formant un équilibre. En effet, une telle recommandation se contredirait immédiatement puisqu'au moins un joueur aurait une incitation à modifier sa stratégie pour améliorer son gain. On découvre rapidement le lien entre l'équilibre de Nash, quand il y avait un petit nombre de joueurs, comme dans le cas d'un oligopole, et les équilibres concurrentiels dans les marchés où il y a une infinité d'agents infinitésimaux. La théorie des jeux pénétra ainsi les sciences économiques et sociales de toute part et fournit un paradigme central pour l'analyse de toutes sortes de phénomènes socio-économiques, incluant l'analyse des marchés noirs (drogue, armes, émigrants illégaux) ou l'étude des négociations sur le climat. Notons que la solution d'équilibre dans un oligopole avait déjà été obtenue et démontrée par Augustin Cournot en 1828!<sup>16</sup>

### Exemple : équilibre dans un jeu d'ultimatum

Analysons quelques équilibres intéressants, apparaissant dans des jeux de partage. Le premier jeu est appelé « jeu de l'ultimatum ». Deux joueurs J1 et J2 doivent se partager  $c$  francs. J1 joue le premier et propose une somme  $x$  comprise entre 0 et  $c$  à J2. J2 joue en second et accepte ou refuse l'offre de J1.



Deux joueurs doivent se partager  $c$  frs.

J1 fait une offre  $x$  entre 0 et  $c$ .

J2 accepte (résultat  $(c-x, x)$ ) ou refuse (résultat  $(0,0)$ ).

- Action optimale de J2: Si  $x > 0$  accepter; si  $x = 0$  indifférent entre accepter et refuser
- Action optimale de J1: Proposer  $x = 0$
- Equilibre unique: J1 propose  $x = 0$ ; J2 accepte tout.

<sup>16</sup> Antoine Cournot, *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*, Paris, Hachette, 1838 ; rééd. Paris, Calmann-Lévy, 1974.



Ici, le joueur 1 ramasse tout.<sup>17</sup> En effet, dans un équilibre de Nash, l'action de chaque joueur doit être la meilleure réponse à l'action de l'adversaire. On remarquera que la solution proposée ici satisfait bien ces conditions d'équilibre. De plus, on peut vérifier qu'il n'existe pas d'autre équilibre possible.

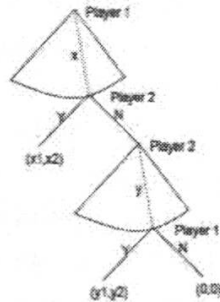
### Jeu d'ultimatum alterné

Considérons maintenant le cas où le jeu est alterné, c'est-à-dire que le joueur 1 propose une somme au joueur 2 qui accepte ou refuse, puis, le joueur 2 propose une somme au joueur 1 qui accepte ou refuse. Ici, le joueur 2 qui est le dernier qui fait une offre ramasse tout, dans la solution d'équilibre. Le raisonnement est séquentiel. On commence par résoudre le « sous-jeu » qui démarre en stage 2, quand le joueur 2 fait une offre au joueur 1. Nous avons déjà résolu ce jeu et trouvé que la seule solution d'équilibre était d'offrir 0 et de gagner 1 pour le joueur 1. Il est facile de voir qu'en stage 1, le joueur 2 refusera toute offre du joueur 1, pour pouvoir passer au stage 2 et gagner 1.

Cette manière de raisonner, en séquence, a été appelée « programmation dynamique » par Richard Bellman,<sup>18</sup> elle est déjà implicite dans la solution du problème des partis de Blaise Pascal.

<sup>17</sup> Le diagramme ci-dessus, ainsi que les 3 suivants, sont inspirés des notes de cours du Prof. Asu Ozdaglar, *Game theory with Engineering Applications*, MIT 2010: <http://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-254-game-theory-with-engineering-applications-spring-2010/>.

<sup>18</sup> Mathématicien américain ayant apporté une contribution importante au développement de la cybernétique et de l'automatique théorique. Richard Bellman, *Dynamic Programming*, Princeton, Princeton University Press, 1957.



Deux joueurs doivent se partager  $c=1$  frs.

$x = (x_1, x_2)$  avec  $x_1+x_2=1$  est l'allocation dans le stage 1.

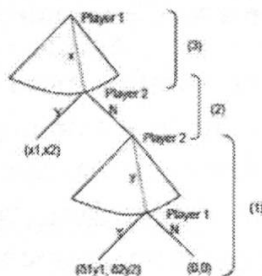
$y = (y_1, y_2)$  avec  $y_1+y_2=1$  est l'allocation dans le stage 2.

- Au second stage on a un jeu d'ultimatum où J2 fait l'offre. Donc il gagne tout et on a  $y = (1, 0)$ .
- Au premier stage J1 propose n'importe quoi et J2 refuse tout.

### Jeu alterné avec actualisation

Intéressons nous maintenant à ce jeu d'ultimatum alterné, mais en y introduisant une actualisation des gains pour les joueurs. Pour le joueur J1, 1 franc gagné en stage 2 a une valeur actuelle de  $\delta_1$  francs ( $\delta_1 < 1$ ) en stage 1. Pour le joueur J2, 1 franc gagné en stage 2 a une valeur actuelle de  $\delta_2$  francs ( $\delta_2 < 1$ ) en stage 1.

Du fait de la valeur du temps, représentée par l'actualisation, il y a un montant qu'il est optimal d'offrir en stage 1 par J1 et d'accepter par J2. On observe ainsi l'effet de l'actualisation des gains qui entraîne qu'il y a une première offre par J1 qui est acceptée par J2, à l'équilibre.



Deux joueurs doivent se partager  $c=1$  frs.

$x = (x_1, x_2)$  avec  $x_1+x_2=1$  est l'allocation dans le stage 1.

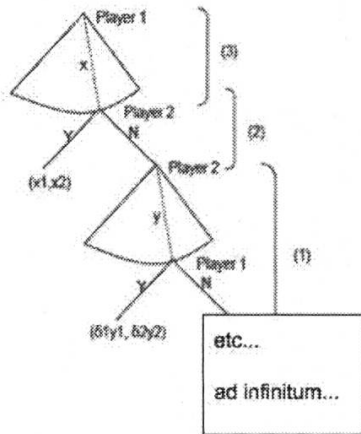
$y = (y_1, y_2)$  avec  $y_1+y_2=1$  est l'allocation dans le stage 2.

J1 actualise au coeff  $\delta_1$

J2 actualise au coeff  $\delta_2$

- En (1) jeu d'ultimatum, J2 offre (0, 1) et J1 accepte. Le résultat est (0,  $\delta_2$ ).
  - En (2) J2 accepte si  $x_2 \geq \delta_2$  et refuse si  $x_2 < \delta_2$ .
  - En (3) la stratégie optimale de J1 est  $x_1 = 1 - \delta_2$ ,  $x_2 = \delta_2$
- Le résultat du jeu est  $(1 - \delta_2, \delta_2)$  qui est accepté dès le premier stage

## Jeu alterné répété indéfiniment



$$x_1^* = \frac{1 - \delta_2}{1 - \delta_1 \delta_2}, \quad x_2^* = \frac{\delta_2 (1 - \delta_1)}{1 - \delta_1 \delta_2},$$

$$y_1^* = \frac{1 - \delta_1}{1 - \delta_1 \delta_2}, \quad y_2^* = \frac{\delta_1 (1 - \delta_2)}{1 - \delta_1 \delta_2}.$$

- J1 propose  $x^*$  et accepte  $y$  si  $y_1 \geq y_1^*$
- J2 propose  $y^*$  et accepte  $x$  si  $x_2 \geq x_2^*$

*Le résultat du jeu est  $(x_1^*, x_2^*)$  qui est obtenu dès la première offre.*

Finalement, considérons le cas où le jeu alterné, avec actualisation est joué sur un horizon infini, c'est-à-dire qu'il sera répété un nombre infini de fois. Évidemment, ceci est une abstraction, mais elle est bien utile pour représenter le fait que, souvent, dans la vie économique, il n'y a pas de date évidente d'arrêt des transactions. Rubinstein<sup>19</sup> a établi que la solution d'équilibre unique du jeu de négociation infini, avec actualisation était celle indiquée sur la figure ci-dessous. La preuve que cette solution correspond au seul équilibre de ce jeu est relativement difficile et requiert des développements mathématiques subtils. Elle exploite le fait que le jeu de négociation peut se continuer éternellement et qu'il n'y a pas de dernier stage où le premier joueur qui joue en alternance n'offrirait rien au second.

## Jeux coopératifs ou de coalitions

Les équilibres de Nash sont des concepts de solution pour des jeux non coopératifs. Les jeux d'ultimatum, ainsi que le jeu de négociation de Rubinstein sont des solutions à des problèmes de partage qui sont formulés comme des jeux non coopératifs. Cependant, la Mishna mystérieuse ne se formule pas comme un jeu non coopératif, mais plutôt comme un jeu coopératif, dit jeu de coalitions.

<sup>19</sup> Ariel Rubinstein, « Perfect equilibrium in a bargaining model », *Econometrica*, 50, 1982, pp. 97–109.

Les économistes et les politologues se sont intéressés à la formation des coalitions et à la force qu'elles peuvent avoir pour obtenir des avantages de cette collaboration (dividendes de la coopération). C'est le domaine de la théorie des jeux coopératifs développés par Edgeworth dès le XIXe siècle, et surtout formalisés par Morgenstern et von Neumann dans leur ouvrage de 1944,<sup>20</sup> puis Lloyd Shapley,<sup>21</sup> Olga Bondareva et Michael Mashler et al.,<sup>22</sup> ainsi que des centaines d'autres mathématiciens, économistes, philosophes, politologues, etc.

### Fonction caractéristique

Les jeux de coalition sont basés sur la définition d'une fonction caractéristique qui mesure la force de la coalition. Pour formaliser les jeux de coalition, on utilise une fonction caractéristique qui définit la « fortune » que cette coalition peut se garantir. La figure ci-dessus résume les propriétés que cette fonction caractéristique doit avoir pour décrire un jeu de coalition.

$N$  est la **grande coalition**. Pour tout sous-ensemble  $S \subset N$ , appelé **coalition**  $S$ ,

- $v(S) \in \mathbb{R}$
- $v(\emptyset) = 0$ ;
- $\forall S, T \subset N$ , tel que  $S \subset T$ ,  $v(S) \leq v(T)$ : **Monotonie**;
- $\forall S, T \subset N$ , tel que  $S \cap T = \emptyset$ ,  $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ : **Superadditivité**.

**alpha-garantie:**  $v(S)$  est le  $\max(S)\min(N \setminus S)$  de la somme des gains des joueurs de la coalition  $S$  ;

**beta-garantie:**  $v(S)$  est le  $\min(N \setminus S)\max(S)$  de la somme des gains des joueurs de la coalition  $S$  .

<sup>20</sup> Ariel Rubinstein, *op. cit.*

<sup>21</sup> Lloyd S. Shapley, « A value for  $n$ -person games », *Contributions to the Theory of Games II*, éd. par Harold Kuhn et Albert W. Tucker, Princeton, Princeton University Press, 1953, pp. 307–317.

<sup>22</sup> Michael Mashler, Bezalel Peleg et Lloyd S. Shapley, « The kernel and bargaining set for convex games », *International Journal of Game Theory* 1, 1972, pp. 73–93; Michael Mashler, Bezalel Peleg et Lloyd S. Shapley, « Geometric properties of the kernel, nucleolus, and related solution concepts », *Mathematics of Operations Research*, 4, 1979, pp. 303–338.

## Ensemble stable

Les premiers concepts d'optimalité, proposés par Morgenstern et von Neumann se basaient sur le concept de stabilité des ensembles d'imputation. Une imputation est un paiement effectué à chacun des joueurs. Cependant en formant des coalitions les joueurs peuvent « bloquer » une imputation en montrant que cette coalition leur permet d'avoir plus. La figure ci-après donne la définition précise de ce que l'on appelle un ensemble stable d'imputations.

L'imputation  $x$  domine  $y$  si pour une coalition  $S \neq \emptyset$  on a

$$\forall i \in S \quad x_i > y_i \text{ et } \sum_{i \in S} x_i \leq v(S).$$

Les joueurs de la coalition  $S$  peuvent menacer de quitter la grande coalition si  $y$  est l'imputation qu'elle propose.

Un ensemble stable est un ensemble  $X$  d'imputations tel que

- Aucune imputation de  $X$  n'est dominée par une autre imputation de  $X$ ;
- Toutes les imputations hors de  $X$  sont dominées par au moins une imputation dans  $X$ .

## Coeur du jeu

D'autres solutions ont été proposées, chacune correspondant à des notions d'équité différentes. Le cœur du jeu est l'ensemble des imputations qui sont efficaces et qu'aucune coalition ne peut bloquer.

$$C(v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i \in N} x_i = v(N) \text{ et } \forall S \subset N \quad \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \right\}$$

## Nucleolus

Dans la figure suivante, nous trouvons une copie de la définition du concept de solution coopérative, appelé nucleolus, telle qu'on peut la trouver sur Wikipedia qui est une excellente source d'information sur les concepts mathématiques.

[http://en.wikipedia.org/wiki/Cooperative\\_game#The\\_nucleolus](http://en.wikipedia.org/wiki/Cooperative_game#The_nucleolus)

WIKIPEDIA

### The nucleolus

[edit]

Let  $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$  be a game, and let  $x \in \mathbb{R}^N$  be a payoff vector. The excess of  $x$  for a coalition  $S \subseteq N$  is the quantity  $v(S) - \sum_{i \in S} x_i$ ; that is, the gain that players in coalition  $S$  can obtain if they withdraw from the grand coalition  $N$  under payoff  $x$  and instead take the payoff  $v(S)$ .

Now let  $\theta(x) \in \mathbb{R}^{2^N}$  be the vector of excesses of  $x$ , arranged in non-increasing order, in other words,  $\theta_i(x) \geq \theta_j(x), \forall i < j$ . Notice that  $x$  is in the core of  $v$  if and only if it is a pre-imputation and  $\theta_1(x) \leq 0$ . To define the nucleolus, we consider the lexicographic ordering of vectors in  $\mathbb{R}^{2^N}$ : For two payoff vectors  $x, y$ , we say  $\theta(x)$  is lexicographically smaller than  $\theta(y)$  if for some index  $k$ , we have  $\theta_i(x) = \theta_i(y), \forall i < k$  and  $\theta_k(x) < \theta_k(y)$ . (The ordering is called lexicographic because it mimics alphabetical ordering used to arrange words in a dictionary.) The nucleolus of  $v$  is the lexicographically minimal imputation, based on this ordering. This solution concept was first introduced in (Schmeidler 1969).

Although the definition of the nucleolus seems abstract, (Maschler, Peleg & Shapley 1979) gave a more intuitive description: Starting with the least-core, record the coalitions for which the right-hand side of the inequality in the definition of  $C_\epsilon(v)$  cannot be further reduced without making the set empty. Continue decreasing the right-hand side for the remaining coalitions, until it cannot be reduced without making the set empty. Record the new set of coalitions for which the inequalities hold at equality, continue decreasing the right-hand side of remaining coalitions and repeat this process as many times as necessary until all coalitions have been recorded. The resulting payoff vector is the nucleolus.

Le nucleolus est un concept de solution, pour un jeu de coalition qui a la propriété d'être un élément du cœur du jeu quand il existe. La définition, donnée ci-dessus, à partir de Wikipedia, est assez difficile à comprendre pour un non mathématicien. Cette solution correspond à une définition axiomatique d'un partage équitable.

Revenons maintenant au problème posé par la Mishna mystérieuse. On peut transformer le problème de partage en un jeu de coalition. Robert Aumann et Michael Mashler proposent de retenir comme fonction caractéristique la valeur de ce que chaque coalition peut récupérer de l'héritage, en acceptant les réclamations des autres joueurs. Ils établissent alors le résultat suivant : *Dans tout problème de partage d'un avoir, l'allocation unique qui est compatible avec la règle dite « du partage de la partie contestée », est aussi le nucleolus du jeu de coalition associé, comme indiqué ci-dessus.*

En guise de conclusion

La théorie mathématique des jeux est un domaine relativement ardu des mathématiques appliquées. Une énorme littérature y est dévolue. Un chercheur en science économique ou en finance ne peut actuellement ignorer ce corpus de connaissances abstraites.

Nous avons vu les prémisses de cette théorie apparaître dans la littérature sacrée judaïque. Mais en littérature moderne aussi la théorie des jeux a eu son influence, se retrouvant par exemple au cœur des



activités de « l'Ouvroir de littérature potentielle », sous l'égide de Claude Berge et Georges Perec.<sup>23</sup> Le jeu a consisté alors à écrire un roman de 290 pages sans utiliser la lettre « e », le héros étant « Anton Voyll ». La littérature devient contrainte et définit les règles du jeu. Toujours à l'OuLiPo Claude Berge<sup>24</sup> propose un roman policier où l'assassin peut être identifié par l'application d'un théorème de la théorie mathématique des graphes, fondant ainsi OuliPoPo (ouvroir de littérature policière potentielle).

Mais c'est évidemment dans la littérature économique, politique et sociale que la théorie des jeux s'est surtout répandue, comme un outil de dialogue rationnel sur la concurrence, les conflits et la négociation entre groupes sociaux. Il est intéressant, à ce propos d'observer les références à la théorie des jeux dans l'actuel débat politico-économique concernant l'établissement d'une politique d'atténuation du changement climatique d'origine anthropique.

<sup>23</sup> Georges Pérec, *La disparition*, Paris, Denoël, 1969.

<sup>24</sup> Mathématicien français qui a contribué au développement de la théorie des jeux et de la théorie des graphes.

## Abstract

Im 17. Jahrhundert initiierten Blaise Pascal und der französische Glücksspieler Chevalier de Méré in ihrem Briefwechsel unverhofft eine wissenschaftliche Auseinandersetzung mit der Theorie des Spiels, welche bis heute andauert. Ihre Diskussion drehte sich unter anderem um die korrekte Verteilung eines Spieleinsatzes unter den Spielern, falls die Partie beispielsweise durch das plötzliche Eintreffen des Königs unterbrochen werden sollte. Auf dieser Basis entwickelte sich die moderne Spieltheorie als wissenschaftliche Reflexion über Entscheidungen, die unter unsicheren Umständen gefällt werden. Emile Borel, ein bekannter Mathematiker und passionierter Bridge-Spieler, entwarf zu Beginn des 20. Jahrhunderts eine mathematische Spieltheorie, welche John von Neumann, Oscar Morgenstern, John Nash und viele andere aufgriffen und weiterdachten. Der vorliegende Beitrag bietet anhand exemplarischer spieltheoretischer Problemstellungen einen kurzen diachronischen Forschungsüberblick und sucht so, die aktuelle wissenschaftliche Verwendung des Spielbegriffs zu erhellen.