

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Band:** 1 (1929)

**Artikel:** Les épreuves répétées et les formules approchées de Laplace et de Charlier.  
**Autor:** Mirimanoff, D.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-1136>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 17.11.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Les épreuves répétées et les formules approchées de Laplace et de Charlier

Par D. MIRIMANOFF, Genève

## Introduction

Pour calculer la probabilité d'un écart dans une série d'épreuves vérifiant les conditions de Jacques Bernoulli, on se sert le plus souvent de formules approchées, dont les plus importantes sont d'une part celles de Laplace et d'Edgeworth et d'autre part celles de Charlier.

Si  $s$  est le nombre des épreuves,  $p$  la probabilité constante de l'événement attendu,  $q$  celle de l'événement contraire, la valeur exacte de la probabilité d'un écart égal à  $l$ , ou ce qui revient au même, d'un nombre de réalisations  $x = sp + l$ , est

$$(1) \quad T_l = T(x) = \frac{s!}{(sp+l)!(sq-l)!} p^{sp+l} q^{sq-l} = \frac{s!}{x!(s-x)!} p^x q^{s-x}.$$

Je rappelle qu'on obtient les expressions approchées de  $T_l$  données par Laplace en transformant (1) à l'aide de la formule de Stirling.

Posons  $\sigma = \sqrt{spq}$ ,  $t = \frac{l}{\sigma\sqrt{2}}$ ,  $u(s) = \frac{1}{12s} - \frac{B_2}{3 \cdot 4} \frac{1}{s^3} + \dots$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{B_n}{(2n-1)2n} \frac{1}{s^{2n-1}} + (-1)^n \theta \frac{B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)} \frac{1}{s^{2n+1}},$$

$B_2, \dots, B_n, B_{n+1}$ , étant les nombres de Bernoulli et  $\theta$  un nombre positif inférieur à 1. On trouve <sup>1)</sup>

$$(2) \quad T_l = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-t^2} + H(t) + G(t)$$

où

---

<sup>1)</sup> Comptes rendus, 185, 1927, p. 827.

$$F(t) = \frac{p\sqrt{2}}{\sigma} \int_0^t \frac{\frac{1}{2} - 2ptz + 2pz^2}{1 - \frac{p\sqrt{2}}{\sigma}z} dz - \frac{q\sqrt{2}}{\sigma} \int_0^t \frac{\frac{1}{2} - 2qtz + 2qz^2}{1 + \frac{q\sqrt{2}}{\sigma}z} dz$$

et

$$G(t) = u(s) - u(sp + l) - u(sq - l).$$

Il vient alors, en développant  $F(t)$  et  $G(t)$  suivant les puissances croissantes de  $\frac{1}{\sigma}$

$$(3) \quad T_i = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-t^2} + \frac{\pi_1(t)}{\sigma} + \frac{\pi_2(t)}{\sigma^2} + \dots + \frac{\pi_n(t)}{\sigma^n} + \frac{\varepsilon_n}{\sigma^{n+1}},$$

$\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$  étant des polynômes en  $t$  et  $\frac{\varepsilon_n}{\sigma^{n+1}}$  le reste, dont une valeur approchée est fournie par la formule de Stirling.

On en tire <sup>2)</sup>

$$(4) \quad T_i = \frac{e^{-t^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left( 1 + \frac{P_1(t)}{\sigma} + \frac{P_2(t)}{\sigma^2} + \dots + \frac{P_n(t)}{\sigma^n} + \frac{E_n}{\sigma^{n+1}} \right),$$

$P_1(t), P_2(t), \dots, P_n(t)$  étant de nouveaux polynômes en  $t$ , qu'on peut calculer de proche en proche à l'aide de la relation

$$(5) \quad i P_i = \pi_1 P_{i-1} + 2 \pi_2 P_{i-2} + \dots + i \pi_i P_0,$$

où  $P_0 = 1$ . Quant à  $E_n$ , ce sont encore les propriétés classiques de la formule de Stirling qui permettent d'en calculer une valeur approchée.

Voici comment s'expriment les trois premiers polynômes  $P_1, P_2, P_3$ :

---

<sup>2)</sup> Comptes rendus, 186, 1928, p. 1687.

$$\begin{aligned}
P_1(t) &= \sqrt{2} (q - p) \left( \frac{t^3}{3} - \frac{t}{2} \right), \\
(6) \quad P_2(t) &= \frac{1-4pq}{9} t^6 - \frac{2-7pq}{3} t^4 + \left( \frac{3}{4} - 2pq \right) t^2 - \frac{1-pq}{12}, \\
P_3(t) &= \frac{\sqrt{2}(q-p)}{3} \\
&\times \left( \frac{1-4pq}{27} t^9 - \frac{3-10pq}{6} t^7 + \frac{37-94pq}{20} t^5 - \frac{47-74pq}{24} t^3 + \frac{3-pq}{8} t \right)
\end{aligned}$$

C'est la formule (4) qui fournit les expressions approchées de Laplace et d'Edgeworth. En n'en conservant que le premier terme, on obtient la formule symétrique de Laplace

$$T_l = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-t^2}.$$

Si l'on en conserve deux, on obtient la formule asymétrique de Laplace

$$T_l = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-t^2} \left\{ 1 + \frac{\sqrt{2}(q-p)}{\sigma} \left( \frac{t^3}{3} - \frac{t}{2} \right) \right\}.$$

Une troisième approximation, donnée par Edgeworth en 1911<sup>3)</sup>, s'obtient en conservant les trois premiers termes de (4).

De nouvelles formules approchées se déduisent de (4) en prenant un nombre de termes  $n$  supérieur à 3, mais il ne faut pas croire que le degré d'approximation augmente constamment avec  $n$ , car la série

$$\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-t^2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{P_i(t)}{\sigma^i},$$

que j'appellerai la série ou le développement de Laplace, est divergente et il ne serait pas facile de donner une règle permettant de déterminer l'indice du terme auquel correspond l'erreur la plus petite en valeur absolue.

<sup>3)</sup> C. h. Jordan. Statistique mathématique, p. 96—97.

Dans une note récente<sup>4)</sup> M. R. Dovaz et moi avons indiqué une formule permettant d'évaluer, sous des hypothèses assez larges, l'erreur commise en appliquant au calcul de  $T_l$  la formule asymptotique de Laplace (2<sup>o</sup> approximation). Une solution du problème analogue relatif à la 3<sup>o</sup> approximation, dans le cas particulier de  $p = q$ , a été donnée dans une note antérieure<sup>5)</sup>.

Je tiens à ajouter que les formules indiquées restent encore vraies, si au lieu de la fonction  $T_l = T(x)$ , qui n'est définie que pour les valeurs entières de  $x = sp + l$  comprises au sens large entre  $o$  et  $s$ , on envisage la fonction

$$(7) \quad y_l = y(x) = \frac{s!}{\Gamma(sp + l + 1) \Gamma(sq - l + 1)} p^{sp+l} q^{sq-l} \\ = \frac{s!}{\Gamma(x + 1) \Gamma(s - x + 1)} p^x q^{s-x}$$

définie pour tout  $x$  et tout  $l$ .

Passons maintenant aux formules approchées qu'on obtient par la méthode de Charlier. Indiquée par M. Charlier pour la première fois, si je ne me trompe, en 1909<sup>6)</sup>, cette méthode a été développée par M. S. D. Wicksell en 1923<sup>7)</sup>.

Envisageons la fonction

$$(8) \quad Y = Y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta(\omega) e^{-ix\omega} d\omega$$

formée à partir de la fonction caractéristique au sens de M. P. Lévy

$$\theta(\omega) = (q + p e^{i\omega})^s.$$

Pour les valeurs entières de  $x$ , positives, nulle et négatives, la fonction  $Y(x)$  coïncide avec la fonction  $y(x)$  de (7), elle se réduit en particulier à  $T(x)$  pour les valeurs entières de  $x$  comprises entre

<sup>4)</sup> Comptes rendus, 185, 1927, p. 817.

<sup>5)</sup> Comptes rendus, 182, 1926, p. 1119.

<sup>6)</sup> Arkiv for Matematik, Astronomi och Fysik, t. 5, No. 15 (1909), p. 1—22.

<sup>7)</sup> Ibid., t. 17, No. 19 (1923), p. 1—46.

$\sigma$  et  $s$ . Or la fonction  $Y$  peut être représentée par une série de la forme

$$(9) \quad Y = \Omega(x) + A_3 \frac{d^3 \Omega(x)}{dx^3} + A_4 \frac{d^4 \Omega(x)}{dx^4} + \dots,$$

où

$$(10) \quad \Omega(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-(x-sp)i\omega - \frac{\sigma^2 \omega^2}{2}} d\omega,$$

les coefficients  $A_i$  s'expriment à l'aide des moments et par conséquent à l'aide de  $p$ ,  $q$  et  $s$ . En particulier

$$A_3 = -\frac{(q-p)\sigma^2}{3!}, \quad A_4 = \frac{(1-6qp)\sigma^2}{4!}.$$

La série (9), que j'appellerai première série de Charlier, est convergente; en l'arrêtant à l'un de ses premiers termes on aura des expressions approchées de  $Y$ . Mais ces expressions se prêtent difficilement au calcul.

Supposons maintenant que l'intervalle d'intégration  $(-\pi, \pi)$  dans (10) soit remplacé par  $(-\infty, \infty)$ . On peut montrer<sup>8)</sup> que la fonction  $\Omega(x)$  se transforme en

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-sp)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-t^2}$$

et ses dérivées  $\frac{d^i \Omega(x)}{dx^i}$  en  $\frac{e^{-t^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{H_i(t)}{(\sigma\sqrt{2})^i}$ ,

en désignant par  $H_i(t)$  les polynômes d'Hermite définis par la relation

$$H_i(t) = e^{t^2} \frac{d^i}{dt^i} (e^{-t^2}).$$

<sup>8)</sup> Cf. H. L. Rietz, *Mathematical Statistics*, 1927, p. 156—161.

Si donc on remplace dans (9) la fonction  $\mathcal{Q}(x)$  par  $\Phi(x)$ , la série s'écrira

$$(11) \quad \frac{e^{-t^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left( 1 + \frac{A_3}{(\sigma\sqrt{2})^3} H_3(t) + \frac{A_4}{(\sigma\sqrt{2})^4} H_4(t) + \dots \right).$$

Elle est divergente, mais on peut montrer que ses termes tendent vers les termes correspondants de la série (9), lorsque  $\sigma$  augmente indéfiniment. Il en résulte qu'on obtient encore des expressions approchées de  $Y$  en arrêtant la série (11) à l'un de ses premiers termes. Si l'on se borne au premier terme, on retrouve la formule symétrique de Laplace; en arrêtant la série au terme en  $H_3(t)$ , on retrouve la formule asymétrique de Laplace; mais les termes suivants fournissent des formules nouvelles que j'appellerai les formules approchées de Charlier. La troisième approximation de Charlier s'écrit p. ex.

$$(12) \quad Y = \frac{e^{-t^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left( 1 + \frac{A_3}{(\sigma\sqrt{2})^3} H_3(t) + \frac{A_4}{(\sigma\sqrt{2})^4} H_4(t) \right).$$

Elle diffère de celle d'Edgeworth par le terme<sup>9)</sup>

$$\frac{e^{-t^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{1 - 4pq}{576} \frac{H_6(t)}{\sigma^2}.$$

Et la divergence s'accroît quand on prend un nombre plus grand de termes de (4) et (11).

Malgré cela, il existe un lien étroit entre les formules approchées de Laplace et celles de Charlier ou plutôt entre la série de Laplace et la série (11), que j'appellerai la seconde série de Charlier.

Je chercherai à mettre ce lien en évidence.

Quelle est la structure des polynômes  $P_i(t)$ ?

Une méthode asymptotique, dont le principe a été indiqué dans deux notes récentes<sup>10)</sup> nous fournira la solution de ce problème

<sup>9)</sup> Cf. Ch. Jordan, *Statistique mathématique*, 1927, p. 97—98.

<sup>10)</sup> *L'Enseignement mathématique*, 26, 1927, p. 287. *Comptes rendus*, 186, 1928, p. 1687.

et nous conduira finalement au théorème suivant: la seconde série de Charlier s'obtient de celle de Laplace en la développant suivant les polynômes d'Hermite, et la série de Laplace s'obtient de la seconde série de Charlier, en la développant suivant les puissances de  $\frac{1}{\sigma}$ .

### 1. Moments discontinus et moments continus Généralisation d'une formule de M. R. Frisch

Soit

$$\mu_n = \sum l^n T_l \quad (l = -sp, -sp + 1, \dots, sq)$$

le moment complet (discontinu) d'ordre  $n$ .

Je rappelle que  $\mu_0 = 1$ ,  $\mu_1 = 0$ .

M. K. Pearson a montré que  $\mu_n$  est lié aux moments d'ordres inférieurs par la relation

$$(I3) \quad \begin{aligned} \mu_n = & - \binom{n-1}{1} p \mu_{n-1} + \left\{ \binom{n-1}{1} \sigma^2 - \binom{n-1}{2} p \right\} \mu_{n-2} + \dots \\ & + \left\{ \binom{n-1}{1} \sigma^2 - p \right\} \mu_1 + \sigma^2 \mu_0, \end{aligned}$$

qui permet de calculer les moments complets de proche en proche. Cette formule peut être remplacée par la suivante, à beaucoup d'égards plus commode,

$$\begin{aligned} 2 \mu_n = & \binom{n-1}{1} (q-p) \mu_{n-1} + \left\{ 2 \binom{n-1}{1} \sigma^2 - \binom{n-1}{2} \right\} \mu_{n-2} \\ & + \binom{n-1}{3} (q-p) \mu_{n-3} + \left\{ 2 \binom{n-1}{3} \sigma^2 - \binom{n-1}{4} \right\} \mu_{n-4} + \dots \\ & + \left\{ 1 + (-1)^n \right\} \sigma^2. \end{aligned}$$

Il en résulte que le moment  $\mu_n$  est un polynôme en  $\sigma^2 = spq$  de degré  $\frac{n}{2}$ , si  $n$  est pair, et de degré  $\frac{n-1}{2}$ , si  $n$  est impair et  $p \neq q$ ; le terme constant est nul, si  $n > 0$ .



Soit maintenant  $l_1$  une valeur quelconque de  $l$  faisant partie de la suite  $-sp, -sp + 1, \dots, sq$ . Supposons qu'on étende la somme  $\sum l^n T_l$  non plus à toutes les valeurs de  $l$ , mais à celles qui sont  $\geq l_1$ . On aura les moments incomplets (discontinus) de M. R. Frisch. M. Frisch a montré <sup>11)</sup> que ces moments vérifient une relation qui ne diffère de (13) que par un terme en  $T_{l_1}$ .

Ce résultat peut être généralisé <sup>12)</sup>: au lieu de l'intervalle  $(l_1, sq)$  on peut envisager un intervalle  $(l_1, l_2)$ ,  $l_1$  et  $l_2$  étant deux nombres quelconques de la suite  $-sp, \dots, sq$  vérifiant l'inégalité  $l_1 < l_2$ .

Posons

$$m_n = \sum_{l_1}^{l_2} l^n T_l.$$

Nous dirons que  $m_n$  est le moment incomplet (discontinu) d'ordre  $n$  relatif à l'intervalle  $(l_1, l_2)$ ; il se réduit au moment incomplet de M. Frisch pour  $l_2 = sq$ .

Partons, à l'exemple de M. de Montessus de Ballore, de l'équation fonctionnelle

$$(14) \quad -q(sp + l) T_l + p(sq - l + 1) T_{l-1} = 0.$$

Il vient en multipliant par  $l^{n-1}$

$$\begin{aligned} -spq \sum_{l_1+1}^{l_2+1} l^{n-1} T_l - q \sum_{l_1+1}^{l_2+1} l^{n-1} T_l + spq \sum_{l_1+1}^{l_2+1} l^{n-1} T_{l-1} \\ - p \sum_{l_1+1}^{l_2+1} (l-1) l^{n-1} T_{l-1} = 0 \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} \sum_{l_1+1}^{l_2+1} l^{-1n} T_l &= \sum_{l_1}^{l_2} l^{n-1} T_l + (l_2 + 1)^{n-1} T_{l_2+1} - l_1^{n-1} T_{l_1}, \\ \sum_{l_1+1}^{l_2+1} l^n T_l &= \sum_{l_1}^{l_2} l^n T_l + (l_2 + 1)^n T_{l_2+1} - l_1^n T_{l_1}. \end{aligned}$$

<sup>11)</sup> Biometrika, 1925, p. 165.

<sup>12)</sup> Cf. L'Enseignement mathématique, 27, 1928, p. 144.

D'autre part

$$\begin{aligned} \sum_{l_1+1}^{l_2+1} l^{n-1} T_{l-1} &= \sum_{l_1}^{l_2} (l+1)^{n-1} T_l = \sum_{l_1}^{l_2} \left\{ l^{n-1} T_l + \binom{n-1}{1} l^{n-2} T_l + \dots + T_l \right\}, \\ \sum_{l_1+1}^{l_2+1} (l-1)^{n-1} T_{l-1} &= \sum_{l_1}^{l_2} l (l+1)^{n-1} T_l \\ &= \sum_{l_1}^{l_2} \left\{ l^n T_l + \binom{n-1}{1} l^{n-1} T_l + \dots + l T_l \right\}, \end{aligned}$$

et il vient, après des réductions faciles,

$$(15) \quad m_n = C_n - \binom{n-1}{1} p m_{n-1} + \left\{ \binom{n-1}{1} \sigma^2 - \binom{n-1}{2} p \right\} m_{n-2} + \dots \\ + \left\{ \binom{n-1}{1} \sigma^2 - p \right\} m_1 + \sigma^2 m_0,$$

en posant

$$(16) \quad C_n = \left\{ \sigma^2 + q l_1 \right\} l_1^{n-1} T_{l_1} - \left\{ \sigma^2 + q (l_2 + 1) \right\} (l_2 + 1)^{n-1} T_{l_2+1}.$$

La formule (15) se réduit à celle de M. Frisch pour  $l_2 = sq$  et à la formule (13) pour  $l_1 = -sp$ ,  $l_2 = sq$ .

Mais la formule de M. Frisch peut être généralisée d'une manière différente.

Introduisons la variable continue. Au lieu de  $T_l = T(x)$  envisageons la fonction  $y_l = y(x)$  définie par l'équation (7) et soient  $l_1, l_2$  deux nombres quelconques vérifiant l'inégalité  $l_1 < l_2$ . On peut supposer, pour fixer les idées, que  $l_1, l_2$  appartiennent à l'intervalle central  $(-sp - 1, sq + 1)$ .

Appelons moments incomplets continus relatifs à l'intervalle  $(l_1, l_2)$  les intégrales

$$m_n = \int_{l_1}^{l_2} l^n y_l dl.$$

Je vais montrer que ces moments sont liés par une relation analogue à (15).

Partons encore de l'équation fonctionnelle (14) qui s'écrit

$$-q(sp + l)y_l + p(sq - l + 1)y_{l-1} = 0.$$

Multiplions par  $l^{n-1}$  et intégrons entre  $l = l_1 + 1$  et  $l = l_2 + 1$ .  
Il vient, après des réductions faciles,

$$(17) m_n = C_n - \binom{n-1}{1} p m_{n-1} + \left\{ \binom{n-1}{1} \sigma^2 - \binom{n-1}{2} p \right\} m_{n-2} + \dots \\ + \left\{ \binom{n-1}{1} \sigma^2 - p \right\} m_1 + \sigma^2 m_0,$$

en posant

$$(18) C_n = \sigma^2 \int_{l_1}^{l_1+1} l^{n-1} y_l dl + q \int_{l_1}^{l_1+1} l^n y_l dl - \sigma^2 \int_{l_2}^{l_2+1} l^{n-1} y_l dl - q \int_{l_2}^{l_2+1} l^n y_l dl.$$

On voit donc qu'abstraction faite des termes complémentaires  $C_n$ ,  $C_n$ , les formules (15) et (17) s'écrivent de la même manière que la formule (13). La formule (17) jouera un rôle important dans cette étude.

## 2. Quelques propriétés du symbole de M. Landau

Soient  $f(s)$  et  $g(s)$  deux fonctions de  $s$ ; supposons que  $g(s)$  soit positive pour des valeurs suffisamment grandes de la variable  $s$ . Si

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f(s)}{g(s)} = 0,$$

nous écrirons, avec M. Landau,

$$f(s) = o(g(s)).$$

Lorsque deux fonctions  $f_1(s)$ ,  $f_2(s)$  vérifient la relation

$$f_1(s) - f_2(s) = o(g(s)),$$

nous dirons qu'elles sont asymptotiquement égales par rapport à  $g(s)$  et nous écrirons

$$f_1(s) \sim f_2(s) \left( g(s) \right).$$

Supposons en particulier  $g(s) = \frac{1}{s^\nu}$ .

Nous aurons à envisager des fonctions  $f(s)$  vérifiant la relation

$$(19) \quad f(s) = o\left(\frac{1}{s^\nu}\right)$$

quel que soit le nombre  $\nu$  et des fonctions asymptotiquement égales par rapport à  $\frac{1}{s^\nu}$  quel que soit  $\nu$ . Pour abrégier, nous écrirons parfois

$$f_1(s) \sim f_2(s),$$

sans mettre en évidence la fonction  $\frac{1}{s^\nu}$ .

Voici quelques propriétés du symbole de M. Landau qui nous seront particulièrement utiles :

*a* : Si les fonctions  $f_1(s)$  et  $f_2(s)$  vérifient la relation (19), il en est de même de leur somme

*b* : Si une fonction  $f(s)$  vérifie (19), il en est de même de  $a s^m f(s)$ , où  $m$  est un nombre quelconque et  $a$  une constante.

*c* : Si  $|f_1(s)| < |f_2(s)|$  à partir d'un  $s$  suffisamment grand et si  $f_2(s)$  vérifie (19), il en est de même de  $f_1(s)$ .

Nous aurons aussi à nous appuyer sur le théorème suivant dont la démonstration est immédiate :

Supposons qu'on soit conduit à une relation de la forme

$$c_0 + \frac{c_1}{s^{\alpha_1}} + \frac{c_2}{s^{\alpha_2}} + \dots + \frac{c_n}{s^{\alpha_n}} = o\left(\frac{1}{s^\nu}\right),$$

où  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  sont des nombres fixes, vérifiant les inégalités

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 \dots < \alpha_n$$

et où  $c_0, c_1, \dots, c_n$  sont des constantes.

Je dis que tous les  $c_i$  sont nuls. En effet, le premier membre tendant vers 0, lorsque  $s$  augmente indéfiniment,  $c_0 = 0$ . Mais en multipliant par  $s^{\alpha_1}$ , on a encore, en vertu de (b),

$$c_1 + \frac{c_2}{s^{\alpha_2 - \alpha_1}} + \dots + \frac{c_n}{s^{\alpha_n - \alpha_1}} = o\left(\frac{1}{s^\nu}\right).$$

Donc  $c_1 = 0$ . On démontrera de même que  $c_2 = 0, c_3 = 0, \dots$ . Supposons maintenant que les coefficients  $c_i$  soient des constantes, sauf le dernier  $c_n$ . Si l'on sait que  $c_n$  est une fonction bornée de  $s$  à partir d'un  $s$  suffisamment grand, on pourra encore affirmer que les  $c_i$  sont nuls pour  $i < n$ .

### 3. Etude d'un cas particulier

Ces propriétés établies, reprenons l'étude de la formule (17).

Dans cette formule les  $m_i$  sont les moments incomplets continus relatifs à un intervalle quelconque  $(l_1, l_2)$ . Imposons maintenant une condition au choix des limites  $l_1, l_2$ .

Soit  $k$  un nombre vérifiant l'inégalité

$$(20) \quad \frac{1}{2} < k < 1.$$

Posons

$$\lambda = s^k, \quad l_1 = -\lambda, \quad l_2 = \lambda.$$

L'intervalle  $(-\lambda, \lambda)$  ainsi choisi est intérieur à l'intervalle central  $(-sq - 1, sq + 1)$  pour  $s$  suffisamment grand.

Je dis que  $\mathfrak{C}_n$  vérifie dans ce cas la relation

$$(21) \quad \mathfrak{C}_n = o\left(\frac{1}{s^\nu}\right).$$

Pour l'établir, il suffit, en vertu des propriétés (a) et (b), de montrer que la relation (21) est vérifiée par chacune des intégrales

$$\int_{-\lambda}^{-\lambda+1} l^{n-1} y_l dl, \quad \int_{-\lambda}^{-\lambda+1} l^n y_l dl, \quad \int_{\lambda}^{\lambda+1} l^{n-1} y_l dl, \quad \int_{\lambda}^{\lambda+1} l^n y_l dl.$$

Or le module de la première intégrale est inférieur à  $\lambda^{n-1} \int_{-\lambda}^{-\lambda+1} y_l dl$ ,

puisque  $|l| \leq \lambda$  dans  $(-\lambda, -\lambda+1)$

Pour la même raison le module de la seconde intégrale est inférieur à  $\lambda^n \int_{-\lambda}^{-\lambda+1} y_l dl$ , celui de la troisième à  $(\lambda+1)^{n-1} \int_{\lambda}^{\lambda+1} y_l dl$ , celui

de la quatrième à  $(\lambda+1)^n \int_{\lambda}^{\lambda+1} y_l dl$ . Il suffit donc, en vertu des propriétés (b) et (c), de montrer que chacune des intégrales

$$\int_{-\lambda}^{-\lambda+1} y_l dl, \quad \int_{\lambda}^{\lambda+1} y_l dl$$

est  $o\left(\frac{1}{s^\nu}\right)$ .

Mais la première de ces intégrales est inférieure à  $y_{-\lambda+1}$  et la seconde à  $y_\lambda$ , pour  $s$  suffisamment grand, et d'autre part

$$y_{-\lambda+1} = \frac{sq + \lambda}{sp - \lambda + 1} \frac{p}{q} y_{-\lambda}.$$

Il suffit donc, en vertu de (b), de montrer que chacune des fonctions  $y_\lambda, y_{-\lambda}$  est  $o\left(\frac{1}{s^\nu}\right)$ .

Cette dernière propriété peut être établie à partir de la formule (2), comme l'a fait voir récemment Mlle S. Piccard. Je renvoie le lecteur à la thèse de Mlle Piccard intitulée „Sur les courbes binomiales“, qui va paraître prochainement.

On a donc bien  $\mathfrak{E}_n = o\left(\frac{1}{s^\nu}\right)$ .

Revenons à la relation (17). En vertu de (21) cette relation peut s'écrire

$$m_n \approx - \binom{n-1}{1} p m_{n-1} + \dots + \left\{ \binom{n-1}{1} \sigma^2 - p \right\} m_1 + \sigma^2 m_0$$

et en retranchant (13)

$$(22) \quad \begin{aligned} m_n - \mu_n \approx & - \binom{n-1}{1} p (m_{n-1} - \mu_{n-1}) \\ & + \left\{ \binom{n-1}{1} \sigma^2 - \binom{n-1}{2} p \right\} (m_{n-2} - \mu_{n-2}) + \dots \\ & + \left\{ \binom{n-1}{1} \sigma^2 - p \right\} (m_1 - \mu_1) + \sigma^2 (m_0 - \mu_0). \end{aligned}$$

Je dis que

$$(23) \quad m_n - \mu_n = o\left(\frac{1}{s^\nu}\right)$$

quel que soit  $n$ .

En effet (propriétés (a) et (b)), la relation (23) est vraie pour  $n$ , si elle est vraie pour  $n-1$ ,  $n-2$ , ..., 1, 0. Or on a bien

$$m_0 - \mu_0 = o\left(\frac{1}{s^\nu}\right),$$

puisque  $m_0 - 1 = o\left(\frac{1}{s^\nu}\right)$ <sup>13)</sup> et que  $\mu_0 = 1$ .

---

<sup>13)</sup> Comptes rendus, 186, 1928, p. 1687

D'autre part on montre facilement<sup>14)</sup> que

$$m_1 = o\left(\frac{1}{s^\nu}\right)$$

et comme  $\mu_1 = 0$ , on a aussi

$$m_1 - \mu_1 = o\left(\frac{1}{s^\nu}\right).$$

La relation (23) est donc vraie quel que soit  $n$ .

Nous pouvons dire par conséquent, et ce résultat nous sera extrêmement utile, que les moments continus  $m_n$  relatifs à l'intervalle  $(-\lambda, \lambda)$  sont asymptotiquement égaux, par rapport à  $\frac{1}{s^\nu}$ , aux moments complets discontinus  $\mu_n$ .

#### 4. Valeur moyenne gaussienne d'un polynôme

Soit  $P(t)$  un polynôme en  $t$ . J'appellerai valeur moyenne gaussienne de  $P(t)$  l'intégrale

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} P(t) dt,$$

que je désignerai, avec Mlle S. Piccard, par  $M(P(t))$ <sup>15)</sup>.

Posons

$$\tau = \frac{\lambda}{\sigma\sqrt{2}} = \frac{s^k}{\sqrt{2spq}}.$$

Je dis qu'on a toujours

$$(24) \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\tau}^{\tau} e^{-t^2} P(t) dt - M(P(t)) = o\left(\frac{1}{s^\nu}\right).$$

<sup>14)</sup> S. Piccard, Sur les Courbes binomiales (thèse).

<sup>15)</sup> S. Piccard, loc. cit.



En effet, l'intégrale  $\int_{-\tau}^{\tau} e^{-t^2} P(t) dt$  peut être mise sous la forme

$$c \int_{-\tau}^{\tau} e^{-t^2} dt + \left[ e^{-t^2} Q(t) \right]_{-\tau}^{\tau},$$

où  $c$  est une constante et  $Q(t)$  un polynôme en  $t$ .

Mais la constante  $c$  est égale à  $M(P(t))$ . Pour le voir, il suffit de supposer que  $s$  augmente indéfiniment.

D'autre part

$$(25) \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\tau}^{\tau} e^{-t^2} dt - 1 = o\left(\frac{1}{s^{\nu}}\right)$$

et

$$(26) \quad \left[ e^{-t^2} Q(t) \right]_{-\tau}^{\tau} = o\left(\frac{1}{s^{\nu}}\right).^{16)}$$

Par conséquent  $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\tau}^{\tau} e^{-t^2} P(t) dt$  est asymptotiquement égale à  $M(P(t))$ , par rapport à  $\frac{1}{s^{\nu}}$ . *C. Q. F. D.*

## 5. Etude des Polynômes $P_i(t)$

Nous pouvons maintenant aborder l'étude des Polynômes  $P_i(t)$ .

Demandons-nous quel est le degré de  $P_i(t)$ . Envisageons la relation (5) qui permet de calculer les  $P_i(t)$  de proche en proche, à l'aide des  $P_i(t)$  d'indices inférieurs et des polynômes  $\pi_i(t)$ .

Occupons-nous d'abord des polynômes  $\pi_i(t)$ . Je dis que le degré de  $\pi_i(t)$  est égal à  $i + 2$ , abstraction faite du cas particulier de  $p = q$  et de  $i$  impair, où  $\pi_i(t) = 0$ . Cela est à peu près évident. En effet, pour calculer les polynômes  $\pi_i(t)$ , il suffit, en vertu de la formule (2), de développer  $F(t) + G(t)$  suivant les puissances

<sup>16)</sup> Comptes rendus, 186, 1928, p. 1687.

de  $\frac{1}{\sigma}$ . Or on voit immédiatement que le coefficient du terme en  $\frac{1}{\sigma^i}$  fourni par  $F(t)$  est de degré  $i+2$  en  $t$ , lorsque  $p \neq q$ , tandis que le coefficient du terme en  $\frac{1}{\sigma^i}$  fourni par  $G(t)$  est de degré  $i-2$ . Lorsque  $p = q$ , le développement de  $F(t) + G(t)$  ne contient que des puissances paires de  $\frac{1}{\sigma}$ , par conséquent le degré de  $\pi_i(t)$  est encore égal à  $i+2$ , pour  $i$  pair, mais pour  $i$  impair  $\pi_i(t) = 0$ .

Je dis maintenant que le degré de  $P_i(t)$  est égal à  $3i$ , si  $p \neq q$ . En effet, cette propriété est vraie des deux premiers polynômes  $P_1(t)$ ,  $P_2(t)$  et comme, en vertu de (5), elle est vraie de  $P_i$ , si elle est vraie de  $P_{i-1}$ ,  $P_{i-2}$ , ..., elle est vraie quel que soit  $i$ .

Lorsque  $p = q$ , on voit de même, que le degré de  $P_i(t)$  est égal à  $2i$  pour  $i$  pair; pour  $i$  impair,  $P_i(t) = 0$ .

Il est clair aussi que les polynômes  $P_i(t)$  sont pairs lorsque  $i$  est pair, et impairs lorsque  $i$  est impair.

Quelle est la structure de ces polynômes?

Pour résoudre ce problème, nous allons partir de la relation (4) que j'écrirai, en remplaçant  $T_l$  par  $y_l$ ,

$$(27) \quad y_l = \frac{e^{-t^2}}{\sigma \sqrt{2\pi}} \left( 1 + \frac{P_1(t)}{\sigma} + \frac{P_2(t)}{\sigma^2} + \dots + \frac{P_n(t)}{\sigma^n} + \frac{E_n}{\sigma^{n+1}} \right),$$

la fonction  $y_l$  étant définie par l'équation (7). J'ai le droit de le faire, puisque la formule (2) reste vraie, lorsqu'on passe du discontinu au continu.

Avant d'aller plus loin, je tiens à rappeler une propriété importante de  $E_n$ , sur laquelle nous aurons à nous appuyer. Soit encore  $\tau = \frac{\lambda}{\sigma \sqrt{2}}$ . M<sup>lle</sup> S. Piccard et moi avons montré<sup>17)</sup> qu'à partir d'un  $s$  suffisamment grand et pour tout  $t$  dont le module  $|t|$  ne dépasse pas  $\tau$ ,  $E_n$  vérifie une inégalité de la forme

<sup>17)</sup> Comptes rendus, 186, 1928, p. 1687.

$$|E_n| < e^{\frac{t^2}{2}} Q(|t|)$$

où  $Q(|t|)$  est un polynôme en  $|t|$  dont le degré et les coefficients, qui sont des nombres non négatifs, ne dépendent pas de  $s$ . Il en résulte immédiatement que l'intégrale

$$\int_{-\tau}^{\tau} e^{-t^2} E_n P(t) dt,$$

où  $P(t)$  est un polynôme quelconque en  $t$ , est bornée pour  $s$  suffisamment grand.

Revenons aux polynômes  $P_i(t)$ . Je commencerai par montrer qu'on a, quel que soit  $i$ , et pour tout  $j$  (entier) inférieur à  $i + 2$ ,

$$(28) \quad M(P_i(t) t^j) = 0.$$

Multiplions l'égalité (27) par  $t^j$  et intégrons par rapport à  $l$  entre  $-\lambda$  et  $+\lambda$ ; il vient

$$(29) \quad \int_{-\lambda}^{\lambda} y_l t^j dl = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_{-\tau}^{\tau} e^{-t^2} t^j dt + \frac{1}{\sigma} \int_{-\tau}^{\tau} e^{-t^2} P_1(t) t^j dt + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{\sigma^i} \int_{-\tau}^{\tau} e^{-t^2} P_i(t) t^j dt + \dots + \frac{1}{\sigma^{n+1}} \int_{-\tau}^{\tau} e^{-t^2} E_n t^j dt \right\},$$

puisque  $l = \sigma \sqrt{2} t$  et  $dl = \sigma \sqrt{2} dt$ .

Le premier membre s'écrit

$$\frac{1}{(\sigma \sqrt{2})^j} \int_{-\lambda}^{\lambda} y_l t^j dl = \frac{1}{(\sigma \sqrt{2})^j} m_j,$$

en désignant toujours par  $m_j$  le moment continu d'ordre  $j$  relatif à l'intervalle  $(-\lambda, \lambda)$ .

Je remplacerai maintenant l'égalité absolue (29) par une égalité asymptotique. Rappelons qu'en vertu de (23) nous pouvons écrire

$$(30) \quad \frac{1}{(\sigma\sqrt{2})^j} (\mu_j - m_j) = o\left(\frac{1}{s^\nu}\right)$$

et que d'autre part, en vertu de (24),

$$(31) \quad \frac{1}{\sigma^i} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\tau}^{\tau} e^{-t^2} P_i(t) t^j dt - M(P_i(t) t^j) \right\} = o\left(\frac{1}{s^\nu}\right).$$

En ajoutant à (29) l'égalité asymptotique (30) et les  $n + 1$  égalités asymptotiques (31) ( $i = 0, 1, \dots, n$ ), il viendra, en vertu de la propriété (a),

$$\frac{1}{(\sigma\sqrt{2})^j} \mu_j \sim \sum_{i=0}^n \frac{1}{\sigma^i} M(P_i(t) t^j) + \frac{1}{\sigma^{n+1} \sqrt{\pi}} \int_{-\tau}^{\tau} e^{-t^2} E_n t^j dt.$$

Or le premier membre de cette relation est un polynôme en  $\frac{1}{\sigma}$  de degré  $j - 2$ , le second membre est un polynôme en  $\frac{1}{\sigma}$  de degré  $n$ , suivi de  $\frac{C_{n+1}}{\sigma^{n+1}}$ , où  $C_{n+1}$  est bornée pour  $s$  suffisamment grand.

Les coefficients des puissances de  $\frac{1}{\sigma}$ , sauf  $C_{n+1}$ , étant des constantes, nous pouvons appliquer le théorème du § 2.

Par conséquent

$$M(P_i(t) t^j) = 0$$

pour  $i > j - 2$  ou  $j < i + 2$  et l'égalité (28) est établie. En posant  $j = 0$ , on retrouve la propriété des polynômes  $P_i(t)$  démontrée récemment par Mlle S. Piccard<sup>18)</sup>.

<sup>18)</sup> Comptes rendus, loc. cit.

Nous pouvons maintenant approfondir l'étude des polynômes  $P_i(t)$ . Soient encore  $H_i(t)$  les polynômes d'Hermite définis par la relation

$$H_i(t) = e^{t^2} \frac{d^i}{dt^i} (e^{-t^2}).$$

Je rappelle les propriétés fondamentales suivantes de ces polynômes :

$$(32) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} H_i(t) H_j(t) dt = 0, \text{ si } i \neq j$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} H_j^2(t) dt = 2^j j! \sqrt{\pi}.$$

Nous chercherons à exprimer les polynômes  $P_i(t)$  à l'aide des polynômes d'Hermite. En vertu de (28), nous pouvons écrire

$$(33) \quad P_i(t) = \alpha_{i+2}^{(i)} H_{i+2}(t) + \alpha_{i+4}^{(i)} H_{i+4}(t) + \dots + \alpha_{3i}^{(i)} H_{3i}(t),$$

les coefficients  $\alpha_j^{(i)}$  ne dépendant ni de  $t$ , ni de  $s$ .

Il reste à trouver l'expression de ces coefficients. C'est encore la méthode asymptotique dont je me suis servi tout à l'heure qui va nous fournir la solution de ce problème. Reprenons la formule (27). Soit  $j$  un nombre entier  $\leq n + 2$ .

Multiplions par  $H_j(t)$  et intégrons par rapport à  $l$  entre  $-\lambda$  et  $+\lambda$ .

Le premier membre s'écrira

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} y_l H_j(t) dl.$$

Or  $H_j(t)$  est un polynôme en  $t$  de degré  $j$ .

Posons

$$H_j(t) = a_j^{(j)} t^j + a_j^{(j-2)} t^{j-2} + \dots.$$

On sait que les coefficients  $\alpha_j^{(j-2m)}$  sont donnés par la formule <sup>19)</sup>

$$\alpha_j^{(j-2m)} = (-1)^{j-m} \frac{2^{j-2m} j!}{m! (j-2m)!}.$$

Remplaçons  $t$  par  $\frac{l}{\sigma\sqrt{2}}$ , il viendra

$$H_j(t) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2})^j} \left\{ \alpha_j^{(j)} l^j + 2\sigma^2 \alpha_j^{(j-2)} l^{j-2} + \dots \right\}$$

et par conséquent

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} y_l H_j(t) dl = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2})^j} \left\{ \alpha_j^{(j)} m_j + 2\sigma^2 \alpha_j^{(j-2)} m_{j-2} + \dots \right\}.$$

On voit donc que le premier membre de notre égalité est un polynôme en  $\frac{1}{\sigma}$  de degré  $j$  dont les coefficients sont les moments continus multipliés par des constantes.

Envisageons maintenant le second membre. C'est un polynôme en  $\frac{1}{\sigma}$  de degré  $n$  suivi de  $\frac{C_{n+1}}{\sigma^{n+1}}$ , où  $C_{n+1}$  est bornée à partir d'un  $s$  suffisamment grand. Envisageons le terme en  $\frac{1}{\sigma^i}$  ( $i \leq n$ ).

Son coefficient s'écrit

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \alpha_{i+2}^{(i)} \int_{-\tau}^{\tau} e^{-t^2} H_{i+2}(t) H_j(t) dt + \dots + \alpha_{3i}^{(i)} \int_{-\tau}^{\tau} e^{-t^2} H_{3i}(t) H_j(t) dt \right\}.$$

Passons maintenant de l'égalité absolue à une inégalité asymptotique. En appliquant le raisonnement dont nous avons fait usage il y a un moment, nous pourrons, dans le premier membre, substituer aux moments continus incomplets  $m_j, m_{j-2}, \dots$  les moments discontinus complets  $\mu_j, \mu_{j-2}, \dots$ .

<sup>19)</sup> F. Ch. Jordan, Statistique mathématique, p. 33.

Nous pourrions de même substituer aux intégrales du second membre les valeurs moyennes gaussiennes correspondantes.

Si maintenant, dans la relation asymptotique ainsi obtenue, on remplace les moments  $\mu_j, \mu_{j-2}, \dots$  par leurs expressions, si d'autre part on tient compte des formules (32), le premier membre deviendra un polynôme en  $\frac{1}{\sigma}$  de degré  $j-2$  à coefficients constants, et le second un polynôme en  $\frac{1}{\sigma}$  de degré  $n$ , à coefficients constants, suivi du terme  $\frac{C_{n+1}}{\sigma^{n+1}}$ .

Nous pourrions donc appliquer le théorème du § 2. En vertu de ce théorème, les termes en  $\frac{1}{\sigma^i}$  ( $i \leq n$ ) auront mêmes coefficients des deux côtés de l'égalité ainsi transformée.

Supposons que  $j$  fasse partie de la suite  $i+2, i+4, \dots, 3i$ , et soit  $c_j^{(i)}$  le coefficient de  $\frac{1}{\sigma^i}$  dans le premier membre qui s'écrit

$$(34) \quad \frac{1}{(\sigma\sqrt{2})^j} \left\{ \alpha_j^{(j)} \mu_j + 2\sigma^2 \alpha_j^{(j-2)} \mu_{j-2} + \dots \right\}.$$

Dans le second le coefficient de  $\frac{1}{\sigma^i}$  sera, en vertu de (32),  $2^j j! \alpha_j^{(i)}$ . Nous pouvons donc écrire

$$c_j^{(i)} = 2^j j! \alpha_j^{(i)}$$

et par conséquent

$$(35) \quad \alpha_j^{(i)} = \frac{c_j^{(i)}}{2^j \cdot j!}.$$

D'où la règle suivante: pour calculer  $\alpha_j^{(i)}$  on déterminera le coefficient  $c_j^{(i)}$  de  $\frac{1}{\sigma^i}$  dans (34), on divisera ce coefficient par  $2^j j!$

## 6. La seconde série de Charlier

Nous avons vu que cette série s'écrit

$$\frac{e^{-t^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left( 1 + \frac{A_3}{(\sigma\sqrt{2})^3} H_3(t) + \frac{A_4}{(\sigma\sqrt{2})^4} H_4(t) + \dots \right),$$

les  $A_i$  étant des coefficients définis à partir de la fonction  $Y$  de M. Charlier (formule (9)). Pour calculer ces coefficients on peut partir de l'identité<sup>20)</sup>

$$(36) \quad (pe^{i\omega} + q)^s = e^{sp\omega i} e^{-\frac{spq\omega^2}{2}} (1 - A_3(i\omega)^3 + A_4(i\omega)^4 - \dots)$$

qu'il est plus commode d'écrire sous la forme

$$(37) \quad (qe^{-p\vartheta} + pe^{q\vartheta})^s = e^{\frac{spq\vartheta^2}{2}} (1 - A_3\vartheta^3 + A_4\vartheta^4 - \dots),$$

en posant  $\vartheta = i\omega$ .

Or

$$(qe^{-p\vartheta} + pe^{q\vartheta})^s = 1 + \mu_1\vartheta + \mu_2\frac{\vartheta^2}{2!} + \dots + \mu_j\frac{\vartheta^j}{j!} + \dots$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} & 1 - A_3\vartheta^3 + A_4\vartheta^4 - \dots + (-1)^j A_j\vartheta^j + \dots \\ & = e^{-\frac{spq\vartheta^2}{2}} \left( 1 + \mu_1\vartheta + \mu_2\frac{\vartheta^2}{2!} + \dots + \mu_j\frac{\vartheta^j}{j!} + \dots \right). \end{aligned}$$

On en tire, en remplaçant  $e^{-\frac{spq\vartheta^2}{2}} = e^{-\frac{\sigma^2\vartheta^2}{2}}$  par la série

$$1 - \frac{\sigma^2\vartheta^2}{2} + \frac{\sigma^4\vartheta^4}{2^2 2!} - \dots + (-1)^j \frac{\sigma^{2j}\vartheta^{2j}}{2^j \cdot j!} + \dots$$

et en égalant les coefficients des mêmes puissances de  $\vartheta$ ,

<sup>20)</sup> Cf. H. L. Rietz. — Mathematical statistics, p. 158.



$$(-1)^j A_j = \frac{\mu_j}{j!} - \frac{\mu_{j-2} \sigma^2}{2 \cdot (j-2)!} + \frac{\mu_{j-4} \sigma^4}{2^2 \cdot (j-4)! 2!} - \dots$$

Comme d'autre part

$$(-1)^j j! 2^j \left( \frac{\mu_j}{j!} - \frac{\mu_{j-2} \sigma^2}{2 \cdot (j-2)!} + \dots \right) = a_j^{(j)} \mu_j + 2 \sigma^2 a_j^{(j-2)} \mu_{j-2} + \dots$$

Il vient

$$A_j = \frac{1}{2^j j!} \left( a_j^{(j)} \mu_j + 2 \sigma^2 a_j^{(j-2)} \mu_{j-2} + \dots \right)$$

et enfin

$$(39) \quad \frac{A_j}{(\sigma \sqrt{2})^j} = \frac{1}{2^j j! (\sigma \sqrt{2})^j} \left( a_j^{(j)} \mu_j + 2 \sigma^2 a_j^{(j-2)} \mu_{j-2} + \dots \right)$$

## 7. La série de Laplace et la seconde série de Charlier Les trois premiers polynômes $P_i(t)$

On voit que le coefficient de  $\frac{e^{-t^2}}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot \frac{H_j(t)}{\sigma^i}$  est égal à  $\alpha_j^{(i)}$ .

Par conséquent en développant la seconde série de Charlier suivant les puissances de  $\frac{1}{\sigma^i}$ , on obtient le développement de Laplace.

On voit aussi que la seconde série de Charlier se déduit de celle de Laplace en la développant suivant les polynômes d'Hermites.

On peut énoncer ce résultat d'une manière un peu différente.

Envisageons la série divergente

$$S = \frac{e^{-t^2}}{\sigma \sqrt{2\pi}} \left( 1 + \sum_{i,j} \alpha_j^{(i)} \frac{H_j(t)}{\sigma^i} \right)$$

dont les termes dépendent de deux indices  $i, j$  et où  $\alpha_j^{(i)} = 0$  pour tout système de valeurs  $i, j$  qui ne vérifient pas la relation

$$j = i + 2m \quad \left( \begin{array}{l} i = 1, 2, 3, \dots \\ m = 1, 2, \dots, 2i \end{array} \right).$$

Si l'on ordonne la série  $S$  suivant les valeurs croissantes de  $i$ , on obtient la série de Laplace. Si au contraire on l'ordonne suivant les valeurs croissantes de  $j$ , on obtient la seconde série de Charlier.

P. ex. le 5<sup>e</sup> terme ( $i = 4$ ) de la série de Laplace, abstraction faite du facteur  $\frac{e^{-t^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ , s'écrit

$$\frac{P_4(t)}{\sigma^4} = \frac{\alpha_6^{(4)} H_6(t) + \alpha_8^{(4)} H_8(t) + \alpha_{10}^{(4)} H_{10}(t) + \alpha_{12}^{(4)} H_{12}(t)}{\sigma^4},$$

tandis que le terme de même rang de la seconde série de Charlier abstraction faite du même facteur, s'écrit

$$\left( \frac{\alpha_6^{(2)}}{\sigma^2} + \frac{\alpha_6^{(4)}}{\sigma^4} \right) H_6(t).$$

Pour terminer, je vais donner l'expression, à l'aide des polynômes d'Hermite, des trois premiers polynômes  $P_i(t)$ .

En vertu de la formule (32)

$$P_1(t) = \alpha_3^{(1)} H_3(t).$$

Pour calculer  $\alpha_3^{(1)}$  on déterminera le coefficient  $c_3^{(1)}$  de  $\frac{1}{\sigma}$  dans

$$\frac{1}{(\sigma\sqrt{2})^3} \alpha_3^{(3)} \mu_3$$

et on le divisera par  $2^3 \cdot 3!$ .

Or  $\mu_3 = (q - p) \sigma^2$ ,  $\alpha_3^{(3)} = -2^3$ ,  
d'où

$$\alpha_3^{(1)} = -\frac{2^3}{(\sqrt{2})^3} (q - p)$$

et en divisant par  $2^3 \cdot 3!$ ,

$$\alpha_3^{(1)} = -\frac{\sqrt{2} (q - p)}{24}$$

il vient donc

$$P_1(t) = -\frac{\sqrt{2} (q - p)}{24} H_3(t)$$

et l'on retrouve l'expression de  $P_1(t)$  donnée dans l'introduction,  
puisque  $H_3(t) = -8t^3 + 12t$ .

De même

$$P_2(t) = \alpha_4^{(2)} H_4(t) + \alpha_6^{(2)} H_6(t).$$

En appliquant la règle que je viens de rappeler, on trouve

$$\alpha_4^{(2)} = \frac{1 - 6pq}{96},$$

$$\alpha_6^{(2)} = \frac{1 - 4pq}{576}.$$

Envisageons enfin le polynôme

$$P_3(t) = \alpha_5^{(3)} H_5(t) + \alpha_7^{(3)} H_7(t) + \alpha_9^{(3)} H_9(t).$$

En appliquant la même règle, on obtient

$$\alpha_5^{(3)} = -\frac{\sqrt{2} (q - p) (1 - 12pq)}{960},$$

$$\alpha_7^{(8)} = -\frac{\sqrt{2}(q-p)(1-6pq)}{2304},$$

$$\alpha_9^{(2)} = -\frac{\sqrt{2}(q-p)(1-4pq)}{41472}$$

et l'on retrouve encore les expressions de  $P_2(t)$  et  $P_3(t)$  données dans l'introduction.

Reçu le 1<sup>er</sup> août 1928.