

Ueber kubische diophantische Gleichungen.

Autor(en): **Fueter, Rudolf**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **2 (1930)**

PDF erstellt am: **17.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-3610>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ueber kubische diophantische Gleichungen

Von RUDOLF FUETER, Zürich.

In seinen Mathematischen Problemen ¹⁾ hat *Hilbert* 1900 als 10. Problem die Auflösung diophantischer Gleichungen in ganzen rationalen Zahlen genannt. Während von seinen übrigen Problemen seither viele gelöst worden sind, hat dieses Problem in letzter Zeit wenig Fortschritte gezeitigt. *Nagell* hat vor kurzem in einem *Mémorial* ²⁾ eine schöne Uebersicht mit ausführlicher Literaturangabe der hier in Betracht fallenden Arbeiten gegeben. Ich beschränke mich im folgenden auf die kubische Gleichung:

$$x^3 - y^2 = D,$$

wo D eine rationale Zahl ist, und frage nach ihren rationalen Lösungen. Diese Gleichung hat schon längst die Aufmerksamkeit der Mathematiker erfordert, hat doch schon *Euler* über dieselbe einen berühmten Satz bewiesen ³⁾. Andererseits stimmt sie im Falle $D = 2^4 \cdot 3^3$, wie ich zeigen werde, mit dem letzten Theorem von *Fermat* für den Exponenten drei überein. Die Gleichung hat auch darum besonderes Interesse, weil ihre Form mit derjenigen der Diskriminanten reduzierter kubischer Gleichungen übereinstimmt. Es scheint mir, daß dieser Umstand bisher nicht genügend ausgenutzt worden ist, und ich werde im Folgenden eine Methode entwickeln, der dieser Zusammenhang zu Grunde liegt. Dieselbe führt direkt zu tiefliegenden Eigenschaften arithmetischer Natur, wie der Größe der Klassenzahl gewisser quadratischer Körper, oder der Aufstellung Abel'scher Gleichungen in einem solchen Körper. Die Gedanken liegen vielfach schon in einer meiner frühern Arbeiten. ⁴⁾

Die Methode scheint mir auch daher wertvoll, weil sie das Prinzip der sogenannten „*Descente infinie*“ von *Fermat* vollständig klarlegt. Es ist längst bekannt, wie man aus einer Lösung durch rationale Transformationen höheren Grades neue Lösungen finden kann, deren Zahlen im allgemeinen größer sind. Die Methode, kubische Gleichungen ein-

¹⁾ *D. Hilbert*, Mathematische Probleme. Nachrichten der Kgl. Ges. der Wiss. zu Göttingen, Math. phys. Klasse, 1900, S. 276.

²⁾ *T. Nagell*, L'analyse indéterminée de degré supérieur. Mémorial des Sciences Math. Fasc. XXXIX, Paris, 1929.

³⁾ *L. Euler*, Opera omnia, Serie I., t. 2, Lipsiae, 1915, S. 56.

⁴⁾ *R. Fueter*, Die diophantische Gleichung $\xi^3 + \eta^3 + \zeta^3 = 0$. Sitzungsberichte der Heidelberger Academie der Wiss. Math. Naturwiss. Klasse. Jahrgang 1913. 25. Abh.

zuführen, erlaubt nun, umgekehrt diesen Prozeß rückwärts zu gehen, was nur zu endlich vielen Schritten Anlaß gibt. Dies ist der eigentliche tiefere Sinn der *Fermat'schen* „Descente infinie“.

Wegen weiterer Literatur verweise ich auf das *Nagell'sche* Mémorial. Nur in bezug auf die *Hurwitz'sche* Arbeit⁵⁾ möchte ich hervorheben, daß meine Untersuchungen sich auf die *arithmetische* Natur der Zahlkoeffizienten beziehen, die eine Lösung zulassen, oder keine Lösung zulassen, während Hurwitz davon ganz absah, und nur allgemein die Möglichkeit von Gleichungen mit vorgeschriebenen Anzahlen der Lösungen untersuchte.

Im Abschnitt 1. — 3. zeige ich, daß die obige Gleichung abgesehen von den trivialen Lösungen 0 oder ∞ stets keine oder unendlich viele Lösungen besitzt. Ausgenommen sind nur die Fälle:

$$D = -1 \text{ und } D = 2^4 \cdot 3^3,$$

wo genau *eine* nicht triviale Lösung existiert ($y > 0$).

Im Abschnitt 4. zeige ich, daß auch die allgemeinere Gleichung:

$$nz^3 - my^2 = r,$$

auf die Lösung der obigen Gleichung zurückgeführt werden kann.

Im 5. Abschnitt beweise ich ein neues Kriterium: Wenn $D > 0, \equiv 7 \pmod{9}, \equiv -1 \pmod{4}, \equiv -4 \pmod{16}$ ist, so besitzt die Gleichung keine Lösung, wenn die Klassenzahl von $k(\sqrt{-D})$ zu 3 teilerfremd ist. Die Annahmen sind wesentlich, wie durch Beispiele gezeigt wird. Damit sind auch meine früheren Resultate (siehe ⁴⁾ S. 69) neu bewiesen, wie ich im 6. Abschnitt zeige, nämlich die Tatsache, daß:

$$\xi^3 + \eta^3 + \zeta^3 = 0,$$

nur im $k(\sqrt{m})$, $m \equiv 2 \pmod{3}$, $m < 0$, lösbar ist, wenn die Klassenzahl des Körpers durch drei teilbar ist.

1.

Unter einer *Lösung* der diophantischen Gleichung:

$$z^3 - y^2 = D, \quad D \text{ eine rationale Zahl,} \quad (1)$$

⁵⁾ *A. Hurwitz*, Ueber ternäre diophantische Gleichungen dritten Grades. Vierteljahrsschrift der Naturf. Ges. in Zürich, 62. Bd. Zürich, 1917, S. 207.

in rationalen (ganzen oder gebrochenen) Zahlen y, z wollen wir stets eine solche verstehen, bei der y und z von 0 oder unendlich verschieden sind. Andere Lösungen sollen triviale Lösungen heißen.

Wir setzen D als *ganze* rationale Zahl voraus, die *nicht durch die 6te Potenz einer rationalen Zahl teilbar ist*. Denn ist D gebrochen, so können wir (1) immer mit der 6ten Potenz so erweitern, daß D ganz ist. Jeder Lösung dieses ganzen D entspricht dann auch eine solche des gebrochenen D . Ebenso können wir die 6ten Potenzen in D weglassen, da sich der Typus von (1) durch Multiplikation mit 6ten Potenzen nicht ändert.

Besitzt (1) eine Lösung, so sagen wir, D sei durch $z^3 - y^2$ dargestellt. Ist eine solche Darstellung gegeben, so setze man:

$$Y = \frac{y}{z^3} (y^2 + 9D), \quad Z = \frac{1}{z^2} (y^2 - 3D). \quad (2)$$

Die Ausrechnung zeigt, daß zwischen Y, Z die Relation besteht:

$$Z^3 - Y^2 = -27D.$$

Sind Y und Z von Null verschieden, so ist in Y, Z eine Darstellung von $-27D$ gefunden.

Ist $Y = 0$, so folgt aus (2):

$$y = \pm 3t, \quad D = -t^2, \quad z^3 = 8t^2,$$

d. h. t ist die 3te, somit D die negative 6te Potenz einer ganzen Zahl. Da D keine sechsten Potenzen enthalten soll, muß $t = 1, D = -1$ sein.

Ist $Z = 0$, so folgt aus (2):

$$y = \pm 3t, \quad D = 3t^2, \quad z^3 = 12t^2,$$

d. h. D muß $2^4 \cdot 3^3$ -mal der 6ten Potenz einer Zahl sein, also:

$$D = 2^4 \cdot 3^3.$$

Daraus folgt der

Satz 1: *Ist D eine ganze rationale, durch keine 6te Potenz einer Zahl teilbare Zahl, und ist D durch $z^3 - y^2$ darstellbar, so ist auch, falls $D \neq -1, \neq 2^4 \cdot 3^3$ ist, $-27D$ durch $z^3 - y^2$ darstellbar.*

Die beiden Ausnahmedarstellungen von D , die keine Darstellung von $-27D$ ergeben, sind:

$$D = -1; y = \pm 3, z = 2; \quad 2^3 - 3^2 = -1.$$

$$D = 2^4 \cdot 3^3; y = \pm 2^2 \cdot 3^2, z = 2^2 \cdot 3; \quad (2^2 \cdot 3)^3 - (2^2 \cdot 3^2)^2 = 2^4 \cdot 3^3.$$

Gibt es in diesen Fällen andere Darstellungen von D , so ergeben dieselben Darstellungen von $-27D$.

Satz 1 ist wertvoll, weil er erlaubt, das Vorzeichen von D vorzuschreiben, z. B. $D < 0$.

2.

Berechnet man aus einer von diesen Ausnahmen verschiedenen Darstellung y, z von D eine solche von $-27D$, so kann man nach demselben Verfahren aus dieser eine solche von $27 \cdot 27D = 3^6 \cdot D$ berechnen. Auf den Faktor 3^6 kommt es nicht an. Wir haben somit wieder eine Darstellung von D durch $z^3 - y^2$ gefunden. Ich behaupte, daß durch dieses Verfahren unendlich viele *verschiedene* Darstellungen von D gefunden werden.

Um dies zu beweisen, führen wir ganze Zahlen ein. Es sei x_0 der kleinste gemeinsame Nenner von y und z ; dann setzen wir $y = y_0/x_0$, $z = z_0/x_0$, wo x_0, y_0, z_0 ganze von null verschiedene Zahlen *ohne gemeinsamen Faktor* sind. Sie befriedigen die Gleichung:

$$z_0^3 = x_0 (y_0^2 + Dx_0^2) \quad (1)'$$

Wir sagen eine Zahl a sei *genau* durch die Primzahlpotenz p^r teilbar, wenn:

$$a \equiv 0 \pmod{p^r} \not\equiv 0 \pmod{p^{r+1}}.$$

Ist x_0 genau durch p^r teilbar, so ist sicherlich auch z_0 durch p teilbar, somit muß y_0 zu p teilerfremd sein. Also ist $y_0^2 + Dx_0^2$ nicht durch p teilbar, und z_0^3 muß genau durch p^r teilbar sein. r ist ein Vielfaches von 3. Macht man diese Ueberlegung für jede in x_0 enthaltene Primzahlpotenz, so folgt, daß x_0 die 3. Potenz einer Zahl t ist. Auch z_0 muß durch t teilbar sein. Wir setzen:

$$x_0 = t^3, z_0 = zt;$$

die Gleichung (1)' lautet daher:

$$z^3 = y^2 + Dt^6, \quad (1)''$$

wo $y = y_0$, und y, z, t ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler sind. Zugleich setzen wir y und t als *positiv* voraus.

Die Transformationsgleichungen (2) lauten für y, z, t :

$$\begin{aligned} Z &= y^2 - 3Dt^6, \\ Y &= \pm y(y^2 \pm 9Dt^6), \\ T &= \pm zt, \end{aligned} \quad (2)''$$

und Y, Z, T befriedigen die Gleichung:

$$Z^3 = Y^2 - 27DT^6. \quad (3)$$

Wir setzen auch Y und T als positiv voraus, wodurch das Vorzeichen in (2)'' bestimmt ist. Es sei p eine Primzahl, die in allen drei Zahlen Y, Z, T aufgehe. Dann geht p in Y wegen (3) wenigstens zur 2^{ten} Potenz auf, somit p in Z ebenfalls zur 2^{ten} Potenz, also p in Y zur dritten Potenz. Man kann jetzt T durch p , Y durch p^3 , Z durch p^2 kürzen, und die gekürzten Zahlen genügen wieder der Gleichung (3). Das setzt man so lange fort, bis T, Y, Z keinen gemeinsamen Teiler mehr besitzen. Es seien T', Y', Z' die schließlich gefundenen Zahlen. Ist:

$$T = T' \tau, \quad \tau > 0,$$

so muß:

$$Y = \tau^3 Y', \quad Z = \tau^2 Z', \quad Z'^3 = Y'^2 - 27DT'^6,$$

sein. Nun ist sicherlich:

$$T' \geq t.$$

Denn τ hat keinen Faktor mit t gemein. Wäre nämlich die Primzahl p in τ und t enthalten, so wäre wegen (2)'' auch y , also auch z durch p teilbar, und y, z, t hätten gegen Voraussetzung einen gemeinsamen Teiler. Wegen (2)'' ist daher τ ein Teiler von z , und:

$$T = \tau \cdot T' = |z| t, \quad T' = \frac{|z|}{\tau} \cdot t \geq t.$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn $\tau = |z|$ ist. Aus Y', T', Z' berechnen wir nach demselben Verfahren ein Lösungssystem y', z', t' ohne gemeinsamen Faktor, das (1)'' befriedigt, und so fort. Man erhält

so eine Reihe von positiven Zahlen $t, T', t', T_1', t_1', T_2', \dots$, für die die Ungleichungen gelten:

$$t \leq T' \leq t' \leq T_1' \leq t_1' \leq T_2' \leq t_2' \leq T_3' = \dots$$

Bei t' tritt sogar noch ev. der Faktor 3 hinzu, da D den Faktor 3^6 erhält. Sollen wir nur auf endlich viele Lösungen von (1)'' stoßen, so muß von einem bestimmten t' an nur noch das Gleichheitszeichen auftreten. Wir nehmen an, dies sei schon für t selbst der Fall. Dann muß:

$$T' = t, \tau = |z|, Y = |z^3| Y', Z = z^2 Z' \quad (4)$$

sein. Wir beweisen sukzessive:

a) z^2 muß Teiler von $4D$ sein. Denn es ist:

$$Z = y^2 + Dt^6 - 4Dt^6 = z^3 - 4Dt^6 \equiv 0 \pmod{z^2},$$

und da t zu z teilerfremd sein muß, ist $4D$ durch z^2 teilbar.

b) Ist p ein Primteiler von D , und besitzen y, z nicht den gemeinsamen Faktor p , so sind auch $Y', Z', y', z'; Y_1' Z_1'; \dots$ ohne diesen gemeinsamen Faktor.

Denn y, z können wegen (1)'' nur beide durch p teilbar sein, oder beide zu p teilerfremd. Die Formeln (2)'' zeigen dann sofort die Richtigkeit der Aussage.

c) Ist p eine ungerade Primzahl, und z durch p^r genau teilbar, so muß nach a) D durch p^{2r} , und wegen (1)'' y durch p^r teilbar sein. Wir setzen:

$$y = p^r \cdot y_1, z = p^r \cdot z_1, D = p^{2r} \cdot D_1.$$

Wegen (1)'' ist dann:

$$y_1^2 + D_1 \cdot t^6 \equiv 0 \pmod{p^r}.$$

Hätten nun Y' und Z' wieder den Teiler p , so müßte:

$$\frac{Z}{p^{2r}} = y_1^2 - 3D_1 \cdot t^6 \equiv 0 \pmod{p}$$

sein. Daraus folgt zusammen mit der vorigen Kongruenz:

$$D_1 \equiv 0 \pmod{p}, y_1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Dann kann aber nur $r = 1$ sein. Denn r kann höchstens 2 sein, da D nicht durch 6te Potenzen teilbar ist. Wäre aber $r = 2$, so müßte D durch p^6 teilbar sein, was wegen (1) unmöglich ist, sobald z durch p teilbar ist.

Ist aber $r = 1$, so muß D genau durch p^3 teilbar sein, also y durch p^2 , falls Y' und Z' wieder den gemeinsamen Faktor p haben. Wir sehen daraus, daß Z' nur solche ungeraden Primzahlen zur ersten Potenz enthalten darf, die in D genau zur 3ten Potenz aufgehen. Wegen b) wird dasselbe auch für z' der Fall sein. *Wir können also schon z so voraussetzen, daß es nur eine Potenz von 2 und diejenigen Primzahlen genau zur ersten Potenz enthalten darf, die in D genau zur dritten Potenz aufgehen.*

d) Ist jetzt $p = 2$, z gerade, und geht 2 in D genau zur k ten Potenz auf, so kann k nur $= 0, 2, 3, 4$ sein. Ist $k = 2$ oder 4, so ist auch y^2 genau durch die k te Potenz von 2 teilbar. Nun ist wegen a) z höchstens durch $2^{1 + \frac{k}{2}}$ teilbar. Somit haben wir die Fälle:

$$\begin{aligned} D &= 2^2 \cdot D_1, \quad z = 2^r \cdot z_1, \quad y = 2 \cdot y_1, \quad r \leq 2, \\ D &= 2^4 \cdot D_1, \quad z = 2^r \cdot z_1, \quad y = 2^2 \cdot y_1, \quad r \leq 3. \end{aligned} \quad D_1, z_1, y_1, \text{ ungerade.}$$

Ist $D = 2^3 \cdot D_1$, D_1 ungerade, so muß auch z genau durch 2, y durch 2^2 teilbar sein. Ist D ungerade, so ist z wegen a) genau durch 2 teilbar.

e) y ist stets durch 3 teilbar. Denn es ist:

$$Z \equiv y^2 \pmod{3}, \quad Y \equiv y^3 \pmod{3}.$$

Wiederholen wir das Verfahren, so ist das neue $z_1 = \tau' \cdot z'$ nicht nur durch $z^2 \cdot Z^2$ nach früherem teilbar, sondern durch $9z^2 \cdot Z^2$, weil D noch mit 3^6 multipliziert ist, und sonst $t' > t$ würde, gegen Voraussetzung. Nun ist aber nach (2) :

$$z_1 \equiv Y^2 \equiv y^6 \pmod{3},$$

also y durch 3 teilbar.

f) Wir dürfen jetzt $z = m \cdot 2^r$ setzen, wo m nur einfache ungerade Primteiler besitzt, die in D genau zur 3ten Potenz aufgehen. Es sei:

$$D = m^3 \cdot n, \quad (m, n) = 1.$$

Dann ergibt (1)'' auch $y = m^2 \cdot y_1$, und die Gleichung lautet:

$$2^{3r} = my_1^2 + nt^6.$$

Wir dürfen stets D , also auch m, n als *positiv* voraussetzen. Ist n *ungerade*, so ist immer $r \leq 1$. Die Gleichung ist unmöglich. Dies gilt für alle Fälle, wo $r \leq 1$ ist, wegen e). Ist $n = 2^2 \cdot n_1$, n_1 ungerade, so ist nach d) $r = 2$, und $y = 2y_1$, und die Gleichung lautet:

$$2^4 = my_1^2 + n_1 \cdot t^6, \quad r = 2,$$

welche Gleichung wegen e) nur die Lösung: $n_1 = 7$, $t = 1$, $y_1 = 3$, $m = 1$, besitzt. Man sieht sofort, daß diese Lösung zu einem $z' = 37$ führt, also zu unendlich vielen Lösungen.

Ist $n = 2^4 \cdot n_1$, n_1 ungerade, so ist $r \leq 3$, $y = 2^2 \cdot y_1$, also:

$$2^{3r-4} = my_1^2 + n_1 t^6, \quad r \leq 3$$

was nur die Lösungen $r = 3$, $t = 1$, $m = 1$ und $t = 1$, $m = 3$, zuläßt, also $y_1 = 3$, $n_1 = 23$, oder $n_1 = 5$. Hier wird aber $Z' = -5$, resp. $Z' = 3 \cdot 107$; es gibt also unendlich viele Lösungen.

Damit ist in allen Fällen der Satz bewiesen:

Satz 2: Ist $D \neq -1$, $\neq 2^4 \cdot 3^3$, so besitzt die Gleichung:

$$z^3 - y^2 = D,$$

keine oder unendlich viele Lösungen.

Dabei sind die trivialen Lösungen nicht berücksichtigt.

3.

Betrachten wir jetzt die Ausnahmefälle $D = -1$ und $= 2^4 \cdot 3^3$. Wäre für den zweiten Wert von D : z, y eine Lösung, so folgt aus:

$$z^3 - y^2 = 2^4 \cdot 3^3,$$

die Gleichung:

$$z^3 = \left(2 \cdot 3 + \frac{y}{2 \cdot 3}\right)^3 + \left(2 \cdot 3 - \frac{y}{2 \cdot 3}\right)^3,$$

was nach dem Fermat'schen Satze nur möglich ist, wenn:

$$y = \pm 2^2 \cdot 3^2.$$

Dies ist die oben angegebene einzige Lösung.

Im Falle $D = -1$ hat Euler⁶⁾ bewiesen, daß (1) nur die eine, oben angegebene Lösung (in unserm Sinne) besitzt. Dieser Euler'sche Satz, der also die diophantische Gleichung:

$$z^3 + 1 = y^2 \quad (5)$$

betrifft, kann nach meiner Methode so bewiesen werden: Besitzt (5) eine weitere Lösung, als $z = 2, y = \pm 3$, so kann man, entsprechend den Ausführungen des Abschnittes 1., setzen:

$$X = tz^3, \quad Y = ty \left(1 - \left(\frac{y}{3}\right)^2\right), \quad Z = tz \left(1 + \frac{y^2}{3}\right),$$

wo t eine solche rationale Zahl $\neq 0$ ist, daß die drei Zahlen X, Y, Z ganz, > 0 , und ohne gemeinsamen Teiler sind. Diese drei Zahlen sind alle von null verschieden, da $y \neq \pm 3$ ist, und genügen der Gleichung:

$$Z^3 = X(X^2 + 3Y^2). \quad (6)$$

Man setzt jetzt:

$$u^3 - 3XZu - 2X^3 = 0. \quad (a)$$

Diese kubische Gleichung von u besitzt die Diskriminante:

$$d = 4 \cdot 3^3 \cdot X^3 \cdot Z^3 - 4 \cdot 3^3 \cdot X^6 = 4 \cdot 3^4 \cdot X^4 \cdot Y^2.$$

Sie muß daher entweder in drei lineare Faktoren mit rationalen Koeffizienten zerfallen, oder eine irreduzible, absolut Abelsche Gleichung sein.

A) (a) zerfalle. Die ganzen rationalen Wurzeln seien q, r, s . Dann ist:

$$q + r + s = 0, \quad qrs = 2X^3.$$

Jeder Faktor von zweien der Zahlen q, r, s muß auch in der dritten aufgehen. Also kann man setzen:

$$q = 2q_0^3 \cdot \tau, \quad r = r_0^3 \cdot \tau, \quad s = s_0^3 \cdot \tau, \quad q_0 > 0,$$

⁶⁾ L. Euler, Opera omnia I. 2. Lipsiæ 1915, S. 56.

wo q_0, r_0, s_0 ohne gemeinsamen Teiler, und r_0, s_0 ungerade sind. Dann ist:

$$2q_0^3 + r_0^3 + s_0^3 = 0.$$

Setzt man hier:

$$-r_0 = X_0 + Y_0, \quad -s_0 = X_0 - Y_0,$$

wo X_0 und Y_0 ganz und ohne gemeinsamen Teiler mit q_0 sind, so folgt:

$$q_0^3 = X_0(X_0^2 + 3Y_0^2).$$

Somit hat man in q_0, X_0, Y_0 , wieder eine Lösung von (6) gefunden. Es ist aber:

$$q_0 \leq X < Z,$$

somit müßen wir nach endlich vielen Schritten zu einer irreduziblen Gleichung (a) gelangen.

B) (a) ist irreduzibel. (a) legt einen kubischen, absolut Abelschen Körper K fest. In seiner Diskriminante können nur Teiler von $6X$ auftreten. Denn wäre \mathfrak{P} ein in der Diskriminante aufgehendes Primideal von K , das zu $6X$ teilerfremd ist, so müssen die drei Wurzeln von (a) (mod. \mathfrak{P}) einander kongruent sein, die Spur $S(u)$ von u muß somit die Kongruenz erfüllen:

$$S(u) \equiv 3u \pmod{\mathfrak{P}}.$$

Andererseits ist die Spur null, also muß $3u$ durch \mathfrak{P} , also auch u durch \mathfrak{P} teilbar sein, also auch die Norm $2X^3$, gegen Annahme. Ist aber \mathfrak{P} ein Teiler von X , der nicht in 6 enthalten ist, so ist $\mathfrak{P}^3 = (p)$, wo p eine rationale Primzahl ist. u und seine Konjugierten sind durch dieselbe Potenz von \mathfrak{P} teilbar. Ist also u genau durch \mathfrak{P}^r teilbar, so ist die Norm genau durch $\mathfrak{P}^{3r} = p^r$ teilbar. Da $p \neq 2$, ist daher X genau

durch $p^{\frac{r}{3}}$ teilbar. r ist durch 3 teilbar, $r = 3n$, und wir können die Gleichung (a) durch p^{3n} kürzen:

$$\left(\frac{u}{p^n}\right)^3 - 3 \cdot \frac{XZ}{p^{2n}} \left(\frac{u}{p^n}\right) - 2 \left(\frac{X}{p^n}\right)^3 = 0.$$

Jetzt ist die Norm zu p teilerfremd, und derselbe Beweis wie vorhin zeigt, daß p nicht in der Diskriminante aufgehen kann.

Die Diskriminante von K kann somit nur 2 und 3 enthalten. Nun ist jeder Abelsche Körper ein Kreiskörper. Es gibt aber keinen kubischen Kreiskörper, der 2 in der Diskriminante enthält. Also kann letztere nur 3 enthalten. Es gibt nur *einen* kubischen Kreiskörper, dessen Diskriminante nur 3 enthält, nämlich den kubischen Unterkörper der 9ten Einheitswurzeln, der durch:

$$v = \sqrt[3]{\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}},$$

gegeben ist. Daher muß eine Wurzel u von (a) die Form haben:

$$\frac{u}{X} = \frac{r + s\sqrt{-3}}{2t} \sqrt[3]{\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}} + \frac{r - s\sqrt{-3}}{2t} \sqrt[3]{\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}},$$

wo r, s, t ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler sind, und $t > 0$ ist. Setzt man dies in (a) ein, so wird:

$$\left(\frac{r + s\sqrt{-3}}{2t}\right)^3 \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} + \left(\frac{r - s\sqrt{-3}}{2}\right)^3 \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} = 2,$$

oder:

$$-r^3 + 9rs^2 - 9r^2 \cdot s + 9s^3 = 16t^3.$$

Ist r , also auch t zu 3 teilerfremd, so folgt:

$$r^6 \equiv 4t^6 \pmod{9}, \text{ oder } 1 \equiv 4 \pmod{9},$$

was unmöglich ist. Ist dagegen r durch 3 teilbar, also auch t , so ist s zu 3 teilerfremd, und es folgt:

$$9s^3 \equiv 0 \pmod{27},$$

was gegen Annahme ist. Damit ist der Widerspruch gefunden, und (5) kann nur die eine, oben angegebene Wurzel besitzen. Die Tatsache ergibt sich auch ohne weiteres aus dem Zerlegungssatz der Primzahl 2 im Körper der 9. Einheitswurzeln. Somit haben wir den Ergänzungssatz:

Satz 3: Die diophantische Gleichung:

$$z^3 - y^2 = D,$$

hat in den beiden Fällen $D = -1$ und $D = 2^4 \cdot 3^3$ eine und nur eine Lösung, falls man die beiden Lösungen, in denen y entgegengesetztes Vorzeichen hat, nur als eine rechnet.

Es entsteht so das wichtige Problem, zu entscheiden, wann (1) keine und wann (1) unendlich viele Lösungen hat, falls D von den beiden Ausnahmefällen verschieden ist.

4.

Auf (1) kann man die allgemeinere diophantische Gleichung:

$$nz^3 - my^2 = r \tag{7}$$

zurückführen. Man darf wieder n, m, r als ganze rationale Zahlen voraussetzen. Erweitert man (7) mit $n^2 \cdot m^3$, so folgt:

$$(nmz)^3 - (n \cdot m^2 \cdot y)^2 = r \cdot n^2 \cdot m^3,$$

also (1) für $D = r \cdot n^2 \cdot m^3$. Umgekehrt folgt aus einer Lösung von:

$$z^3 - y^2 = r \cdot n^2 \cdot m^3,$$

durch Division mit $n^2 \cdot m^3$:

$$n \left(\frac{z}{nm} \right)^3 - m \left(\frac{y}{nm^2} \right)^2 = r,$$

also eine Lösung von (7). (7) ist somit immer gelöst, wenn man die Lösungen für alle Werte von D in (1) kennt.

Berücksichtigt man dies, so sieht man, daß das oben genannte tief-
liegende Problem bisher nach dem *Nagell'schen Mémorial* nur in wenigen Fällen gelöst ist:

I. Wenn $D = -m^3$, also (7) so lautet:

$$z^3 - my^2 = -1,$$

hat Nagell bewiesen, daß keine Lösungen existieren, wenn D höchstens durch 3 und Primzahlen der Form $12r + 5$ teilbar ist.⁷⁾

II. In meiner oben genannten Abhandlung habe ich gezeigt, daß, wenn:

$$D = -2^4 \cdot m^3,$$

und $m \equiv 2 \pmod{3}$ und negativ ist, oder -3 mal einer solchen Zahl ist, (1) nur eine Lösung haben kann, falls die Klassenzahl von $k(\sqrt{m})$ durch drei teilbar ist. Denn (7) lautet jetzt:

$$4z^3 = 1 - my^2,$$

was sich so schreiben läßt:

$$z^3 = \left(\frac{1}{2} + \frac{y\sqrt{-3m}}{2 \cdot 3} \right)^3 + \left(\frac{1}{2} - \frac{y\sqrt{-3m}}{2 \cdot 3} \right)^3,$$

somit entspricht jeder Lösung eine solche der diophantischen Gleichung:

$$\xi^3 + \eta^3 + \zeta^3 = 0.$$

Ist dieselbe aber in $k(\sqrt{-3m})$ lösbar, so ist sie es auch in $k(\sqrt{m})$ (Satz 1).

Im folgenden werde ich einen viel allgemeineren Satz beweisen.

5.

Wir setzen voraus, daß D eine *positive* Zahl ist, die nur dann durch eine ungerade Quadratzahl n^2 teilbar ist, wenn der Quotient D/n^2 nicht zu n teilerfremd ist. D enthält somit die ungeraden Primteiler nur in Potenzen mit *ungeraden* Exponenten. Außerdem setzen wir voraus:

$$D \equiv 7 \pmod{9}, \quad D \not\equiv -1 \pmod{4}, \quad D \not\equiv -4 \pmod{16}. \quad (8)$$

Gleichung (1) besitze dann eine Lösung y_0, z_0 :

$$z_0^3 - y_0^2 = D.$$

Nach den Entwicklungen unter 2. muß dann auch:

$$z^3 = y^2 + Dt^6, \quad z > 0, \quad (9)$$

⁷⁾ Mémorial, S. 56.

eine Lösung in den drei ganzen rationalen, von null verschiedenen Zahlen y, z, t ohne gemeinsamen Teiler besitzen. Dann ist:

$$y \equiv 0 \pmod{3}.$$

Denn wäre y durch 3 teilbar, so wäre z und t zu 3 teilerfremd wegen (8). Somit müßte:

$$z^3 \equiv Dt^6 \equiv 7 \pmod{9} \equiv 1 \pmod{3}$$

sein. Daraus folgt:

$$z \equiv 1 \pmod{3}, \quad z^3 \equiv 1 \pmod{9},$$

was der vorigen Kongruenz widerspricht. Somit ist y zu 3 teilerfremd.

Wir stellen die kubische Gleichung auf:

$$u^3 - 3zu - 2y = 0, \tag{a}$$

deren Diskriminante ist [wegen (9)]:

$$d = 4 \cdot 3^3 \cdot z^3 - 4 \cdot 3^3 \cdot y^2 = 4 \cdot 3^3 \cdot t^6 \cdot D.$$

Die *Cardani'sche*, resp. *del Ferri'sche* Formel ergibt dann für eine Wurzel u :

$$u = \sqrt[3]{y + t^3 \cdot \sqrt{-D}} + \sqrt[3]{y - t^3 \cdot \sqrt{-D}}.$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

A) (a) ist in $k(\sqrt{d}) = k(\sqrt{3D})$ irreduzibel. Dann ist in $k(\sqrt{-D})$:

$$\alpha^3 = (y + t^3 \cdot \sqrt{-D}),$$

wo α ein Ideal von $k(\sqrt{-D})$ ist. Denn y, t haben keinen gemeinsamen Teiler, also können $y + t^3 \cdot \sqrt{-D}$ und $y - t^3 \cdot \sqrt{-D}$ nur Teiler von 2 und D gemeinsam haben. Da ihr Produkt wegen (8) eine dritte Potenz ist, muß $(y + t^3 \cdot \sqrt{-D})$ bis auf Teiler von $2D$ nur durch dritte Potenzen von Idealen teilbar sein. Nach den über D gemachten Angaben gehen alle ungeraden Teiler von D auch in der Diskriminante von $k(\sqrt{-D})$ auf, ihre Idealteiler sind ihren Konjugierten daher gleich, und

sind somit in $(y + t^3 \cdot \sqrt{-D})$ und $(y - t^3 \cdot \sqrt{-D})$ gleich oft, somit ebenfalls zur dritten Potenz enthalten. Ist z ungerade, so tritt kein Teiler von 2 in beiden Zahlen auf, und unsere Behauptung ist erwiesen. Ist z gerade, y gerade, so wird auch, da dann t ungerade sein muß, D gerade sein. Ist der Exponent von 2 in D ungerade, so geht 2 in der Diskriminante von $k(\sqrt{-D})$ auf; das in ihm aufgehende Primideal ist seinem Konjugierten gleich, und $y + t^3 \cdot \sqrt{-D}$ und $y - t^3 \cdot \sqrt{-D}$ enthalten dasselbe gleich oft. Dasselbe tritt ein, wenn D genau durch 2^{2k} teilbar ist, $D = 2^{2k} \cdot D_1$, und $D_1 \equiv -1 \pmod{8}$ ist. Ist $D_1 \equiv -1 \pmod{8}$, so kann wegen (8) D nur durch 2^4 teilbar sein. z ist wenigstens durch 2^2 teilbar. Setzt man:

$$z = 2^2 \cdot z_1, \quad y = 2^2 \cdot y_1$$

so ist y_1 ungerade, und

$$z_1^3 = \frac{y_1^2 + D_1 \cdot t^6}{4}.$$

Jetzt sind aber $\frac{1}{2}(y_1 + t^3 \cdot \sqrt{-D_1})$ und $\frac{1}{2}(y_1 - t^3 \cdot \sqrt{-D_1})$ teilerfremd, bezüglich den Teilern von (2), also dritte Potenzen von Idealen, somit auch: $z_1^3 \cdot \frac{1}{2}(y_1 + t^3 \cdot \sqrt{-D_1}) = y + t^3 \cdot \sqrt{-D}$. Ist aber y ungerade, z gerade, so ist D ungerade und $\equiv -1 \pmod{8}$, was wegen (8) ausgeschlossen ist. Damit ist unsere Aussage in allen Fällen bewiesen.

α ist aber kein Hauptideal in $k(\sqrt{-D})$. Denn wegen $D > 0$ und (8) kommen in $k(\sqrt{-D})$ nur die Einheiten ± 1 (ev. $\pm \sqrt{-1}$) vor, die alle Kuben von Einheiten des Körpers sind. Also müßte, wenn α Hauptideal wäre: $y + t^3 \cdot \sqrt{-D}$ die dritte Potenz einer Zahl von $k(\sqrt{-D})$ sein. Dann wäre aber (a) reduzibel, gegen Annahme. Daraus folgt, daß die Klassenzahl von $k(\sqrt{-D})$ durch drei teilbar sein muß.

B) (a) ist reduzibel in $k(\sqrt{3D})$. Es gibt drei ganze, rationale Zahlen r, s, n , ohne gemeinsamen Teiler, und so, daß n nur Teiler von D besitzen darf (also sicherlich nicht 3), für die:

$$y + t^3 \cdot \sqrt{-D} = \frac{1}{n^3} (r + s \sqrt{-D})^3,$$

oder

$$(nt)^3 = s(3r^2 - Ds^2), \quad (b)$$

sein muß. Da y, t keinen Teiler gemein haben, so haben auch r und s mit t keinen gemeinsamen Teiler. Wir unterscheiden die Unterfälle:

a) t zu 3 teilerfremd. Dann ist auch s zu 3 teilerfremd. Somit sind $3r, s, t$ drei ganze Zahlen, ohne gemeinsamen Teiler. Daraus folgt wie früher, daß: $s = t_1^3$ und $t = t_1 \cdot t_2$ ist. (b) lautet jetzt:

$$t_2^3 = 3r^2 - Dt_1^6. \quad (10)$$

r ist durch 3 teilbar, denn sonst ist, da t_1 und t_2 zu 3 teilerfremd sind:

$$\pm 1 \equiv 3 - 7 \equiv 5 \pmod{9},$$

was unmöglich ist. Dann ist aber:

$$\pm 1 \equiv Dt_1^6 \equiv 7 \pmod{9},$$

was ebenfalls unmöglich ist. Dieser Fall ist auszuschließen.

b) t ist durch 3 teilbar. Dann ist s durch 9 teilbar. Man setze:

$$s = 9s_0, \quad nt = 3t_0.$$

(b) kann durch 3^3 gekürzt werden, und lautet jetzt so:

$$t_0^3 = s_0(r^2 - 3^3 \cdot Ds_0^2) \quad (b)'$$

r ist sicher nicht durch 3 teilbar, also haben $t_0, r, 3s_0$ keinen gemeinsamen Teiler, und es folgt: $s_0 = t_1^3, t_0 = t_1 \cdot t_2$. Somit lautet (b)':

$$t_2^3 = r^2 - 3^3 \cdot Dt_1^6. \quad (10)'$$

Man setzt:

$$v = \sqrt[3]{r + 3t_1^3 \cdot \sqrt{3D}} + \sqrt[3]{r - 3t_1^3 \cdot \sqrt{3D}}, \quad (11)$$

$$r \not\equiv 0 \pmod{3}.$$

Es kann folgendes eintreten:

I. v ist die Wurzel einer in $k(\sqrt{-D})$ irreduzibeln Gleichung.

v legt einen zu $k(\sqrt{-D})$ relativabelschen Körper K fest. Die Relativdiskriminante von v in bezug auf $k(\sqrt{-D})$ ist:

$$d = -(2 \cdot 3^2 \cdot t_1^3)^2 \cdot D.$$

Wegen (10)' kann die Relativediskriminante von K zu $k(\sqrt{-D})$ kein zu (3) teilerfremdes Primideal enthalten. Denn die Radikanden der dritten Wurzeln von v sind dritte Potenzen von Idealen (Beweis wie früher). (3) ist wegen (8) Primideal in $k(\sqrt{-D})$. Es kann ebenfalls nicht in der Relativediskriminante auftreten. Denn die Radikanden der dritten Wurzeln sind (mod. $\sqrt{3} \cdot 3$) dem Kubus einer Zahl des Körpers $k(\sqrt{3D})$ kongruent, wegen (10)':

$$r + 3 \cdot t_1^3 \cdot \sqrt{3D} \equiv r \equiv (\pm 1)^3 \pmod{3\sqrt{3}}.$$

Die Relativediskriminante von K zu $k(\sqrt{-D})$ ist daher eins, und die Klassenzahl von $k(\sqrt{-D})$ ist durch drei teilbar.

II. v genügt einer in $k(\sqrt{-D})$ reduzibeln kubischen Gleichung. Dann ist:

$$r + 3t_1^3 \cdot \sqrt{3D} = \frac{1}{n_1^3} (r_1 + s_1 \sqrt{3D})^3,$$

wo r_1, s_1, n_1 ganze rationale Zahlen ohne gemeinsamen Teiler, und darum auch r_1, s_1 ohne gemeinsamen Teiler mit t_1 sind. Es muß:

$$(n_1 \cdot t_1)^3 = s_1 (r_1^2 + s_1^2 \cdot D),$$

also wieder:

$$s_1 = t'^3, \quad n_1 \cdot t_1 = t' \cdot s',$$

sein, und:

$$s'^3 = r_1^2 + D \cdot t'^6, \tag{12}$$

wo auch t', r_1, s' ohne gemeinsamen Teiler sind. Man hat somit in s', r_1, t' , eine neue Lösung der Gleichung (9) gefunden.

Nun war sukzessive:

$$t' s' = n_1 \cdot t_1, \quad t_0 = t_1 \cdot t_2, \quad nt = 3 \cdot t_0, \text{ also:}$$

$$3 t_2 t' s' = 3 t_2 \cdot n_1 \cdot t_1 = 3 t_0 \cdot n_1 = n_1 \cdot n \cdot t.$$

Andererseits enthalten n und n_1 nur Primteiler von D , und zwar nur solche, die in D wenigstens zur 3^{ten} Potenz aufgehen. Ist p ein solcher, und geht p in D zur dritten Potenz genau auf, so ist n oder n_1 höchstens einfach durch p teilbar. Geht p zur fünften Potenz auf, so ist n oder n_1 höchstens durch p^2 teilbar. Nun ist r sicherlich durch n , und r_1 durch n_1 teilbar. Somit kann, wenn p zur fünften Potenz in D aufgeht, n , resp. n_1 nicht durch p teilbar sein wegen (10)' und (12), da sonst p auch in t_2 , resp. t' aufgehen müßte. Also enthält n resp. n_1 alle Primteiler nur zur ersten Potenz, und es muß wegen derselben Gleichungen t_2 durch n , s' durch n_1 teilbar sein. Dann ergibt aber die Beziehung zwischen t' und t :

$$t' < t.$$

Wiederholt man jetzt die ganze Ueberlegung für die neue Lösung von (9), so kommt man entweder zu einer irreduzibeln Gleichung, und die Klassenzahl von $k(\sqrt{-D})$ ist durch drei teilbar, oder zu einer neuen Lösung von (9) mit wieder kleinerem t . Da dies nur endlich oft eintreten kann, so muß man immer nach endlich vielen Schritten zum ersten Falle kommen. Die Klassenzahl von $k(\sqrt{-D})$ ist daher stets durch drei teilbar.

Satz 4: *Ist D eine positive, ganze rationale Zahl, die alle ungeraden Primteiler in ungerader Potenz enthält, so besitzt die diophantische Gleichung:*

$$z^3 - y^2 = D,$$

keine Lösung, falls:

$$D \equiv 7 \pmod{9}, \quad D \equiv -1 \pmod{4}, \quad D \equiv -4 \pmod{16},$$

ist, und die Klassenzahl von $k(\sqrt{-D})$ nicht durch drei teilbar ist.

Wegen Satz 1 gilt der Satz auch für alle $D = -3^3 \cdot D_1$, wo D_1 die in Satz 4 für D angegebenen Bedingungen erfüllt.

Die über D gemachten Bedingungen sind wesentlich. Man kann dies durch Beispiele zeigen. Z. B. ist für $D = 7 \equiv -1 \pmod{4}$:

$$2^3 = 1 + 7, \text{ Klassenzahl von } k(\sqrt{-7}): h = 1,$$

und für $D = 4 \cdot 103 \equiv 7 \pmod{9}$, und $\equiv -4 \pmod{16}$:

$$2^9 = 10^2 + 4 \cdot 103, \text{ Klassenzahl von } k(\sqrt{-103}): h = 5;$$

Für $D = 13 \equiv 4 \pmod{9}$ ist:

$$17^3 = 70^2 + 13, \text{ Klassenzahl von } k(\sqrt{-13}): h = 2.$$

Satz 4 enthält auch die in meiner Arbeit angegebenen Resultate, falls man $D = -2^4 \cdot m^3$ setzt, wo $m \equiv 2 \pmod{3}$ und negativ ist. Denn es ist dann sicherlich $D \equiv 7 \pmod{9}$, und $D \equiv -1 \pmod{4}$ und $\equiv -4 \pmod{16}$. Es fehlt nur noch der Nachweis, daß jede Lösung der diophantischen Gleichung:

$$\xi^3 + \eta^3 + \zeta^3 = 0,$$

auch eine solche der Gleichung (1) resp. (7) bedingt. Diesen Nachweis führen wir mit einem von *Burnside* angegebenen Gedanken⁸⁾.

6.

Es sei die diophantische Gleichung:

$$\xi^3 + \eta^3 + \zeta^3 = 0,$$

im quadratischen Körper $k(\sqrt{m})$ in ganzen Zahlen $\neq 0$ lösbar. Alle drei Zahlen ξ, η, ζ können nicht rational sein, wegen des Fermat'schen Satzes für den Exponenten 3. Dagegen können wir z. B. ζ als eine ganze rationale Zahl $c \neq 0$ annehmen, da wir die ganze Gleichung stets mit der konjugierten $\bar{\zeta}$ erweitern können. ξ sei dann eine bestimmende Zahl von $k(\sqrt{m})$; man darf setzen:

$$\eta = a\xi + b,$$

wo a und b rationale Zahlen sind. Dann muß:

$$x^3 + (ax + b)^3 + c^3 = 0,$$

⁸⁾ *W. Burnside*, On the rational solutions of the equation $X^3 + Y^3 + Z^3 = 0$ in a quadratic field. Proc. London Math. Soc. vol. 14, 1915, S. 1.

die Wurzel ξ haben, die einer quadratischen Gleichung genügt. Die Gleichung muß also zerfallen, und eine rationale Wurzel haben. Wegen des Fermatschen Satzes kann diese rationale Wurzel nur:

$$x = 0, \text{ oder } ax + b = 0, \text{ oder } x = \infty$$

sein. Im ersten Falle folgt sofort $b = -c$, somit ist ξ Wurzeln der Gleichung:

$$(1 + a^3) x^2 - 3ca^2 x + 3c^2 a = 0,$$

woraus:

$$\xi = c \frac{3a^2 + \sqrt{-3a^4 - 12a}}{2(1 + a^3)}, \eta = c \frac{a^3 - 2 + a\sqrt{-3a^4 - 12a}}{2(1 + a^3)}, \zeta = c,$$

folgt. Erweitert man die ganze diophantische Gleichung mit dem konjugierten Werte von ξ , so ergibt sich:

$$\left(\frac{3ac^2}{1 + a^3}\right)^3 + \left(c^2 \frac{3a^2 + \sqrt{-3a^4 - 12a}}{2(1 + a^3)}\right)^3 + \left(c^2 \frac{3a^2 - \sqrt{-3a^4 - 12a}}{2(1 + a^3)}\right)^3 = 0,$$

welche Gleichung man noch durch Multiplikation mit einer rationalen Zahl in die Summe von drei ganzzahligen Kuben verwandeln kann. Hier ist aber eine Zahl rational, die beiden andern sind konjugiert.

Im zweiten Fall ergibt sich genau dasselbe. Es ist dieser nur eine Vertauschung von ξ und η . Im dritten Falle muß $a = -1$ sein, damit sich die Gleichung auf eine quadratische reduziert. Letztere lautet:

$$3bx^2 - 3b^2x + b^3 + c^3 = 0,$$

deren Wurzeln sind:

$$\xi = \frac{3b^2 + \sqrt{-3b^4 - 12bc^3}}{6b}, \eta = -x + b = \frac{3b^2 - \sqrt{-3b^4 - 12bc^3}}{6b}, \zeta = c.$$

Diese Zahlen sind aber wieder konjugiert. Somit gilt der Satz:

Satz 5: Ist die diophantische Gleichung:

$$\xi^3 + \eta^3 + \zeta^3 = 0,$$

durch von null verschiedene Zahlen des quadratischen Zahlkörpers $k(\sqrt{m})$ lösbar, so gibt es immer eine Lösung, in der die eine der drei Zahlen rational $\neq 0$, die beiden andern konjugiert $\neq 0$ sind.

Die Lösung der diophantischen Gleichung entspricht somit der Lösung der diophantischen Gleichung:

$$z^3 = \left(\frac{x + y\sqrt{m}}{2}\right)^3 + \left(\frac{x - y\sqrt{m}}{2}\right)^3, \text{ oder:}$$

$$4z^3 = x(x^2 + 3my^2),$$

in ganzen rationalen Zahlen x, y, z . Dividiert man durch x^3 , so wird eine Lösung von:

$$4z^3 = 3my^2 + 1,$$

erhalten. Dies entspricht nach Paragraph 4 einem $D = 2^4 \cdot (3m)^3$, nach Satz 1 ergibt sich dann auch eine Lösung für $D = -2^4 \cdot m^3$, oder von:

$$4z^3 = 1 - my^2.$$

Damit ist gezeigt, daß Satz 4 unsere frühern Resultate völlig enthält.

Ob die gefundenen Kriterien in gewissen Fällen hinreichend sind zur Auflösung der diophantischen Gleichung, kann ich nicht entscheiden. Nach dem Nagell'schen Resultate scheint es nicht wahrscheinlich. Immerhin ist für das kleinste D , das den Bedingungen von Satz 4 genügt, und für das die Klassenzahl von $k(\sqrt{-D})$ durch drei teilbar ist, nämlich $D = 61$:

$$5^3 = 8^2 + 61.$$

(Eingegangen den 16. Januar 1930)

