Ueber eine besondere Klasse von algebraischen Flächen.

Ueber eine besondere Klasse von algebraischen Flächen

Von ARNOLD EMCH, Urbana, Illinois

In einer kürzlich erschienenen Arbeit[1]) habe ich einige Tripel- und Multipel-Systeme untersucht, ihre geometrische Darstellung gegeben, und ihre endlichen Gruppeneigenschaften klargelegt. Daß mit solchen Systemen deren Untersuchung sich bis dahin systematisch nur mit Tripelsystemen befasste, interessante geometrische Formen im Zusammenhang stehen, hat man eigentlich erst in jüngster Zeit erkannt. Allerdings haben vor vielen Jahren schon Steiner und Nöther in speziellen Fällen auf solche Zusammenhänge hingewiesen. Insbesondere hat Nöther, auf die in Steiner's Arbeit enthaltenen Anregungen hin, wichtige Resultate in Bezug auf die 28 Doppeltangenten der allgemeinen Kurve vierter Ordnung erhalten. Man sehe dazu die Hinweise in[1]).

Ein weiteres geometrisches Problem, das sich beim Studium der Multipelsysteme aufdrängt, bezieht sich auf eine gewisse Klasse von algebraischen Flächen, in welcher die zu den Multipelsystemen gehörigen, besondere Fälle sind.

Die Definition einer solchen Fläche gründet sich auf ein vollständiges n-Eck in einem Raume von, sagen wir r Dimensionen. Darunter verstehen wir n allgemein gewählte Punkte in einem Raum von r Dimensionen mit all den Unterräumen von gewisser Ordnung, welche Untergruppen von den n Punkten bestimmen können. Ein solches n-Eck in einem solchen Raume Sr sei einfach mit $\triangle_n$ bezeichnet. Z. B. in einem S_2 besteht ein $\triangle_n$ aus den n-Ecken und ihren $\frac{1}{2}n(n-1)$ Verbindungslinien. In einem S_3 sei unter $\triangle_n$ gewöhnlich auch die n-Ecken und ihre $\frac{1}{2}n(n-1)$ Verbindungslinien verstanden. Im S_4 beschränken wir uns auf ein $\triangle_n$ mit n-Ecken, $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$ Verbindungsebenen von je drei Ecken, und $\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)$ Verbindungsräumen S_3 von je vier Ecken.

In dieser Arbeit handelt es sich über solche algebraische Flächen und Hyperflächen, welche durch so definierte vollständige n-Ecke, eventuell dazugehörige Unterräume derselben Ordnung gehen.

Die Anzahl solcher Flächen ist selbstverständlich unendlich groß (selbst die der Klassen). Einige davon sind wohl bekannt, wie z. B.

[1]) Triple and multiple systems, their geometric configurations and groups. Transactions of the American Mathematical Society, vol. 31 (1929), pp. 25—42.

Cayley's Fläche dritter Ordnung und die Weddle'sche Fläche. Hier werde ich mich auf Gebiete des S_3 und S_4 beschränken. Zuerst sollen jedoch einige Sätze über besondere Flächensingularitäten aufgestellt werden.

§ 1. Ueber die Singularitäten einer Fläche in S_3, in welcher k der Fläche angehörigen Geraden zusammenlaufen

Sei A_1 (1000) ein Punkt einer algebraischen Fläche F_n durch welchen k Geraden der Fläche gehen. Es handelt sich darum festzustellen, was für eine Singularität A_1 sei. Die k Geraden g_i können durch die Verbindungslinien von A_1 mit k in $x_1 = 0$ beliebig gelegenen Punkten $(0\, a_2^i\, a_3^i\, a_4^i)$, $i = 1, 2, 3, \ldots, k$, dargestellt werden. Man hat dann für g_i die parametrische Darstellung $g_i \equiv (\lambda, a_2^i, a_3^i, a_4^i)$. Diese Gerade liegt auf der Fläche

$$(1) \qquad F n = \sum_{m=1}^{n} x_1{}^{m-1} \cdot \Phi_{n-m+1}(x_2, x_3, x_4),$$

wenn

$$(2) \qquad \lambda^{n-1} \Phi_1 (a_2^i, a_3^i, a_4^i) + \lambda^{n-2} \Phi_2 (a_2^i, a_3^i, a_4^i) + \ldots + \Phi_n (a_2^i, a_3^i, a_4^i) = 0$$

für alle Werte von λ. (Darin sind die Φ_r Polynome r^{ten} Grades und homogen in a_2^i, a_3^i, a_4^i.)

Das wird nur der Fall sein, wenn alle Polynome Φ identisch verschwinden. Aus den n auf diese Weise erhaltenen Gleichungen kann man n der Koeffizienten der ursprünglichen Gleichung $F n = 0$ berechnen, so daß mit Einschluß von A_1 der bekannte Satz hervorgeht:

Die Bedingung, daß eine Gerade auf einer Fläche n^{ter} Ordnung liege, erfordert $n + 1$ von den $1/6\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3) - 1$ Konstanten.

Wenn zwei Geraden g_1 und g_2 der Fläche durch A_1 gehen, so erhält man von jedem Φ zwei Geichungen, aus denen zwei der Koeffizienten berechnet werden können. Gibt es drei solcher Geraden g_1, g_2, g_3, so können die drei Gleichungen

$$\Phi_1 (a_2^i, a_3^i, a_4^i) = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

nur dann identisch erfüllt sein, wenn die drei Koeffizienten von Φ_1 identisch verschwinden. Die drei Geraden g sollen allgemeine Richtungen haben, so daß die Determinante der Koordinaten der drei Punkte (a_2^i, a_3^i, a_4^i) nicht verschwindet.

Die Gleichung der Fläche hat also jetzt die Form

$$x_1^{n-2}\,\Phi_2 \ldots = 0,$$

so daß daraus folgt:

Satz 1: Wenn die Kanten eines eigentlichen Dreikants einer Fläche angehören, so ist die Ecke dez Dreikants wenigstens ein Doppelpunkt der Fläche.

Das Polynom Φ_2 hat 6 Koeffizienten, so daß 5 ihrer Verhältnisse aus 5 durch A_1 gehenden und auf F_n gelegenen Geraden bestimmt werden können, ohne daß Φ_2 identisch verschwindet. Der vorhergehende Satz gilt daher auch für 4 und 5 in A_1 zusammenlaufenden Linien. Hat man 6, 7, 8 oder 9 solche Geraden, so muß Φ_2 identisch verschwinden. Fährt man auf diese Weise fort, so ergibt sich leicht der allgemeinere

Satz 2: Gehen k Geraden einer Fläche durch einen Punkt, und ist

$$\frac{(r-1)\,(r+2)}{2} < k \leqq \frac{r\,(r+3)}{2},$$

so ist dieser Punkt wenigstens ein r-facher Punkt der Fläche.

Wird k zwischen diesen Grenzen gewählt, mit Ausschluß der obern Grenze, so gibt es wenigstens zwei unabhängige Kegel r^{ter} Ordnung durch die k Geraden. Seien K_1 und K_2 zwei solche Kegel, dann ist

$$K_1^2\,P_{n-2r} + K_1\,K_2\,Q_{n-2r} + K_2^2\,R_{n-2r} = 0$$

$(n \geqq 2r)$ eine Fläche n^{ter} Ordnung, welche A_1 als $2r$-fachen Punkt und die k Geraden als Doppellinien enthält. Dabei wurden die P, Q und R als Polynome von der angedeuteten Ordnung und allgemein angenommen. Unter diesen Voraussetzungen geben also k in einem Punkte zusammenlaufenden Doppelgeraden einer Fläche zu einem $2r$-fachen Punkte der Fläche Veranlassung. Die Ordnung eines solchen Punktes kann jedoch in speziellen Fällen auch weniger als $2r$ sein.

§ 2. Mehrfache Geraden auf einer Fläche

Im Gegensatz zu den gekünstelten synthetischen Beweisen für die Anzahl der Bedingungen welche notwendig ist, damit eine gegebene

Gerade einer algebraischen Fläche n^{ter} Ordnung r-fach angehöre[2]), läßt sich diese Zahl auf direktem algebraischen Wege sehr einfach bestimmen.

Bezeichnet man das Koordinatentetraeder mit $A_1 A_2 A_3 A_4$, so kann man etwa $A_3 A_4$ ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$) als r-fache Gerade wählen. Dann läßt sich die Fläche in der Form darstellen

$$
\begin{aligned}
&x_1^r \Phi_r^{n-r}(x_1 x_2 x_3 x_4) + x_1^{r-1} x_2 \Phi_{r-1}^{n-r}(x_2 x_3 x_4) + \dots \\
(3) \qquad &+ x_2^r \Phi_0^{n-r}(x_2 x_3 x_4) = 0.
\end{aligned}
$$

Die erste Funktion Φ_r^{n-r} enthält $^1/_6 (n-r+1)(n-r+2)(n-r+3)$ Glieder, während die übrigen Φ alle $^1/_2 (n-r+1)(n-r+2)$ Glieder enthalten. Subtrahiert man diese Zahlen von der Anzahl der Glieder einer allgemeinen Fläche n^{ter} Ordnung, so erhält man die gesuchte Zahl $^1/_6 (n+1)(n+2)(n+3) - {}^1/_6 (n-r+1)(n-r+2)(n-r+3) - {}^1/_2 r(n-r+1)(n-r+2) = {}^1/_6 r(r+1)(3n-2r+5)$. Daher

Satz 3: Die Bedingung, daß eine gegebene Gerade einer algebraischen Fläche n^{ter} Ordnung r-fach angehöre, erfordert

$$^1/_6 r(r+1)(3n-2r+5)$$

Konstanten.

Nun nehmen wir weiter an, daß zudem A_3 ein $(r+s)$-facher Punkt der Fläche sei, so daß in (3) in den Funktionen Φ alle Glieder verschwinden müssen, welche x_3 zu einer höhern als der $(n-r-s)^{\text{ten}}$ Potenz enthalten. Die Entwickelung von Φ_r^{n-r} nach absteigenden Potenzen von x_3 lautet:

$$
\begin{aligned}
&\Phi_0 x_3^{n-r} + x_3^{n-r-1} \Phi_1(x_1 x_2 x_4) + \dots \\
&+ x_3^{n-r-s+1} \Phi_{s-1}(x_1 x_2 x_4) + x_3^{n-r-s} \Phi_s(x_1 x_2 x_4) + \dots .
\end{aligned}
$$

Hierin müssen alle Glieder bis zum letzt geschriebenen (und folgenden) verschwinden. Die Anzahl dieser Glieder ist $1 + 3 + 6 + \dots {}^1/_2 s(s+1) = {}^1/_6 s(s+1)(s+2)$. Für jede der übrigen Φ in (3) haben wir die Entwickelung:

---

[2]) *R. Sturm,* Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften, Band 4 (1909), pp. 315—317.

$$\Psi_0 x_3^{n-r} + x_3^{n-r-1} \Psi_1 (x_2 x_4) + \ldots$$
$$+ x_3^{n-r-s+1} \Psi_{s-1} (x_2 x_4) + x_3^{n-r-s} \Psi_s (x_2 x_4) + \ldots .$$

Die Anzahl der verschwindenden Glieder in diesen r Funktionen ist $r(1+2+3+\ldots+s) = r/2 \,.\, s(s+1)$. Als Resultat ergibt sich

Satz 4: Damit ein Punkt auf einer Fläche n^{ter} Ordnung und auf einer r-fachen Geraden derselben $(r+s)$-fach sei, sind

$$1/6\, s(s+1)(s+2) + 1/2\, r s (s+1)$$

weitere Koustanten erforderlich. Für zwei solche Punkte braucht es

$$1/3\, s(s+1)(s+2) + r s (s+1)$$

Konstanten.

Nun kann das folgende Problem gelöst werden: Gegeben sind zwei $(r+s)$-fache Punkte auf einer Fläche n^{ten} Ordnung. Wie viele weitere Konstanten erfordert die Bedingung, daß die Verbindungslinie der beiden Punkte r-fach auf der Fläche sei? Ist x die Zahl dieser Konstanten, so hat man

$$2 \,.\, 1/6\,(r+s)(r+s+1)(r+s+2) + x = 1/6\, r(r+1)(3n-2r+5)$$
$$+ 1/3\, s(s+1)(s+2) + r s (s+1).$$

Daraus läßt sich x leicht berechnen und man erhält als Resultat

Satz 5: Die Bedingung, daß die Verbindungslinie zweier $(r+s)$-fachen Punkte einer Fläche n^{ter} Ordnung r-fach sei, erfordert

$$1/6\, r\,(3rn + 3n + 1 - 4r^2 - 3r - 6s - 6rs)$$

weitere Bedingungen.

1. *Beispiel einer Fläche 6. Ordnung.* Man bestimme die Fläche 6. Ordnung, welche die Ecken und Seiten des Koordinatentetraeders bezüglich als vierfache Punkte und zweifache Geraden enthält. Hier fällt x negativ aus, so daß die Seiten zum voraus der Fläche doppelt angehören. Die 4 vierfachen Punkte absorbieren $4 \,.\, 20 = 80$ der 83 Konstanten, folglich hängt die gesuchte Fläche von 3 effektiven Konstanten ab. Sie ergibt sich leicht als

$$a\, x_1^2 x_2^2 x_4^2 + b\, x_2^2 x_3^2 x_4^2 + c\, x_3^2 x_1^2 x_4^2 + d\, x_1^2 x_2^2 x_3^2 = 0.$$

2. *Beispiel einer Fläche 6. Ordnung.* Diese soll A_1, A_2, A_3, A_4 als dreifache Punkte und $A_i A_k$ als Doppelgeraden enthalten. Man findet für x den Wert 5, so daß diese Bedingungen zusammen $4 . 10 + 6 . 5 = 70$ ausmachen. Es bleiben somit $83 - 70 = 13$ verfügbare Konstanten. Die Fläche hat die Form

$$\begin{aligned}
&a_3 x_1^2 x_2^2 x_4^2 + a_1 x_2^2 x_3^2 x_4^2 + a_2 x_3^2 x_1^2 x_4^2 + a_4 x_1^2 x_2^2 x_3^2 + \\
&b_1 x_1^3 x_2 x_3 x_4 + b_2 x_2^3 x_1 x_3 x_4 + b_3 x_3^3 x_1 x_2 x_4 + b_4 x_4^3 x_1 x_2 x_3 + \\
&c_{12} x_1^2 x_2^2 x_3 x_4 + c_{13} x_1^2 x_3^2 x_2 x_4 + c_{14} x_1^2 x_4^2 x_2 x_3 + c_{23} x_2^2 x_3^2 x_1 x_4 + \\
&\qquad + c_{24} x_2^2 x_4^2 x_1 x_3 + c_{34} x_3^2 x_4^2 x_1 x_2 = 0.
\end{aligned}$$

§ 3. Algebraische Flächen, welche durch alle Seiten eines vollständigen räumlichen *n*-Ecks $\triangle_n$ gehen

1. Es sollen $g_1, g_2, \ldots, g_{1/2\, n\, (n-1)}$ die $1/2\, n\, (n - 1)$ Verbindungslinien der n-Ecken $A_1, A_2, \ldots, A_n$ bezeichnen. Wenn diese in allgemeiner Lage sind, so kann stets eine Klasse von Flächen n^{ter} Ordnung durch $\triangle_n$ konstruiert werden. Jede allgemein gelegene Gerade l wird von einer solchen Fläche in n Punkten und eine beliebige Ebene e in einer Kurve n^{ter} Ordnung geschnitten. Durch die feste Gerade l lege man eine beliebige Ebene h, welche eine feste Kurve n^{ter} Ordnung C_n in e in n Punkten und die g_i in $1/2\, n\, (n - 1)$ Punkten schneidet. Wählt man auf l noch n feste Punkte, so bilden diese mit den übrigen in h $n + n + 1/2\, n\, (n - 1) = 1/2\, n\, (n + 3)$ Punkte, durch welche eine Kurve n^{ter} Ordnung K_n in h bestimmt wird. Beschreibt h den Ebenenbüschel durch l, so beschreibt K_n eine Fläche n^{ter} Ordnung durch $\triangle_n$, zu welcher auch C_n als eine der K_n gehört ($h = e$). Somit muß C_n zum voraus durch die $1/2\, n\, (n - 1)$ Schnittpunkte der $A_i A_k$ mit e gelegt werden. Es bleiben auf diese Weise nur $1/2\, n\, (n + 3) - 1/2\, n\, (n - 1) = 2\, n$ verfügbare Konstanten für C_n übrig. Die n Punkte auf l kann man auf ∞^n verschiedene Arten wählen, so daß für die Fläche im ganzen $3\, n$ Konstanten verfügbar sind. Daher

Satz 6: Durch ein vollständiges räumliches n-Eck lassen sich ∞^{3n} Flächen n^{ter} Ordnung legen.

Nach Satz 2 sind die n-Ecken selbstverständlich Singularitäten der Fläche, welche alle g_i als einfache Geraden enthält. Wird die Multiplizität x einer Ecke nach diesem Satze bestimmt und bezeichnet man die

Anzahl der Bedingungen welche notwendig ist, damit die Fläche durch alle g_i gehe mit y, so wird diese aus der Gleichung

$$\tfrac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3) - 1 - \tfrac{n}{6}\,x(x+1)(x+2) = 3n + y$$

bestimmt.

1. *Beispiel:* Für eine F_4 durch $\triangle_4$ ergibt sich aus $3n$ eine 12-fache Mannigfaltigkeit. Die Multiplizität $x = 2$ und $y = 6$. Die Gleichung lautet

$$\sum x_i^2\,(a_i x_j x_l + b_i x_l x_k + c_i x_k x_j) + d\,x_1 x_2 x_3 x_4 = 0,$$

$\begin{pmatrix} i,\,j,\,l,\,k = 1,\,2,\,3,\,4 \\ i \neq j \neq l \neq k \end{pmatrix}$, und enthält 13 Glieder.

2. *Beispiel.* Die Flächen F_7 durch $\triangle_7$ haben die Manigfaltigkeit 21. Hier ist $x = 3$. Aus obiger Gleichung folgt $y = 28$, so daß also die Bedingung durch die 21 Verbindungsgeraden zu gehen nur 28 anstatt 42 Konstanten erfordert. Eine solche F_7 kann linear aus Produkten von Weddle'schen Flächen und kubischen Kegeln zusammengesetzt werden. Je sechs der sieben Punkte bestimmen eine Weddle'sche Fläche. Der siebente Punkt als Spitze und die sechs Knoten der Weddle'schen Fläche bestimmen ∞^8 kubische Kegel. Das Produkt jedes Kegels mit der zugehörigen Weddle'schen Fläche ist eine $F_7 = W_4 \,.\, K_3$, so daß die allgemeine F_7 auf $\triangle_7$ in der Form

$$\sum_{i=1}^{7} W_4^i \,.\, K_3^i = 0$$

dargestellt werden kann.

2. Aber auch Flächen der Ordnung $n - 1$ durch $\triangle_n$ sind möglich. Wählt man wieder eine feste Gerade l und darauf $n - 1$ feste Punkte, so schneidet jede Ebene h des Büschels durch l alle Geraden g_i, so daß also jede Ebene auf diese Weise $\tfrac{1}{2}n(n-1) + n - 1 = \tfrac{1}{2}(n-1)(n+2)$ Punkte erhält, die eine Kurve der Ordnung $n - 1$ bestimmen. Der Ort dieser Kurven auf den Ebenen des Büschels ist eine Fläche $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Satz 7. Durch ein vollständiges n-Eck im Raume läßt sich eine Mannigfaltigkeit von ∞^{n-1} Flächen $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung legen, die alle Verbindungsgeraden der Ecken einfach enthält.

Beispiel der Cayley'schen kubischen Fläche. Es gibt ∞^3 kubische Flächen durch $\triangle_4$ mit Doppelpunkten in A_1, A_2, A_3, A_4:

$$a_1 x_2 x_3 x_4 + a_2 x_1 x_3 x_4 + a_3 x_1 x_2 x_4 + a_4 x_1 x_2 x_3 = 0.$$

3. Schließlich handelt es sich um die Möglichkeit einer Fläche der Ordnung $n-2$ durch $\triangle_n$. Befolgt man das Prinzip der voraufgehenden Konstruktion, so findet man für die $^1/_2\, n\,(n-1)$ Schnittpunkte der g_i mit h schon

$$^1/_2\, n\,(n-1) = {}^1/_2\,(n-2)\,(n+1)+1,$$

also einen Punkt mehr, als zur Bestimmung der Kurve K_{n-2} notwendig ist. Eine solche Fläche F_{n-2} ist also im Allgemeinen nicht möglich und doch gibt es wenigstens eine solche Fläche, nämlich die Weddle'sche Fläche durch $\triangle_6$, welche bekanntlich von der 4. Ordnung ist. Man kann diese Tatsache aussprechen als

Satz 8: Durch die 15 Schnittpunkte einer beliebigen Ebene mit den Kanten eines vollständigen räumlichen Sechsecks läßt sich stets eine ebene Kurve 4. Ordnung legen.

Die Frage, ob es noch andere Flächen dieser Art gebe, bleibe gegenwärtig dahingestellt.

4. Es ist klar, daß Flächen von höherer als der n^{ten} Ordnung durch ein $\triangle_n$ in unbegrenzter Zahl existieren. Gestützt auf das frühere Konstruktionsprinzip können z. B. Flächen der Ordnung $n+m$ dadurch konstruiert werden, daß man zu $n+m$ festen Punkten der Geraden l und der festen Kurve C_{n+m} in e noch $^1/_2\, m\,(m+2n-1)$ beliebige feste Geraden des Raumes hinzunimmt, durch welche jede C_{n+m} in einer Ebene des Büschels durch l gehen muß.

§ 4. Konstruktion von $\triangle_n$-Flächen mit Hilfe von Tripelsystemen.

Bekanntlich versteht man unter einem einfachen Tripelsystem von n Elementen $A_1, A_2, \ldots, A_n$, oder einfach 1, 2, ..., n, eine bestimmte Anzahl von Tripeln $A_i A_k A_l$, oder einfach $(i\,k\,l)$, so daß in dem System jedes Paar $A_i A_k = (i\,k)$ ein- und nur einmal vorkommt. Solche Systeme sind nur für Zahlen von der Form $n = 6m+1$ und $n = 6m+3$ möglich und existieren auch für alle Zahlen von dieser Form. Ein Tripelsystem mit $6m+1$ Elementen enthält $m\,(6m+1)$ Tripel, ein solches mit $6m+3$ Elementen $(2m+1)\,(3m+1)$ Tripel. In einem Tripelsystem von der ersten Art ist jedes Element $3m$ Tripeln gemeinsam; in einem solchen zweiter Art gehört jedes Element zu $3m+1$ Tripeln.

Die n Elemente kann man jetzt mit n beliebigen Punkten $A_1, A_2, \ldots,$ A_n, oder 1, 2, ..., n, des Raumes identifizieren, die Paare $(i\,k)$ und Tripel $(i\,k\,l)$ mit Verbindungsgeraden — und Ebenen dieser Punkte. Bezeichnen also $(i\,k\,l)=0$ die Gleichung der Ebene durch die Punkte i, k, l, und $i_r\,k_r\,l_r$; $r=1, 2, \ldots, m\,(6\,m+1)$, oder $r=1, 2, \ldots, (2\,m+1)\,(3\,m+1)$; die Tripel eines Systems und wird in Betracht gezogen, daß für jedes mögliche n mehrere Tripelsysteme existieren, so stellt $\prod\limits_{1}^{r}(i_r\,k_r\,l_r)$, wo r alle Tripel des Systems einbezieht, ein reduzibles Polynom des entsprechenden Grades in x_1, x_2, x_3, x_4 dar. Dasselbe verschwindet einfach für jede Verbindungsgerade $(i\,k)$ und $3\,m$-fach, bezüglich $(3\,m+1)$-fach für jeden der n Punkte.

Daraus ergibt sich

Satz 9. Gestützt auf jedes Tripelsystem mit $6\,m+1$, oder $6\,m+3$ Elementen, kann eine Fläche

$$\sum \lambda_s \prod_{1}^{r} (i_r\,k_r\,l_r) = 0$$

von der Ordnung $m\,(6\,m+1)$, oder $(2\,m+1)\,(3\,m+1)$ konstruiert werden, welche jede Verbindungsgerade $(i\,k)$ einfach und jeden der n Punkte $3\,m$-fach, bezüglich $(3\,m+1)$-fach enthält.

Es ist klar, daß diese Klasse zu derjenigen der in § 3 behandelten Flächen gehört.

Für die drei niedrigsten Tripelsysteme mit 7, 9 und 13 Elementen ergeben sich Flächen von der Ordnung 7, 12 und 26 mit 3-, 4- und 6-fachen Punkten. Für $n=7$ gibt es 30 verschiedene Tripelsysteme, für $n=9$ gibt es 840, usw. Für $n=7$ kommt man auf die von 21 Konstanten abhängigen F_7 durch $\triangle_7$, wie sie oben auf andere Art konstruiert wurde.

In Folge der besondern Bauart des vollständigen n-Ecks bieten Sätze 1 und 2, auf die *Gesamtheit* der Ecken und Kanten angewandt, keine Zuverlässigkeit. Schon bei der Weddle'schen Fläche ergeben sich nach diesen Sätzen $6 \cdot 3 + 15 = 39$ Konstanten, während nur 34 notwendig sind. Demnach wäre also eine solche Fläche nicht möglich. Bei der Fläche F_7 durch $\triangle_7$ ergeben sich $119 - 70 - 42 = 7$ verfügbare Konstanten, während es tatsächlich 21 gibt. Die F_9 durch $\triangle_9$ hängt von 27 Konstanten ab. Für die Tripelsystemfläche durch $\triangle_9$ ergeben sich $454 - 9 \cdot 20 - 36 \cdot 5 = 94$ Konstanten. Eine F_{12} durch $\triangle_9$ kann also immer als Tripelsystemfläche dargestellt werden.

Als einfache Beispiele von Tripelsystemflächen seien angeführt:

$$F_7 = (125)(147)(156)(246)(257)(345)(367) \\ + \lambda(124)(135)(167)(237)(256)(346)(457) = 0,$$

$$F_{12} = (125)(456)(789)(147)(258)(369)(159)(168)(249)(348)(267)(357) \\ + \lambda(124)(359)(768)(137)(256)(498)(158)(169)(238)(346)(297)(457) = 0.$$

Bezeichnet man mit die 9 Ecken mit $a_1 a_2 \dots a_9$ und mit $(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6)$ eine Weddle'sche Fläche mit den Doppelpunkten $a_1 \dots a_6$, so kann man eine F_{12} auch so darstellen:

$$F_{12} = \Sigma \lambda_i (a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6)(a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9)(a_7 a_8 a_9 a_1 a_2 a_3) = 0.$$

§ 5. Involutionsflächen durch eine Raumkurve 3. Ordnung.

Die $\triangle_n$-Flächen gestalten sich besonders interessant, wenn man die n Punkte auf einer Raumkurve 3. Ordnung annimmt. Solche Flächen wurden schon von E. Weyr[3]) auf synthetischem Wege studiert. Hier sollen die hauptsächlichsten Eigenschaften dieser Flächen durch die einfachere und strengere algebraische Methode bewiesen werden.

1. *Gemeinsame Elemente zweier Involutionen G_n^1 und G_3^1.* Die Elemente einer Involution der n^{ten} Ordnung und ersten Grades seien durch die Parameter $\lambda, \lambda^1, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ charakterisiert; dann sind die Involutionen G_n^1 und G_3^1 auf einem rationalen Träger definiert durch

$$G_n^1 \equiv a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n + \mu(b_0 \lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + \dots + b_n) = 0,$$
$$G_3^1 \equiv c_0 \lambda^3 + c_1 \lambda^2 + c_2 \lambda + c_3 + \mu(d_0 \lambda^3 + d_1 \lambda^2 + d_2 \lambda + d_3) = 0.$$

In unserem Falle sind die Elemente Punkte auf einer Raumkurve dritter Ordnung C_3. Sei λ_1 ein G_n^1 und G_3^1 gemeinsames Element. Dann hat man für die zugehörigen Werte des Parameters μ bezüglich

$$\mu_n = -(a_0 \lambda_1^n + \dots)/(b_0 \lambda_1^n + \dots), \quad \mu_3 = -(c_0 \lambda^3 + \dots)/(d_0 \lambda^3 \dots),$$

und die Involutionen nehmen die Form an:

$$(a_0 \lambda^n + \dots)(b_0 \lambda_1^n + \dots) - (a_0 \lambda_1^n + \dots)(b_0 \lambda^n + \dots) = 0,$$
$$(c_0 \lambda^3 + \dots)(d_0 \lambda_1^3 + \dots) - (c_0 \lambda_1^3 + \dots)(d_0 \lambda^3 + \dots) = 0.$$

[3]) Ueber Flächen sechten Grades mit einer dreifachen cubischen Curve; Wiener Sitzungsber., Band 85. (1882), pp. 513—525.

Die Glieder der höchsten Ordnung in beiden Gleichungen verschwinden, und beide Gleichungen sind durch $\lambda - \lambda_1$ teilbar, so daß nach dieser Division die Gleichungen

$$f(\lambda, \lambda_1, a_0, b_0, \ldots) = 0,$$
$$g(\lambda, \lambda_1, c_0, d_0, \ldots) = 0$$

vom Grade $n - 1$ in λ und λ_1 und $2(n - 1)$ in beiden, bezüglich vom Grade 2 in λ und λ_1 und 4 in beiden übrig bleiben. Diese haben $8(n - 1)$ gemeinschaftliche Lösungen. Davon müssen aber die $2 \cdot 2(n - 1)$ unendlichen Lösungen ausgeschlossen werden, so daß schließlich nur $4(n - 1)$ eigentliche Lösungen (λ, λ_1) hervorgehen. Da die Gleichungen symmetrisch in λ und λ_1 sind, so ist jedesmal auch (λ_1, λ) eine Lösung, so daß am Ende nur $2(n - 1)$ Lösungspaare $(\lambda, \lambda_1) \equiv (\lambda_1, \lambda)$ vorhanden sind.

Nun bestimmen die n Punkte einer Gruppe von $G_n{}^1$ ein vollständiges n-Eck $\triangle_n$, die drei Punkte einer Gruppe von $G_3{}^1$ ein Dreieck auf C_3. Jede $G_3{}^1$ auf C_3 wird ausgeschnitten von einem Ebenenbüschel durch eine beliebige Gerade l. Es geschieht also $2(n - 1)$ mal, daß eine Verbindungsgerade zweier Punkte von $G_n{}^1$ mit einer Verbindungsgeraden zweier Punkte von $G_3{}^1$ zusammenfällt. Die Seiten der den Gruppen von $G_n{}^1$ entsprechenden n-Ecke $\triangle_n$ bilden eine Regelfläche, so daß durch jede beliebige Gerade l $2(n - 1)$ Erzeugende gehen. Somit hat man den

Satz 10: Die Seiten der vollständigen n-Ecke, welche den Gruppen einer Involution $G_n{}^1$ auf einer Raumkurve 3. Ordnung entsprechen, erfüllen eine Regelfläche der Ordnung $2(n - 1)$. Durch jeden Punkt der C_3 gehen $n - 1$ Erzeugende, so daß also die C_3 eine $(n - 1)$-fache Kurve der Regelfläche ist.

Eine $G_n{}^1$ ist durch zwei Punktgruppen $(\triangle_n)$ vollständig bestimmt. Die Mannigfaltigkeit solcher Involutionen ist daher $2n$ und deshalb auch diejenige der zugehörigen Involutionsflächen.

§ 6. Flächen der Ordnung 2 (n — 1) mit einer (n — 1)-fachen Raumkurve 3. Ordnung

1. Die soeben bestimmten Involutionsflächen sind in einer allgemeineren Klasse von Flächen derselben Ordnung und mit derselben vielfachen Kurve enthalten. Man erhält sie wie folgt: Durch eine Raum-

kurve C_3 gehen 3 linear unabhängige Flächen zweiter Ordnung Q_1, Q_2, Q_3. Bildet man mit denselben ein homogenes Polynom P der Ordnung $n - 1$, so erhält man eine Fläche der Ordnung $2(n - 1)$

$$F_{2(n-1)} = P_{n-1}(Q_1, Q_2, Q_3) = 0,$$

welche von $1/2\,(n - 1)(n - 2)$ Konstanten abhängt und die C_3 als $(n - 1)$-fache Kurve enthält. Dieselbe ist eine Regelfläche, weil eine (einzige) Doppelsekante von C_3 durch einen Punkt von $F_{2(n-1)}$ die Fläche in $2(n - 1) + 1$ Punkten schneidet. Da die C_3 $(n - 1)$-fach ist, so gehen durch jeden Punkt von C_3 $n - 1$ Erzeugende der Fläche. Daraus folgt, daß der Kegel mit diesem Punkt als Spitze und C_3 enthaltend die Fläche in diesen $n - 1$ Erzeugenden schneidet. Letztere schneiden die C_3 außer der Spitze S des Kegels noch in $n - 1$ Punkten S^1. Umgekehrt wird jeder Punkt S^1 von $n - 1$ Erzeugenden derselben Anzahl von C_3 eingeschriebenen Kegeln erhalten. Auf diese Weise ensteht zwischen den Punkten S und S^1 mit den Parametern λ und λ^1 eine symmetrische $(n - 1, n - 1)$-Verwandtschaft

$$\sum a_{ik}(\lambda^i \lambda^{1k} + \lambda^k \lambda^{1i}) = 0, \; i, k \leqq n - 1.$$

Wenn λ gegeben ist und wir für jede Lösung von λ^1, die Lösung $\lambda = \lambda^1$ hinzufügen, so erhalten wir die alternierende Verwandtschaft

$$\sum a_{ik}(\lambda^i \lambda^{1k} + \lambda^k \lambda^{1i})(\lambda^1 - \lambda) = 0.$$

Nun werde angenommen, daß für einen gewissen Wert $\lambda^1 = \lambda_1$ wir für λ die Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots, \lambda_n$ erhalten, und daß überdies jedes Paar $(\lambda = \lambda_i, \lambda^1 = \lambda_k)$; $i, k = 1, 2, \ldots, n$ eine Lösung von der vorigen Gleichung sei. Dann muß diese notwendigerweise die Form haben:

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_n)\,\Phi(\lambda, \lambda^1) + (\lambda^1 - \lambda_1)(\lambda^1 - \lambda_2) \\ \ldots (\lambda^1 - \lambda_n)\,\psi(\lambda, \lambda^1) = 0.$$

Aber da diese vom Grade n in λ sowohl als in λ^1 ist, so muß Φ nur λ^1 und ψ nur λ enthalten und zwar zum Grade n. Wegen der Symmetrie kann sie also nur die Form haben:

$$[(\lambda - \lambda_1) \ldots (\lambda - \lambda_n)] \cdot [(\lambda^1 - \lambda^1{}_1) \ldots (\lambda^1 - \lambda_n{}^1)] - [(\lambda^1 - \lambda_1) \ldots (\lambda^1 - \lambda_n)] \cdot \\ [(\lambda - \lambda_1{}^1) \ldots (\lambda_n{}^1)] = 0.$$

Sie ist symmetrisch in λ und λ^1 und verschwindet identisch für $\lambda^1 = \lambda$. Setzt man

$$\frac{\Pi(\lambda^1 - \lambda_i^1)}{\Pi(\lambda^1 - \lambda_i)} = \mu, \text{ mit } \lambda^1 \text{ variabel, so}$$

nimmt die Gleichung die Form an

$$P(\lambda) - \mu\, Q(\lambda) = 0.$$

Hierin ist μ ein Parameter und P und Q sind Polynome von λ vom Grade n. Unter den gemachten Voraussetzungen wird somit die symmetrische Verwandtschaft auf C_3 eine Involution, deren $\triangle_n$ eine Involutionsfläche $F_{2(n-1)}$ erzeugen. Die Annahme eines einzigen vollständigen n-Ecks auf einer $F_{2(n-1)}$ mit einer $(n-1)$-fachen C_3 führt also zu ∞^1 solchen $\triangle_n$ auf der Fläche, denn die Annahme einer vollständig permutablen Gruppe in einer symmetrischen (n, n)-Verwandtschaft führt auf eine Involution G_n^1. Man hat als Resultat

Satz 11: Enthält eine Fläche der Ordnung $2(n-1)$ *mit einer* $(n-1$-*fachen Raumkurve 3. Ordnung ein vollständiges n-Eck* $\triangle_n$, *so enthält sie unendlich viele, d. h., sie ist eine Involutionsfläche.*

2. Daß die $1/2\,(n-1)\,(n+2)$ verfügbaren Konstanten einer allgemeinen $F_{2(n-1)}$ durch die Bedingung eine Involutionsfläche zu sein alle absorbiert werden, kann wie folgt gezeigt werden: Auf C_3 seien n beliebige Punkte gewählt, dann fordert die Bedingung, daß $F_{2(n-1)}$ durch alle Seiten des zugehörigen $\triangle_n$ gehe $1/2\, n\,(n-1)$ Bedingungen. Durch einen weitern Punkt P auf C_3 ziehe man beliebigen $n-1$ Bisekanten der Kurve, dann fordert die Bedingung, daß $F_{2(n-1)}$ auch durch diese gehe $n-1$ weitere Konstanten. Die so konstruierte Fläche hat also insgesamt $1/2\, n\,(n-1) + n - 1 = 1/2\,(n-1)\,(n+2)$, d. h., alle verfügbaren Konstanten aufgebraucht und ist somit durch die auferlegten geometrischen Bedingungen vollständig bestimmt und wird eine Involutionsfläche.

3. Man betrachte zwei verschiedene Involutionen G_n^1 auf C_3, deren $\triangle_n$ zwei verschiedene Involutionsflächen $F_{2(n-1)}$ erzeugen:

$$\Phi_1(\lambda) + \mu\, \Phi_2(\lambda) = 0,$$
$$\Psi_1(\lambda) + \mu\, \Psi_2(\lambda) = 0.$$

Ist λ_1 ein gemeinsames Element, so hat man

$$\Phi_1(\lambda)\,\Phi_2(\lambda_1) - \Phi_1(\lambda_1)\,\Phi_2(\lambda) = 0,$$
$$\Psi_1(\lambda)\,\Psi_2(\lambda_1) - \Psi_1(\lambda_1)\,\Psi_2(\lambda) = 0,$$

welche beide durch $\lambda - \lambda_1$ teilbar sind. Man erhält zwei symmetrische Funktionen vom Grade $n - 1$ in λ und auch in λ_1 und dem Grade $2(n - 1)$ in beiden λ und λ_1. Die entsprechenden Gleichungen haben $4(n-1)^2$ gemeinsame Lösungen, von denen $2(n-1)^2$ uneigentliche unendliche Lösungen abgezogen werden müssen. In Folge der Symmetrie ergeben sich somit $(n-1)^2$ Lösungspaare $(\lambda, \lambda_1) \equiv (\lambda_1, \lambda)$. Daraus folgt

Satz 12: Zwei verschiedene Involutionsflächen derselben Ordnung $2(n-1)$ haben als Residualschnittkurve $(n-1)^2$ Erzeugende gemeinsam.

In der angeführten Arbeit von E. Weyr werden speziell die Eigenschaften der F_6, die sich aus der Involution $G_4{}^1$ ergibt, eingehender betrachtet. Zudem wird auf die Zusammenhänge hingewiesen, welche die Hüllfläche der Tripelebenen der Gruppen $\triangle_n$ der Involution mit der Involutionsfläche hat.

§ 6. $\triangle_n$-Flächen mit Doppelgeraden.

1. Sind $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, ..., $f_k = 0$ k linear unabhängige Flächen der Ordnung m, die einfach durch die Verbindungsgeraden von $\triangle_n$ gehen und die Ecken x-fach enthalten und bedeutet P ein Polynom der Ordnung p, so kann man unendlich viele höhere $\triangle_n$-Flächen

$$P(f_1, f_2, \ldots, f_k) = 0$$

der Ordnung mp konstruieren. Jede dieser Flächen hat jede Ecke als px-fachen Punkt und jede Seite von $\triangle_n$ als p-fache Gerade. Die Mannigfaltigkeit einer solchen Flächenklasse ist

$$\frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+k-1)}{1\,.\,2\ldots(k-1)} - 1\,.$$

2. Von den unzählig vielen Möglichkeiten soll hier ein besonders interessanter Fall einer $\triangle_6$-Fläche 10. Ordnung mit den $A_i A_k$ als Doppelgeraden betrachtet werden. Da durch jede Ecke 5 Doppelgeraden gehen, so ist der Tangentialkegel in jeder Ecke für irreduzible Flächen

wenigstens von der 5. Ordnung, so daß also im einfachstens Falle die 6 Ecken fünffache Punkte der Fläche sind. Betrachtet man irgend ein Paar verschiedener Tripel, z. B. $A_1 A_2 A_3$ und $A_4 A_5 A_6$, so schneiden sich die Ebenen durch dieselben in einer Geraden $g_{123 \cdot 456}$. Diese wird die sechs Schnittpunkte mit $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_1$ und $A_4 A_5$, $A_5 A_6$, $A_6 A_4$ als doppelte Punkte der Fläche 10. Ordnung enthalten. Folglich hat jede der 10 Geraden $l_{pqr.stu}$ 12 Punkte mit der Fläche gemein, *so daß also alle diese Geraden auf der Fläche liegen.*

Zur geometrischen Konstruktion solcher Flächen kann wieder das schon oben angewandte Prinzip befolgt werden. Die 15 Geraden $A_i A_k$ schneiden eine feste Ebene e in ebensovielen Punkten P_{ik}. Dazu kommen die 10 Schnittpunkte L der Geraden $l_{123.456}$, ... Durch die P_{ik} als Doppelpunkte und die L als einfache Punkte lege man nun eine Kurve 10. Ordnung C_{10}. Diese wird dann noch von 10 freien Konstanten abhängen. Eine Ebene h des Büschels durch eine feste Axe l schneidet die A_{ik} in 15 Punkten und C_{10} in 10 Punkten. Legt man einer K_{10} in h die Bedingungen auf, die ersten als Doppelpunkte, die zweiten als einfache Punkte zu enthalten, so werden dadurch gerade $3 . 15 + 10 = 55$ Konstanten absorbiert. Wählt man dann auf l noch beliebige 10 Punkte, durch welche die K_{10} gehen soll, so ist diese dadurch vollständig bestimmt. Beschreibt somit h den Büschel, so beschreibt K_{10} eine Fläche 10. Ordnung mit den verlangten Eigenschaften. Man hat demnach

Satz 13: Die Mannigfaltigkeit der Flächen 10. Ordnung mit den Ecken eines räumlichen Sechsecks als fünffachen Punkten und seinen Seiten als Doppelgeraden ist ∞^{20}. *Jede Fläche dieser Art enthält also die 10 Schnittgeraden gegenüberliegender Ebenen von Tripelpaaren. Daraus ergibt sich ohne weiteres, daß die Schnittkurve 40. Ordnung der Weddle'schen Fläche mit einer dieser Flächen 10. Ordnung aus den 15 zweifach gezählten Geraden* $A_i A_k$ *und den 10 Geraden* $l_{123.456}$, ... *besteht.*

3. In der anfangs erwähnten Arbeit habe ich gezeigt, daß es bei $\triangle_6$ 12 verschiedene Tripelsysteme gibt, in welchen jedes Paar (ik) gerade zweimal vorkommt. Jedes solche System besteht aus 10 Tripeln und zu jedem gehört ein ähnliches konjugiertes Tripelsystem, das aus den 10 übrigen von den 20 Tripeln besteht. In jedem Tripelsystem und seinem konjugierten kommen also alle 20 Tripel vor. Jedes Tripel kommt in 6 von den 12 Tripelsystemen vor und ist somit in den 6 konjugierten Systemen abwesend. Multipliziert man in jedem System die 10 linearen Ausdrücke welche den Tripelebenen entsprechen, so erhält

man 12 Polynome 10. Grades, die 6 nichtkonjugierten Tripelsystemen und den 6 übrigen ihnen konjugierten entsprechen. Bezeichnet man die erstern mit $P_1, P_2, \ldots, P_6$ und die ihnen konjugierten mit $Q_1, Q_2, \ldots, Q_6$ und bildet

$$\lambda_1 P_1 + \mu_1 Q_1 + \ldots + \lambda_6 P_6 + \mu_6 Q_6 = 0,$$

so stellt diese Gleichung eine Fläche 10. Ordnung mit den Eigenschaften des Satzes 13 dar. Unterwirft man das lineare System der Bedingung, daß es sich abgesehen von einem konstanten Faktor z. B. auf $Q_6 = 0$ reduzieren solle, so kommt man auf 10 Gleichungen, woraus die Verhältnisse λ_1/λ_6, μ_1/λ_6, ... λ_5/λ_6, μ_5/λ_6 eindeutig bestimmt werden können. Daraus folgt, daß sich jedes der 12 Polynome linear durch die 11 übrigen ausdrücken läßt, so daß also nur 11 von diesen linear unabhängig sind.

Wird die Fläche 10. Ordnung der Bedingung unterworfen, daß sie einen allgemeinen Punkt der Raumkurve 3. Ordnung durch die Ecken von $\triangle_6$ enthalte, so liegt die Kurve ganz auf der Fläche. Dann hat aber letztere mit der Weddle'schen Fläche eine Schnittkurve 43. Ordnung gemein, so daß die Weddle'sche Fläche ein Faktor der Fläche 10. Ordnung wird und eine Residualfläche 6. Ordnung übrig bleibt, welche die Ecken als dreifache Punkte und die $A_i A_k$ als einfache Geraden enthält. Braucht man die 10 Konstanten dazu, diese Residualfläche durch die 10 Geraden $l_{123.456}$, ... zu legen, so hat man diese 25 Geraden mit der Weddle'schen Fläche gemein, so daß letztere wieder ein Faktor wird. Somit ergibt sich

Satz 14: Die verfügbaren Konstanten der $\triangle_6$-Fläche 10. Ordnung mit Doppelgeraden insbesondere auch die zugehörige Tripelsystemfläche lassen sich so wählen, daß die Fläche in die doppelte Weddle'sche Fläche W und eine Fläche 2. Ordnung Q durch die 6 Ecken zerfällt. Also auch

$$\sum \lambda_i P_i + \mu_i Q_i = W^2 . Q.$$

§ 7. $\triangle_n$-Hyperflächen.

Die in den vorhergehenden Abschnitten behandelten Probleme können auf Räume von höheren Dimensionen ausgedehnt werden. Die Quadrupel-, Quintupel-, ..., Multipelsysteme führen zu Hyperflächen in Räumen von vier, fünf, etc. Dimensionen.

Ich werde mich hier auf das nichttriviale Quadrupelsystem niedrigster Ordnung beschränken. Ein solches wird von 14 Quadrupeln aus 8 Elementen gebildet, so daß jedes mögliche Tripel aus den 8 Elementen gerade einmal vorkommt. In einem solchen System kommt jedes Element 7-mal, jedes Paar 3-mal vor. Bei 8 Elementen gibt es 30 verschiedene Quadrupelsysteme. Ein solches, mit vertikal geschriebener Anordnung der Quadrupel ist z. B.:

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
1 & 4 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\
2 & 6 & 5 & 3 & 2 & 4 & 2 & 5 & 3 & 4 & 3 & 5 & 4 & 3 \\
3 & 7 & 6 & 4 & 6 & 5 & 4 & 6 & 6 & 5 & 4 & 7 & 5 & 7 \\
5 & 8 & 7 & 8 & 8 & 7 & 7 & 8 & 7 & 8 & 6 & 8 & 6 & 8.
\end{array}$$

Jedes System dieser Art ist in einer Substitutionsgruppe der Ordnung 1344 invariant.

Die 8 Elemente können nun als Punkte in einem Raume von vier Dimensionen gewählt werden. Dann bestimmt jedes Quadrupel eine Hyperebene (gewöhnlicher Raum) $R_i^{(k)} = 0$, wo k der Index der von 1 bis 30 numerierten Quadrupelsysteme ist.

Satz 15: Die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{k \leqq 30} \lambda_k R_1^{(k)} R_2^{(k)} \dots R_{14}^{(k)} = 0$$

stellt jetzt eine Hyperfläche der 14. Ordnung im Raume von 4 Dimensionen dar, welche jeden der acht Punkte siebenfach, jede Verbindungsgerade dreifach und jede Tripelebene einfach enthält.

(Eingegangen den 19. Februar 1930)