Ueber algebraische Zahlkörper mit gegebener Diskriminante.

Autor(en): **Nagell, Trygve**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **2 (1930)**

PDF erstellt am: **16.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-3615

Ueber algebraische Zahlkörper mit gegebener Diskriminante

Von TRYGVE NAGELL, in Oslo

I.

Ein quadratischer Zahlkörper ist bekanntlich durch seine Körperdiskriminante eindeutig bestimmt. Für Körper höheren Grades gilt dies nicht mehr. Es gibt im allgemeinen mehrere nicht-konjugierte Körper n^{ten} Grades mit derselben Diskriminante, wenn $n \geqq 3$ ist. Nach einem bekannten Satz von *Hermite* und *Minkowski* ist ihre Anzahl jedoch endlich.[1]) Wir wollen hier den folgenden Satz beweisen:[2])

Es sei n eine feste natürliche Zahl $\geqq 3$, und es bedeute $A_n(D)$ die Anzahl der Zahlkörper n^{ten} Grades mit der Diskriminante D. Dann ist

$$\limsup_{|D| \to \infty} A_n(D) = \infty . \tag{1}$$

Beweis: Es seien $p_1, p_2, \ldots, p_r$ lauter verschiedene Primzahlen, unter denen die sämtlichen Primteiler der Zahl n vorkommen. Es seien ferner P und Q zwei natürliche Zahlen so, daß

$$PQ = p_1 p_2 \cdots p_r$$

ist. Wir setzen dann

$$\alpha = \left| \sqrt[n]{PQ^{n-1}} \right| . \tag{2}$$

Man sieht nun leicht, daß der durch die Zahl α erzeugte Körper n^{ten} Grades die folgende Körperbasis hat

$$1 , \alpha , \frac{\alpha^2}{Q} , \frac{\alpha^3}{Q^2} , \ldots , \frac{\alpha^{n-1}}{Q^{n-2}} . \tag{3}$$

---

1) *Ch. Hermite*, Journ. für Math., Bd. 47; *H. Minkowski*, Geometrie der Zahlen.

2) Für $n = 3$ ist dieses Resultat schon bekannt. Siehe *W. E. H. Berwick*, On cubic fields with a given discriminant, Proc. London Math. Soc., 2. ser., vol. 23 (1925), S. 359, und *H. Hasse*, Arithmetische Theorie der kubischen Zahlkörper auf klassenkörper-theoretischer Grundlage, Math. Zeitschrift, Bd. 31 (1930), S. 565.

Um dies zu beweisen, haben wir zu zeigen, daß eine Zahl

$$\frac{1}{p}\left(A_0 + A_1\alpha + A_2 \cdot \frac{\alpha^2}{Q} + \dots + A_{n-1}\frac{\alpha^{n-1}}{Q^{n-2}}\right), \tag{4}$$

wo p, A_0, A_1, ..., A_{n-1} ganze rationale Zahlen sind, nur dann ganz ist, wenn die Koeffizienten A alle durch p teilbar sind. Wegen

$$D(\alpha) = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}\, n^n\, (P Q^{n-1})^{n-1} \tag{5}$$

genügt es anzunehmen, daß p eine der Primzahlen p_i $(1 \leqq i \leqq r)$ ist. Da $\frac{\alpha}{\sqrt[n]{p}}$ eine ganze algebraische Zahl ist, muß, wenn die Zahl (4) ganz ist, auch $\frac{A_0}{\sqrt[n]{p}}$ ganz sein. A_0 ist folglich durch p teilbar. Es sei nun p ein Teiler von P, und es seien A_0, A_1, ..., A_{i-1} alle durch p teilbar; dann ist auch A_i durch p teilbar. Denn in (4) sind die Zahlen $\frac{\alpha^j}{Q^{j-1}}$, für $j \geqq i+1$, alle durch $\sqrt[n]{p^{i+1}}$ teilbar, und folglich auch die Zahl $A_i \frac{\alpha^i}{Q^{i-1}}$. Aber dann muß $\frac{A_i}{\sqrt[n]{p}}$ ganz sein, d. h. A_i ist durch p teilbar. Die Koeffizienten A sind folglich alle durch p teilbar. Dasselbe ergibt sich, wenn p ein Teiler von Q ist; man hat nur den Induktionsbeweis von der anderen Seite mit A_{n-1}, A_{n-2} usw. anzufangen.

Die Zahlen (3) bilden folglich eine Körperbasis, und wegen (5) wird die Körperdiskriminante gegeben durch

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} \cdot n^n \cdot (p_1 p_2 \dots p_r)^{n-1}. \tag{6}$$

Wenn die Primzahlen p_i fest gegeben sind, bestehen für die Zahlen P und Q genau 2^r Möglichkeiten, denen ebenso viele Zahlen α entsprechen. Die Zahlen α erzeugen genau 2^{r-1} verschiedene Zahlkörper n^{ten} Grades; denn $\left|\sqrt[n]{PQ^{n-1}}\right|$ und $\left|\sqrt[n]{P^{n-1}Q}\right|$ bestimmen offenbar denselben Körper. Folglich gilt: *Die Anzahl der nicht-konjugierten Zahlkörper n^{ten} Grades mit der Diskriminante (6) ist mindestens gleich 2^{r-1}.*

Da wir r beliebig groß wählen können, folgt hieraus sofort der Satz (1).

II.

Der Minkowskische Beweis dafür, daß nur endlich viele Zahlkörper n^{ten} Grades mit gegebener Diskriminante D existieren, beruht auf dem folgenden Satz:[3])

In jedem algebraischen Zahlkörper n^{ten} Grades mit der Diskriminante D gibt es eine ganze Zahl ξ n^{ten} Grades, die mit ihren Konjugierten $\xi^{(2)}, \xi^{(3)}, \ldots, \xi^{(n)}$ den folgenden Ungleichungen genügt

$$|\xi| < |\sqrt{D}| \text{ und } |\xi^{(i)}| < 1, \; 2 \leqq i \leqq n, \tag{7}$$

wenn der Körper reell ist, oder

$$|\xi| = |\xi^{(2)}| < |\sqrt{D}| \text{ und } |\xi^{(i)}| < 1, \; 3 \leqq i \leqq n, \tag{7'}$$

wenn der Körper imaginär ist, und $\xi^{(2)}$ die zu ξ konjugiert-imaginäre Zahl bedeutet.

Hieraus folgt zugleich eine Methode um die sämtlichen Körper n^{ten} Grades mit gegebener Diskriminante zu bestimmen. Für die ganzzahligen Koeffizienten a_i in der Gleichung

$$\xi^n + a_1 \xi^{n-1} + a_2 \xi^{n-2} + \ldots + a_n = 0 \tag{8}$$

bestehen ja wegen den Ungleichungen (7) und (7′) nur endlich viele Möglichkeiten. Die so erhaltenen Gleichungen für ξ bestimmen alle diejenigen Körper n^{ten} Grades, deren Diskriminanten absolut genommen $\leqq |D|$ sind. Die Anzahl der zu untersuchenden Gleichungen wächst aber so schnell mit $|D|$, daß die Methode praktisch unbrauchbar wird. (Ihre Anzahl ist in bezug auf $|D|$ von der Größenordnung $|D|^N$, wenn $N = \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{4}n - \frac{1}{2}$ gesetzt wird.) Es entsteht so die Frage, ob man statt (7) und (7′) günstigere Ungleichungen aufstellen könnte. Dies ist mir nur dann gelungen, wenn ich n spezialisiere. Es gilt z. B. der folgende Satz:

Es sei n eine ungerade Primzahl und $m = 2n - 2$. Dann gibt es in jedem reellen algebraischen Körper n^{ten} Grades mit der Diskriminate D eine ganze Zahl ξ n^{ten} Grades, die mit ihren Konjugierten $\xi^{(2)}, \xi^{(3)}, \ldots, \xi^{(n)}$ den folgenden Ungleichungen genügt

$$|\xi| < 1, \quad |\xi^{(i)}| < |\sqrt[m]{D}|, \; 2 \leqq i \leqq n. \tag{9}$$

---

[3]) Siehe *D. Hilbert*, Die Theorie der algebraischen Zahlkörper, Jahresber. d. Deutschen Math. Vereinigung, Bd. 4 (Berlin 1894), S. 212, und *T. Nagell*, Zur Theorie der algebraischen Ringe, Journ. f. Math., Bd. 163. Bekanntlich ist ja auch n beschränkt, wenn D gegeben ist.

Beweis: Es sei $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ eine Körperbasis, und

$$F_1 = u_1 \omega_1 + u_2 \omega_2 + \ldots + u_n \omega_n$$

eine homogene lineare Form in $u_1, u_2, \ldots, u_n$, ferner

$$F_i = u_1 \omega_1^{(i)} + u_2 \omega_2^{(i)} + \ldots + u_n \omega_n^{(i)}$$

die zu F_1 konjugierten Formen. Dann haben die Ungleichungen

$$|F_1| < 1, \quad |F_2| < \left|\sqrt[m]{D}\right| + 1, \quad |F_i| < \left|\sqrt[m]{D}\right|, \quad 3 \leqq i \leqq n \tag{10}$$

nur endlich viele Lösungen in ganzen rationalen Zahlen u_k. Es sei φ der kleinste positive Wert von $|F_2|$, der diesen Lösungen entspricht.

Um unseren Satz zu beweisen, genügt es nun offenbar zu zeigen, daß $\varphi < \left|\sqrt[m]{D}\right|$ ist. Denn eine von Null verschiedene ganze Zahl ξ, die den Ungleichungen (9) genügt, ist notwendig vom n^{ten} Grade, da ein Körper von Primzahlgrad keinen irrationalen Unterkörper hat. $\varphi = \left|\sqrt[m]{D}\right|$ ist ausgeschlossen, da sonst $|F_1| = \left|\sqrt[m]{D}\right| \geqq 1$ wäre. Sollte es keine Lösungen der Ungleichungen (10) geben, so setze man $\varphi = \left|\sqrt[m]{D}\right| + 1$. Es sei sonst angenommen, daß $\varphi > \left|\sqrt[m]{D}\right|$ sei. Wir bestimmen dann die positive Zahl ε so, daß

$$(1 + \varepsilon) \left|\sqrt[m]{D}\right| < \varphi$$

ist. Durch Anwendung des bekannten Minkowskischen Satzes über homogene lineare Formen[4]) ergibt sich nun:

Wenn F_2 reell ist, haben die Ungleichungen

$$|F_1| \leqq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1, \quad |F_2| \leqq (1+\varepsilon) \left|\sqrt[m]{D}\right| < \varphi,$$
$$|F_i| \leqq \left|\sqrt[m]{D}\right|, \quad 3 \leqq i \leqq n,$$

Lösungen in nicht sämtlich verschwindenden ganzen rationalen u_k.

Wenn F_2 und F_3 konjugiert-imaginär sind, gilt dasselbe für die Ungleichungen

---

[4]) Siehe z. B. *E. Landau,* Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale, Satz 116 (Leipzig 1927).

$$|F_1| \leqq \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} < 1, \quad |F_2| = |F_3| \leqq (1+\varepsilon)\left|\sqrt[m]{D}\right| < \varphi,$$
$$|F_i| \leqq \left|\sqrt[m]{D}\right|, \quad 4 \leqq i \leqq n.$$

Die Gleichheitszeichen können hier niemals für $|F_i|$ gelten; denn sonst würde $|F_1| = \left|\sqrt[m]{D}\right| \geqq 1$. Hieraus folgt nun zunächst, daß die Ungleichungen (10) immer mindestens ein System von Lösungen haben. Ferner folgt, daß die Voraussetzung $\varphi > \left|\sqrt[m]{D}\right|$ auf einen Widerspruch führt.

Unser Satz ist folglich bewiesen. Die Anzahl der zu untersuchenden Gleichungen (8) wird hier in bezug auf $|D|$ von der Größenordnung $|D|^{\frac{1}{4}n+\frac{1}{2}}$; die Ungleichungen (9) sind also bedeutend günstiger als die Ungleichungen (7) und (7′).

Durch ähnliche Betrachtungen kann man den folgenden Satz beweisen:

Es sei n eine ungerade natürliche Zahl $\geqq 3$. Dann gibt es in jedem algebraischen Zahlkörper n^{ten} Grades mit der Diskriminante D eine ganze Zahl ξ n^{ten} Grades, die mit ihren Konjugierten $\xi^{(2)}, \xi^{(3)}, \ldots, \xi^{(n)}$ den folgenden Ungleichungen genügen,

$$|\xi| < \left|\sqrt[4]{D}\right|, \quad |\xi^{(2)}| < \left|\sqrt[4]{D}\right|, \quad |\xi^{(i)}| < 1, \quad 3 \leqq i \leqq n.$$

Wenn ξ imaginär ist, bedeutet hier $\xi^{(2)}$ die zu ξ konjugiert-imaginäre Zahl.

Diese Resultate gelten auch für algebraische Ringe.

Zur Bestimmung aller kubischen Körper mit der gegebenen Diskriminante D hat man eine andere, im allgemeinen bequemere Methode, die die Eigenschaften des durch $\sqrt{-3D}$ erzeugten Körpers benutzt (Siehe die oben zitierte Arbeit von Berwick).

(Eingegangen den 1. Juni 1930)