

# Ueber die durch $\dots(z) = \dots$ definierte analytische Funktion $f(z)$ .

Autor(en): **Michel, W.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **2 (1930)**

PDF erstellt am: **17.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-3618>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Ueber die durch $\mathfrak{J}(z) = \int_0^\infty e^{-a} \frac{da}{1-az}$ definierte analytische Funktion $f(z)$

Von W. MICHEL, Bern

## § 1. Herleitung von $\mathfrak{J}(z)$ und $f(z)$

Die Potenzreihe

$$(1) \quad \wp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n = 1 + 1!z + 2!z^2 + 3!z^3 + \dots$$

besitzt den Konvergenzradius  $r = 0$ . Sie läßt sich jedoch exponentiell summieren. Die Borel'sche Methode<sup>1)</sup> liefert das zugehörige bestimmte Integral:

$$(2) \quad \mathfrak{J}(z) = \int_0^\infty e^{-a} \frac{da}{1-az} = u(x, y) + iv(x, y),$$

welches sich nicht in geschlossener Form integrieren läßt. Die Integrationsvariable  $a$  hat die positiv reelle Axe zu durchlaufen.

Ist  $z = \rho$  ( $0 < \rho < \infty$ ) positiv reell, so wird der Integrand an der Stelle  $a = \frac{1}{\rho}$  unstetig. Trotzdem konvergiert das Integral stets gegen einen bestimmten endlichen Grenzwert, wenn der Parameter  $z = x + yi$  auf einem festen Halbstrahl  $y = m(x - \rho)$  in den Punkt  $z = \rho$  hineinfließt. Aber dieser Grenzwert ist nicht auf allen Halbstrahlen derselbe. Die Durchführung der Grenzübergänge im Integral ist ziemlich mühsam. Da man die Grenzwerte auf andere Weise viel einfacher erhält, so sei hier nur vorweg der folgende Tatbestand erwähnt.

Der Realteil  $u$  von  $\mathfrak{J}(z)$  erweist sich in der ganzen  $z$ -Ebene als stetig. Der Imaginärteil  $v$  dagegen ist in den Punkten  $z = \rho$  ( $0 < \rho < \infty$ ) unstetig und zwar erleidet er einen endlichen Sprung, wenn die Variable  $z$  stetig auf einer Geraden laufend die positiv reelle Axe durchquert. Auf allen Halbstrahlen in der oberen Halbebene ( $y > 0$ ) ist der Grenzwert für  $y \rightarrow +0$  derselbe, nämlich

<sup>1)</sup> E. Borel, Leçons sur les séries divergentes, Paris 1901.

196 I.

$$v(\rho, +0) = \frac{\pi e^{-\frac{+1}{\rho}}}{\rho}; \text{ analog ist}$$

(3)

$$v(\rho, -0) = -\frac{\pi e^{-\frac{1}{\rho}}}{\rho}$$

der Grenzwert von  $v$  auf allen Halbstrahlen in der unteren Halbebene ( $y < 0$ ). Strebt dagegen die Variable  $z$  mit reellen Werten gegen den Punkt  $z = \rho$ , so ist der Integrand beständig reell; also ist in der Richtung der reellen Axe immer  $v = 0$ .

Wir schneiden die  $z$ -Ebene längs der positiv reellen Axe auf, bezeichnen das obere Ufer mit  $R^+$ , das untere Ufer mit  $R^-$  und die durch  $R = R^+ + R^-$  berandete  $z$ -Ebene mit  $G_z$ . Dann ist in jedem beliebigen ganz im Innern von  $G_z$  gelegenen abgeschlossenen Bereiche  $B_z$

$$\frac{1}{1 - az}$$

eine für  $0 \leq a \leq \infty$  analytische Funktion von  $z$ , deren absoluter Betrag für die genannten abgeschlossenen Punktmengen von  $a$  und  $z$  eine endliche obere Schranke  $g$  besitzt. Wegen

(4)

$$\int_A^\infty e^{-a} \cdot g \cdot da = g \cdot e^{-A}$$

konvergiert das uneigentliche Integral  $\mathfrak{J}(z)$  in jedem solchen Bereiche  $B_z$  gleichmäßig und stellt dort mithin eine analytische Funktion dar. Der Definitionsbereich dieses Integrales ist daher das Gebiet  $G_z$ .

Wir betrachten einen Bereich  $B_z$ , der im Innern oder auf dem Rande ein beliebiges Stück  $l$  der negativ reellen Axe enthält. Da für  $z = -\rho$

$$\frac{1}{1 - az} = \frac{1}{1 + a\rho}$$

positiv reell ist, so wird auf  $l$  auch  $\mathfrak{J}(-\rho)$  reell, d. h.  $\mathfrak{J}(z)$  nimmt für negativ reelle Werte der Variablen  $z$  positiv reelle Werte an. Nach dem Schwarz'schen Spiegelungsprinzip entsprechen daher konjugiert komplexen Werten von  $z$  im Innern und auf dem Rande von  $G_z$  auch konjugiert komplexe Werte von  $\mathfrak{J}(z)$ . Dies ist auch der innere Grund für das oben beschriebene Verhalten des Real- und Imaginärteiles von  $\mathfrak{J}(z)$  in den Punkten  $z = \rho$  der beiden konjugierten Schnittränder  $R^+$  und  $R^-$ .

Das Integral  $\mathfrak{J}(z)$  verhält sich nur im Gebiete  $G_z$  regulär; es wird unstetig beim Ueberschreiten des Randes  $R$ . Aber es definiert im Innern von  $G_z$  eine analytische Funktion  $f(z)$  und die Frage ist jetzt, wie weit sich diese Funktion  $f(z)$  analytisch fortsetzen lässt. Nun gibt es zwischen einer analytischen Funktion  $f(z)$ , ihrer Entwicklung  $\mathfrak{P}(z)$  im Ursprung  $o$  und dem Borel'schen Integral  $\mathfrak{J}(z)$  mancherlei Beziehungen. Das Borel'sche Integral  $\mathfrak{J}(z)$  erhält man durch exponentielle Summation der Potenzreihe  $\mathfrak{P}(z)$ . Bedeuten  $D_p$ ,  $D_i$ ,  $D_f$  die Definitionsbereiche von  $\mathfrak{P}(z)$ ,  $\mathfrak{J}(z)$ ,  $f(z)$ , so ist nach der Borel'schen Theorie:

$$(5) \quad D_p \subseteq D_i \subseteq D_f.$$

$D_p$  ist der Konvergenzkreis von  $\mathfrak{P}(z)$ ,  $D_i$  das Summierbarkeitspolygon von  $\mathfrak{J}(z)$ . Dieses umschließt alle Punkte von  $D_f$ , für welche die Potenzreihe  $\mathfrak{P}(z)$  exponentiell summierbar ist und lässt sich auf einfache Weise aus den singulären Stellen der Funktion  $f(z)$  konstruieren, wenigstens in dem Falle, wo der Ursprung  $o$  selbst ein regulärer Punkt von  $f(z)$  ist.

Wie  $\mathfrak{P}(z)$  ausserhalb  $D_p$  divergiert, so versagt  $\mathfrak{J}(z)$  ausserhalb  $D_i$  und wie  $\mathfrak{P}(z)$  auf dem Rande des Konvergenzkreises, so kann auch  $\mathfrak{J}(z)$  auf dem Rande des Summierbarkeitspolygones noch teilweise oder gleichmäßig konvergieren.

In unserem Falle haben wir das Integral  $\mathfrak{J}(z)$  durch exponentielle Summation der überall divergenten Reihe (1) gewonnen. Also ist hier

$$D_p = o \quad D_i = G_z,$$

d. h. die exponentielle Summation der divergenten Reihe (1) liefert für jeden Punkt von  $G_z$  einen endlichen Wert. Weil nach (1) der Ursprung  $o$  eine singuläre Stelle von  $f(z)$  ist, so muss  $o$  auf dem Rande des Summierbarkeitspolygones liegen und daher ist es auch erklärlich, daß der Polygonrand von  $D_i$  degeneriert und aus der doppelt gelegten positiv reellen Axe besteht.

Um jetzt von  $\mathfrak{J}(z)$  weiter zur analytischen Funktion  $f(z)$  emporzusteigen, unterwerfen wir die Integrationsvariable  $a$  einer geeigneten Transformation. Es sei  $z$  ein beliebiger innerer Punkt von  $G_z$ . Dann setzen wir:

$$(6) \quad 1 - az = -zt; \quad a = t + \frac{1}{z}; \quad da = dt$$

und das Integral (2) geht über in:



$$(7) \quad \mathfrak{J}(z) = -\frac{e^{-\frac{1}{z}}}{z} \int_{-1/z}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

Der Integrationsweg in der  $t$  Ebene ist jetzt eine nach rechts laufende Parallele zur reellen Axe durch den Punkt  $t = -\frac{1}{z}$ . Die singulären Stellen des Integranden liegen in den Punkten  $t = 0$  und  $t = \infty$ . In der Richtung des Integrationsweges ist jedoch immer:

$$(8) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-t}}{t} = 0.$$

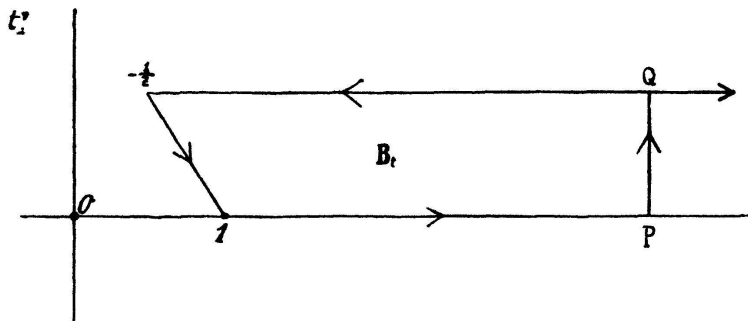


Fig. 1.

Wir verbinden  $t = -\frac{1}{z}$  mit  $t = 1$  vorerst durch eine einfache reguläre nicht durch  $t = 0$  hindurchgehende Kurve. Dann verschwindet das über den Rand  $C$  des endlichen Bereiches  $B_t$  (Fig. 1) erstreckte Integral:

$$\int_C \frac{e^{-t}}{t} dt = 0$$

oder

$$(9) \quad \int_{-1/z}^1 \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_1^P \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_P^Q \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_Q^{-1/z} \frac{e^{-t}}{t} dt = 0.$$

Lassen wir  $P$  und  $Q$  gleichzeitig ins Unendliche rücken, so verschwindet das über das Geradenstück  $PQ$  erstreckte Integral nach Gleichung (5) und man erhält:

$$(10) \quad \mathfrak{J}(z) = -\frac{e^{-1/z}}{z} \left[ \int_{-1/z}^1 \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_1^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right] = f(z).$$

Hierin ist das zweite Integral eine positiv reelle Konstante  $K$ . Das erste Integral formen wir so um:

$$(11) \quad \int_{-1/z}^1 \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_{-1/z}^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt + \int_{-1/z}^1 \frac{dt}{t} \\ = G_1\left(\frac{1}{z}\right) - \log\left(-\frac{1}{z}\right)$$

$\frac{e^{-t} - 1}{t}$  ist eine ganze transcendente Funktion von  $t$ . Daher ist das erste Integral auf der rechten Seite von (11) eine ganze transcendente Funktion  $G_1$  von  $\frac{1}{z}$ , daher auch

$$K + G_1\left(\frac{1}{z}\right) = G\left(\frac{1}{z}\right).$$

Die rechte Seite der Gleichung (10) ist mithin von der Form:

$$(12) \quad f(z) = -\frac{e^{-1/z}}{z} \left[ G\left(\frac{1}{z}\right) - \log\left(-\frac{1}{z}\right) \right].$$

Diese Funktion  $f(z)$  ist unendlich vieldeutig und besitzt die Punkte  $z = 0$  und  $z = \infty$  als isolierte Singularitäten. Sie läßt sich über den Rand  $R$  von  $G_z$  beliebig weit fortsetzen. Ihr Definitionsbereich  $D_f$  ist eine logarithmische Windungsfläche  $W_z$ . Wie sich im übrigen  $f(z)$  in den beiden singulären Stellen verhält, ist vorerst noch schwer zu erkennen.

Ausführlicher geschrieben heißt der Ausdruck für  $f(z)$ :

$$(13) \quad f(z) = -\frac{e^{-1/z}}{z} \left[ \int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_{-1/z}^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt + \log z - \pi i \right]$$

wenn man  $\log(-1) = \pi i$  setzt.

Wir betrachten den im ersten Blatte  $B_0$  von  $W_z$  gelegenen Hauptzweig  $f_0(z)$  von  $f(z)$ :

$$(14) \quad 0 \leq \arg z \leq 2\pi.$$

Für einen Punkt  $z = \rho e^{\pi i}$  auf der negativ reellen Axe wird

$$\log z = \log \rho + \pi i, \text{ daher ist}$$

$$(15) \quad f_0(-\rho) = \frac{e^{\frac{1}{\rho}}}{\rho} \left[ \int_1^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_{\frac{1}{\rho}}^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt + \log \rho \right]$$

wie leicht ersichtlich reell. Da wie oben gezeigt wurde auch  $\mathfrak{J}(-\rho)$  reell ist und nach (10)  $\mathfrak{J}(z)$  und  $f(z)$  in den inneren Punkten von  $G_z$  mit einander übereinstimmen, so kann der Definitionsbereich  $D_i = G_z$  von  $\mathfrak{J}(z)$  nichts anderes sein als das 1. Blatt  $B_0$  des Definitionsbereiches  $D_f = W_z$  von  $f(z)$ , also

$$(16) \quad D_i = G_z = B_0$$

d. h. das Integral  $\mathfrak{J}(z)$  stellt den Hauptzweig  $f_0(z)$  der analytischen Funktion  $f(z)$  dar.

$$(17) \quad \mathfrak{J}(z) = f_0(z).$$

Wir können deshalb bei der Untersuchung des Hauptzweiges die Formeln 2, 7, 10, 13 in gleicher Weise benutzen.

Für die Punkte  $z = \rho e^{oi}$  bzw.  $z = \rho e^{2\pi i}$  auf dem oberen bzw. unteren Rande von  $G_z$  erhält man aus (13) jetzt leicht die Randwerte des Real- und Imaginärteiles von  $f_0(z) = \mathfrak{J}(z)$ , nämlich:

$$I \begin{cases} u(\rho, +o) = u(\rho, -o) = -\frac{e^{-\frac{1}{\rho}}}{\rho} \left[ \int_1^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_{-\frac{1}{\rho}}^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt + \log \rho \right] \\ v(\rho, +o) = \pi \frac{e^{-\frac{1}{\rho}}}{\rho}; \quad v(\rho, -o) = -\pi \frac{e^{-\frac{1}{\rho}}}{\rho}. \end{cases}$$

Dies sind auch tatsächlich die Grenzwerte, denen das Integral  $\mathfrak{J}(z)$  bei beliebiger Annäherung aus dem Innern von  $G_z$  an den Rand  $R$  zustrebt.

Wegen 
$$\frac{d}{dz} \left( -\frac{e^{-\frac{1}{z}}}{z} \right) = \frac{1-z}{z^2} \left( -\frac{e^{-\frac{1}{z}}}{z} \right)$$

und 
$$\frac{d}{dz} \int_{-\frac{1}{z}}^1 \frac{e^{-t}}{t} dt = \frac{e^{-\frac{1}{z}}}{z}$$

leitet man aus (10) sofort die Differentialgleichung ab:

$$(18) \quad f'(z) = \frac{1-z}{z^2} f(z) - \frac{1}{z^2}.$$

Hieraus ergeben sich die Randwerte der partiellen Ableitungen von  $u$  und  $v$ :

$$\text{II} \begin{cases} u_x(\rho, \pm 0) = \frac{1-\rho}{\rho^2} u(\rho, \pm 0) - \frac{1}{\rho^2} = v_y(\rho, \pm 0) \\ u_y(\rho, \pm 0) = \pm \frac{\rho-1}{\rho^3} e^{-\frac{1}{\rho}} = -v_x(\rho, \pm 0). \end{cases}$$

Die Ableitungen höherer Ordnung in einem inneren Punkte von  $G_z$  ergeben sich am einfachsten aus der Gleichung (2). Die Funktionen

$$\varphi(a, z) = \frac{1}{1-az}, \quad \frac{\partial \varphi(a, z)}{\partial z} = \frac{a}{(1-az)^2}, \quad \dots \quad \frac{\partial^n \varphi(a, z)}{\partial z^n} = \frac{n! a^n}{(1-az)^{n+1}}$$

sind im Innern von  $G_z$  alle analytisch für jeden Wert des Parameters  $a$  in  $0 \leq a \leq \infty$ . Deshalb konvergieren dort auch die sämtlichen uneigentlichen Integrale

$$\mathfrak{J}(z) = \int_0^\infty e^{-a} \varphi(a, z) da; \int_0^\infty e^{-a} \frac{\partial \varphi(a, z)}{\partial z} da; \dots \int_0^\infty e^{-a} \frac{\partial^n \varphi(a, z)}{\partial z^n} da$$

und zwar wegen (4) gleichmäßig in jedem beliebigen ganz im Innern von  $G_z$  gelegenen abgeschlossenen Bereiche  $B_z$ . Daher stellt dies dort die Reihe der aufeinander folgenden Ableitungen von  $\mathfrak{J}(z) = f_0(z)$  dar, also

$$(19) \quad f_0^{(n)}(z) = n! \int_0^\infty e^{-a} \frac{a^n}{(1-az)^{n+1}} da = \mathfrak{J}^{(n)}(z).$$

## § 2. Reihenentwicklungen

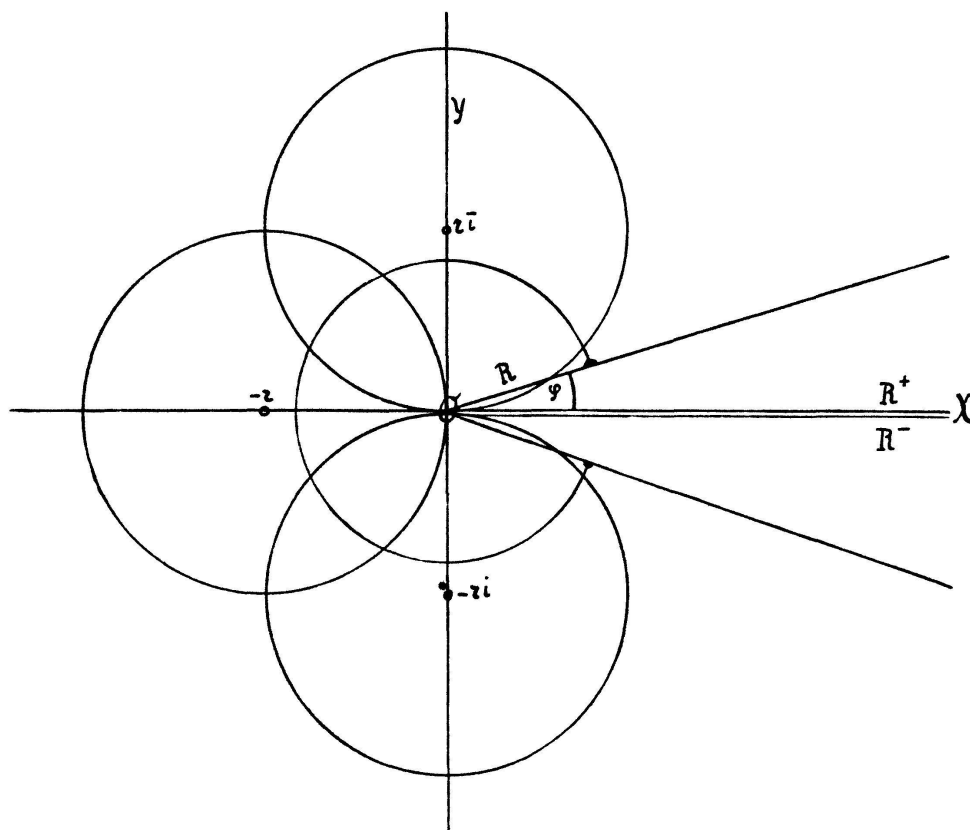


Fig. 2.

Wir entwickeln  $f_0(z)$  zunächst in einem beliebigen Punkte  $z = -r$  ( $0 < r < \infty$ ) auf der negativ reellen Axe von  $G_z$ . Nach (19) ist

$$(20) \quad C_n = \frac{f_0^{(n)}(-r)}{n!} = \int_0^\infty e^{-a} \frac{a^n}{(1+ar)^{n+1}} da, \text{ also}$$

$$(21) \quad f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z+r)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (z+r)^n \int_0^\infty e^{-a} \frac{a^n}{(1+ar)^{n+1}} da.$$

Da der Ursprung die einzige im Endlichen gelegene singuläre Stelle von  $f_0(z)$  ist, so konvergiert diese Potenzreihe im Innern des um  $z = -r$  beschriebenen Kreises, welcher durch 0 hindurchgeht. Sie konvergiert aber sogar noch auf dem Rande des Konvergenzkreises und zwar gleichmäßig und absolut. Dies wird offenbar festgestellt sein, wenn sich die Reihe mit positiven Gliedern (nach 20)

$$(22) \quad f_0(0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n r^n = \int_0^\infty e^{-a} \frac{(ar)^n}{(1+ar)^{n+1}} da = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

als konvergent erweist, was leicht gezeigt werden kann. Wegen

$$\frac{(ar)^n}{(1+ar)^{n+1}} = \left(\frac{ar}{1+ar}\right)^n - \left(\frac{ar}{1+ar}\right)^{n+1}$$

läßt sich das allgemeine Glied  $u_n$  auf die Form bringen:

$$(23) \quad u_n = \varphi(n) - \varphi(n+1) \text{ mit}$$

$$(24) \quad \varphi(n) = \int_0^\infty e^{-a} \left(\frac{ar}{1+ar}\right)^n da.$$

Daß die durch  $u_n$  und  $\varphi(n)$  dargestellten Integrale konvergieren, liegt auf der Hand. Man erkennt auch, daß die Folgen positiver Zahlen  $u_n$  und  $\varphi(n)$  wegen  $\frac{ar}{1+ar} \leq 1$  für  $0 < r < \infty$  und  $0 \leq a \leq \infty$  monoton abnehmen. Daher existieren die Grenzwerte

$$(25) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u \geq 0 \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) = \varphi \geq 0.$$

Wir zeigen, daß  $\varphi = 0$  ist. Setzt man für den Integranden in (24)

$$(26) \quad \psi(a) = e^{-a} \left(\frac{ar}{1+ar}\right)^n = r^n \frac{a^n e^{-a}}{(1+ar)^n},$$

so ist  $\psi(0) = \psi(\infty) = 0$ .  $\psi(a)$  erreicht daher an einer endlichen Stelle ein absolutes Maximum. Nun ist

$$(27) \quad \psi'(a) = -\frac{r^n a^{n-1} e^{-a}}{(1+ar)^{n+1}} (a^2 r + a - n).$$

In  $0 < a < \infty$  hat  $\psi'(a) = 0$  nur die eine Wurzel

$$(28) \quad \alpha = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4rn}}{2r}.$$

Wählt man  $n_0 > \frac{4}{9r}$ , so ist für alle  $n > n_0$

$$(29) \quad \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n}{r}} < \alpha < \sqrt{\frac{n}{r}}$$

und Gleichung (27) bestätigt dann:

$$\psi' \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n}{r}} \right) > 0; \quad \psi' \left( \sqrt{\frac{n}{r}} \right) < 0.$$

Das Maximum des Integranden liegt also an der Stelle  $a = \alpha$ . Demnach lassen sich  $\psi(a)$  und  $\varphi(n)$  folgendermassen nach oben abschätzen:

$$\psi(a) \leq \psi(\alpha) = e^{-\alpha} \left( \frac{\alpha r}{1 + \alpha r} \right)^n < e^{-\alpha} < e^{-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{n}{r}}}$$

$$\varphi(n) = \int_0^{\sqrt{\frac{n}{r}}} \psi(a) da + \int_{\sqrt{\frac{n}{r}}}^{\infty} e^{-a} \left( \frac{a r}{1 + a r} \right)^n da$$

$$(30) \quad |\varphi(n)| < \sqrt{\frac{n}{r}} e^{-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{n}{r}}} + e^{-\sqrt{\frac{n}{r}}}, \text{ daher}$$

$$(31) \quad \varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) = 0 \text{ und nach (23) auch}$$

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

Da nach (23) und (30) für hinreichend große  $n$

$$u_n < \varphi(n) < 2 \sqrt{\frac{n}{r}} e^{-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{n}{r}}}$$

ist, so wird die Reihe  $\sum u_n$  majorisiert durch die konvergente Reihe<sup>2)</sup>

$$(32) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{r}} e^{-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{n}{r}}},$$

d. h.  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  ist selbst konvergent und ihre Summe läßt sich jetzt leicht direkt auswerten. Nach (23) ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} [\varphi(n) - \varphi(n+1)]$$

$$= [\varphi(0) - \varphi(1)] + [\varphi(1) - \varphi(2)] + [\varphi(2) - \varphi(3)] + \dots$$

<sup>2)</sup> K. Knopp. Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Berlin 1922, p. 116.

Weil die  $\varphi(n)$  monoton gegen 0 streben, so darf man die Klammern fortlassen und man erhält so:

$$(33) \quad f_0(0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n r^n = \varphi(0) = \int_0^{\infty} e^{-a} da = 1$$

was nach Formel (2) mit dem Werte von  $\mathfrak{J}(z) = f_0(z)$  in  $z = 0$  übereinstimmt.

Damit haben wir das Resultat bestätigt:

*A. Entwickelt man die Funktion  $f(z)$  in einem beliebigen Punkte  $z = -r \mid 0 < r < \infty \mid$  auf der negativ reellen Axe des 1. Blattes  $G_z$ , so konvergiert jede Potenzreihe*

$$\mathfrak{P}_1(z+r) = \sum_{n=0}^{\infty} (z+r)^n \int_0^{\infty} e^{-a} \frac{a^n}{(1+ar)^{n+1}} da$$

*im Innern und auf dem Rande des Konvergenzkreises  $Kr: |z+r| \leq r$  gleichmäßig und absolut.*

Analog verhält es sich mit der Entwicklung von  $f_0(z)$  in einem beliebigen Punkte  $z = \pm ri$  ( $0 < r < \infty$ ) der imaginären Axe. Nach (19) ist

$$(34) \quad B_n = \frac{f_0^{(n)}(\pm ri)}{n!} = \int_0^{\infty} e^{-a} \frac{a^n}{(1 \mp ari)^{n+1}} da, \text{ also}$$

$$(35) \quad f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n (z \mp ri)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (z \mp ri)^n \int_0^{\infty} e^{-a} \frac{a^n}{(1 \mp ari)^{n+1}} da.$$

Der Konvergenzradius dieser Reihen ist wieder gleich  $r$ . Ein beliebiger Punkt  $z'$  auf dem Rande des Konvergenzkreises ist daher gegeben durch

$$z' = \pm ri + re^{\omega i}; \quad z' = r(e^{\omega i} \pm i), \text{ daher}$$

$$(36) \quad \begin{aligned} f_0(z') &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^n e^{n\omega i} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-a} \frac{(are^{\omega i})^n}{(1 \mp ari)^{n+1}} da \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} u'_n. \end{aligned}$$



$$\text{Wegen } \frac{(a r e^{\omega i})^n}{(1 \mp a r i)^{n+1}} = \left( \frac{a r e^{\omega i}}{1 \mp a r i} \right)^n \pm i e^{-\omega i} \left( \frac{a r e^{\omega i}}{1 \mp a r i} \right)^{n+1}$$

läßt sich das allgemeine Glied  $u'_n$  auf die Form bringen:

$$(37) \quad u'_n = \varphi(n) \pm i e^{-\omega i} \varphi(n+1) \quad \text{mit}$$

$$(38) \quad \varphi(n) = \int_0^\infty e^{-a} \left( \frac{a r e^{\omega i}}{1 \pm a r i} \right)^n da. \quad \text{Dann ist}$$

$$(39) \quad \begin{cases} |u'_n| \leq |\varphi(n)| + |\varphi(n+1)| & \text{und} \\ |\varphi(n)| \leq v_n = \int_0^\infty e^{-a} \frac{(a r)^n}{(1 + a^2 r^2)^{\frac{n}{2}}} da. \end{cases}$$

Wegen  $\frac{a^2 r^2}{1 + a^2 r^2} \leq 1$  für  $0 < r < \infty$  und  $0 \leq a \leq \infty$  ist

$$\left( \frac{a^2 r^2}{1 + a^2 r^2} \right)^{\frac{n}{2}} \geq \left( \frac{a^2 r^2}{1 + a^2 r^2} \right)^{\frac{n+1}{2}}, \quad \text{daher}$$

$v_n > v_{n+1}$  d. h. die Folge der  $v_n$  fällt monoton. Somit ist

$$(40) \quad \begin{aligned} |u'_n| &< v_n + v_{n+1} < 2 v_n \quad \text{und} \\ \sum_{n=0}^\infty |u'_n| &< 2 \sum_{n=0}^\infty v_n = 2 \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty e^{-a} \frac{(a r)^n}{(1 + a^2 r^2)^{\frac{n}{2}}} da. \end{aligned}$$

Setzt man für den Integranden

$$(41) \quad \psi(a) = e^{-a} \frac{(a r)^n}{(1 + a^2 r^2)^{\frac{n}{2}}}, \quad \text{so wird}$$

$$(42) \quad \psi'(a) = - \frac{r^n a^{n-1} e^{-a}}{(1 + a^2 r^2)^{\frac{n}{2}+1}} (a^3 r^2 + a - n).$$

$\psi'(a) = 0$  hat nur eine positiv reelle Wurzel  $\alpha$  in  $0 < a < \infty$  und weil  $\psi(0) = \psi(\infty) = 0$  ist, so ist  $\psi(\alpha)$  das absolute Maximum des

Integranden. Wählt man  $n_0 > \frac{2}{r}$ , so liegt  $\alpha$  für alle  $n > n_0$  zwischen den beiden Grenzen

$$(43) \quad \sqrt[3]{\frac{n}{2r^2}} < \alpha < \sqrt[3]{\frac{n}{r^2}}$$

und Gleichung (41) bestätigt dann

$$\psi' \left( \sqrt[3]{\frac{n}{2r^2}} \right) > 0; \quad \psi' \left( \sqrt[3]{\frac{n}{r^2}} \right) < 0 \text{ für } n > n_0.$$

Damit gelingt die folgende Abschätzung für  $\psi(a)$  und  $v_n$

$$\psi(a) \leq \psi(\alpha) = e^{-\alpha} \frac{(\alpha r)^n}{(1 + \alpha^2 r^2)^{\frac{n}{2}}} < e^{-\alpha} < e^{-\sqrt[3]{\frac{n}{2r^2}}}$$

$$\begin{aligned} v_n &= \int_0^{\sqrt[3]{\frac{n}{r^2}}} \psi(a) da + \int_{\sqrt[3]{\frac{n}{r^2}}}^{\infty} e^{-a} \frac{(ar)^n}{(1 + a^2 r^2)^{\frac{n}{2}}} da \\ &< \sqrt[3]{\frac{n}{r^2}} e^{-\sqrt[3]{\frac{n}{2r^2}}} + e^{-\sqrt[3]{\frac{n}{r^2}}}. \end{aligned}$$

Für hinreichend große  $n$  ist daher immer

$$(44) \quad v_n < 2 \sqrt[3]{\frac{n}{r^2}} e^{-\sqrt[3]{\frac{n}{2r^2}}}.$$

Dies sind aber die Glieder einer konvergenten Majorantenreihe für  $\sum v_n$  und nach (39) auch für  $\sum |u'_n|$ , d. h. die Reihe (35) konvergiert absolut für jedes beliebige  $z'$ , also

B. Entwickelt man die Funktion  $f(z)$  in einem beliebigen Punkte  $z = \pm ri$  ( $0 < r < \infty$ ) auf der imaginären Axe des I. Blattes  $G_z$ , so konvergiert jede Potenzreihe

$$\mathfrak{P}_2(z \mp ri) = \sum_{n=0}^{\infty} (z \mp ri)^n \int_0^{\infty} e^{-a} \frac{a^n}{(1 \mp ari)^{n+1}} da$$

im Innern und auf dem Rande des Konvergenzkreises  $Kr$   $|z \mp ri| \leq r$  gleichmäßig und absolut.

Insbesondere läßt sich jede dieser Reihen für  $z = 0$  wieder leicht auswerten. Nach (34) ist

$$f_0(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mp ri)^n \int_0^{\infty} e^{-a} \frac{a^n}{(1 \mp ari)^{n+1}} da = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-a} \frac{(\mp ari)^n}{(1 \mp ari)^{n+1}} da.$$

Hier wird  $\varphi(n) = \int_0^{\infty} e^{-a} \left( \frac{\mp ari}{1 \mp ari} \right)^n da$  und wegen

$$\frac{(\mp ari)^n}{(1 \mp ari)^{n+1}} = \left( \frac{\mp ari}{1 \mp ari} \right)^n - \left( \frac{\mp ari}{1 \mp ari} \right)^{n+1}$$

$$f_0(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \varphi(n) - \varphi(n+1) \right] = \varphi(0) = 1.$$

Das in  $A$  und  $B$  beschriebene Verhalten weisen auch die Entwicklungen der Ableitungen  $f_0^{(k)}(z)$  bis zu beliebig hoher endlicher Ordnung  $k$  auf. Es ist nach (21) und (35).

$$f_0^{(k)}(z) = \mathfrak{P}_1^{(k)}(z+r) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)\dots(n+k) C_{n+k}(z+r)^n \quad (45)$$

$$f_0^{(k)}(z) = \mathfrak{P}_2^{(k)}(z \mp ri) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)\dots(n+k) B_{n+k}(z \mp ri)^n.$$

Haben  $u_n$  und  $u'_n$  dieselbe Bedeutung wie in den Gleichungen (22) und (36) und setzt man in  $\mathfrak{P}_1^{(k)}$   $z = 0$ , in  $\mathfrak{P}_2^{(k)}$  einen beliebigen Randpunkt  $z'$  des zugehörigen Konvergenzkreises ein, so erhält man:

$$f_0^{(k)}(0) = \mathfrak{P}_1^{(k)}(r) = \frac{1}{r^k} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)\dots(n+k) u_{n+k} \quad (46)$$

$$f_0^{(k)}(z') = \mathfrak{P}_2^{(k)}(z' \mp ri) = \frac{1}{r^k e^{k\omega i}} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)\dots(n+k) u'_{n+k}.$$

Dann werden nach (32), (40), (44) die Reihen der absoluten Beträge der Glieder dieser beiden letzten Reihen majorisiert durch

$$(47) \quad \frac{2}{r^k} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)\dots(n+k) \sqrt{\frac{n+k}{r}} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n+k}{r}}} \text{ bzw.}$$

$$\frac{2}{r^k} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)\dots(n+k) \sqrt[3]{\frac{n+k}{r^2}} e^{-\sqrt[3]{\frac{n+k}{2r^2}}}$$

und die beiden Majoranten konvergieren für jedes endliche  $k$ .

C. Auch die Ableitungen von beliebig hoher endlicher Ordnung  $k$  der Potenzreihen aus A und B:

$$f_0^{(k)}(z) = \mathfrak{P}_1^{(k)}(z+r) \text{ und } f_0^{(k)}(z) = \mathfrak{P}_2^{(k)}(z+ri) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

konvergieren für ein beliebiges  $r$  ( $0 < r < \infty$ ) auf dem Rande des zugehörigen Konvergenzkreises  $K_r$  gleichmäßig und absolut.

Hieraus ergibt sich durch Anwendung des Abel'schen Grenzwertsatzes die Folgerung:

D. Der Hauptzweig  $f_0(z) = \mathfrak{J}(z)$  ist samt allen Ableitungen bis zu beliebig hoher endlicher Ordnung  $k$  in jedem abgeschlossenen Sektor  $S$  in  $G_z$ :

$$0 \leq |z| \leq R; \quad 0 < \varphi \leq \arcs z \leq 2\pi - \varphi$$

stetig, wie klein auch der Winkel  $\varphi$  gewählt wird. (Fig. 2)

Gleich wie für einen ganz im Innern von  $G_z$  gelegenen Bereich  $B_z$  weist man die gleichmäßige Konvergenz des Integrals  $\mathfrak{J}^{(n)}(z)$  aus Formel (19) auch für einen solchen Sektor  $S$  nach. Hieraus und aus D folgt daher:

E. Auf jedem beliebigen Wege nach dem singulären Ursprung  $0$ , welcher die positiv reelle Axe nirgends trifft, nimmt die Ableitung einer jeden festen endlichen Ordnung  $k$  des Hauptzweiges  $f_0(z)$  denselben endlichen Grenzwert an und dieser kann durch das Borel'sche Integral (19) für  $z = 0$  gegeben werden, nämlich:

$$(48) \quad \frac{f_{0(0)}^{(k)} = \mathfrak{J}_{(0)}^{(k)} = k! \int_0^{\infty} e^{-a} a^k da = (k!)^2}{k = 0, 1, 2, \dots}$$

In  $a_k = \frac{f_{0(0)}^{(k)}}{k!} = k!$  erkennen wir so die Koeffizienten der divergenten Potenzreihe (1) wieder. Die Borel'schen Integrale (19) streben zwar auf

allen im Innern von  $G_z$  gelegenen Halbstrahlen  $y = m(x - \rho)$  gegen dieselben endlichen Grenzwerte wie die in  $0 < \rho < \infty$  reguläre Funktion  $f_0^{(n)}(z)$ , aber in der Richtung des Randes  $R$  ( $y = 0$ ) versagen sie. Dies kommt namentlich kraß zum Ausdruck bei den Integralen mit ungeradem Index, für welche

$$\mathfrak{J}^{(2\lambda-1)}(\rho) = (2\lambda-1)! \int_0^\infty e^{-a} \frac{a^{2\lambda-1}}{(1-a\rho)^{2\lambda}} da \quad 0 < \rho < \infty$$

für alle diese Werte  $\rho$  bestimmt divergiert.

Deshalb kann man diese Integrale bei der Berechnung von  $f_0(0)$  und den Ableitungen  $f_0^{(k)}$  längs des Weges  $z = \rho \rightarrow \pm 0$  nicht gebrauchen. Man muß hiezu schon die etwas unbequemereren Formeln I für die Randwerte  $u$  und  $v$  von  $f_0(z)$  verwenden. Die hier auftretenden Ausdrücke sind alle für  $0 < \rho < \infty$  beliebig oft nach  $\rho$  differenzierbar. Wegen

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow +0} \frac{e^{-\frac{1}{\rho}}}{\rho} (k + \log \rho) &= 0 \quad \text{wird} \\ \lim_{\rho \rightarrow +0} u(\rho, \pm 0) &= - \lim_{\rho \rightarrow +0} \frac{\int_{-\frac{1}{\rho}}^1 \frac{e^{-t}-1}{t} dt}{\rho e^{\frac{1}{\rho}}} = - \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{s \int_{-s}^1 \frac{e^{-t}-1}{t} dt}{e^s} \\ &= - \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\frac{d}{ds} \left[ s \int_{-s}^1 \frac{e^{-t}-1}{t} dt \right]}{e^s} \\ &= - \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\int_{-s}^1 \frac{e^{-t}-1}{t} dt - (e^s - 1)}{e^s} \\ &= 1 - \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\int_{-s}^1 \frac{e^{-t}-1}{t} dt}{e^s} \\ &= 1 - \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{e^s - 1}{s} = 1. \end{aligned}$$

$$(49) \quad \lim_{\rho \rightarrow +0} u(\rho, \pm 0) = 1, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} v(\rho, \pm 0) = 0.$$

Durch analoge Rechnung erhält man aus I und II

$$(50) \quad \begin{cases} \lim_{\rho \rightarrow +0} u_x(\rho, \pm 0) = \lim_{\rho \rightarrow +0} v_y(\rho, \pm 0) = 1 \\ \lim_{\rho \rightarrow +0} u_y(\rho, \pm 0) = \lim_{\rho \rightarrow +0} -v_x(\rho, \pm 0) = 0, \text{ also} \end{cases}$$

$$(51) \quad \lim_{\rho \rightarrow +0} f_0(\rho) = 1 \text{ und } \lim_{\rho \rightarrow +0} f_0'(\rho) = 1$$

d. h. der Hauptzweig  $f_0(z)$  und seine erste Ableitung  $f_0'(z)$  sind auch noch längs des Randes  $R$  bis in den Ursprung  $0$  hinein stetig und nehmen dort denselben Grenzwert wie in allen übrigen Richtungen an.

Aus Gleichung (13) ergibt sich unmittelbar, daß die analytische Funktion  $f(z)$  auf jedem beliebigen Wege und für jede Bestimmung von  $\log z$  im unendlich fernen Punkte verschwindet. Mit  $f(z)$  verschwindet aber nach Gleichung (18) auch  $f'(z)$  und jede nachfolgende Ableitung für  $z = \infty$

$$(52) \quad f_{(\infty)}^{(k)} = 0 \quad k = 0 \ 1 \ 2 \ \dots\dots\dots$$

*F. Der Hauptzweig  $f_0(z)$  und mindestens seine erste Ableitung  $f_0'(z)$  sind im abgeschlossenen Gebiete  $G_z$  stetige und im Innern von  $G_z$  analytische Funktionen. Daher sind Real- und Imaginärteil von  $f_0(z)$  im Innern von  $G_z$  harmonische Funktionen, welche mit ihren partiellen Ableitungen 1. Ordnung stetige Randwerte besitzen. Diese erfüllen noch auf dem Rande durchwegs die Cauchy-Riemann'schen Differential-Gleichungen:*

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

Daher müssen die beiden über den Rand  $R$  von  $G_z$  erstreckten Integrale

$$\int_R u_y dx \quad \text{und} \quad \int_R v_y dx$$

verschwinden<sup>3)</sup>, was sich leicht bestätigen läßt. Nach II ist:

<sup>3)</sup> *W. F. Osgood*, Lehrbuch der Funktionentheorie, Leipzig und Berlin 1912, pag. 620.

$$\int_R u_y dx = \int_0^\infty u_y(\rho, +0) d\rho + \int_\infty^0 u_y(\rho, -0) d\rho$$

$$= 2\pi \int_0^\infty e^{-\frac{1}{\rho}} \frac{\rho - 1}{\rho^3} d\rho.$$

Substituiert man hierin  $\rho = \frac{1}{t}$ ,  $d\rho = -\frac{dt}{t^2}$ , so erhält man:

$$\int_R u_y dx = 2\pi \left[ \int_0^\infty e^{-t} dt - \int_0^\infty t e^{-t} dt \right] = 0$$

analog erhält man

$$\int_R v_y dx = \int_0^\infty v_y(\rho, +0) d\rho - \int_0^\infty v_y(\rho, -0) d\rho = 0$$

weil  $v_y(\rho, +0) = v_y(\rho, -0)$  ist.

Wir betrachten jetzt ein beliebiges anderes abgeschlossenes Blatt  $B_m$  der Windungsfläche  $W_z$  und den darin definierten  $m^{\text{ten}}$  Zweig  $f_m(z)$  von  $f(z)$  mit der Bestimmung:

$$2m\pi \leq \text{arc}z \leq 2(m+1)\pi; \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Bedeutet analog  $\log_m(z)$  den in  $B_m$  definierten Zweig,  $\log_0(z)$  den Hauptzweig von  $\log(z)$ , so ist wegen

$$\log_m(z) = \log_0(z) + 2m\pi i$$

nach Gleichung (13):

$$(53) \quad f_m(z) = f_0(z) - 2m\pi i \frac{e^{-\frac{1}{z}}}{z} \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Hieraus und aus  $F$  ergibt sich das Verhalten von  $f_m(z)$  in den singulären Stellen  $z = 0$  und  $z = \infty$ .

*G. Jeder Zweig  $f_m(z)$  ( $m \neq 0$ ) und seine Ableitungen  $f_m^{(k)}(z)$  aller Ordnungen  $k$  sind in der zum abgeschlossenen Blatte  $B_m$  gehörigen Umgebung des unendlich fernen Punktes stetig und verschwinden in dieser*

singulären Stelle; im Ursprung dagegen besitzen sie eine wesentliche Singularität. Und zwar ist auf allen in der rechten Halbebene gelegenen Halbstrahlen:

$$\lim_{z \rightarrow 0} f_m(z) = 1$$

und auf allen in der linken Halbebene gelegenen Halbstrahlen mit Einschluß der  $Y$ -Achse:

$$\lim_{z \rightarrow 0} f_m(z) = \infty$$

Der Hauptzweig nimmt so eine merkwürdige Sonderstellung ein.

### § 3. Der Bildbereich $G_w$ von $G_z$

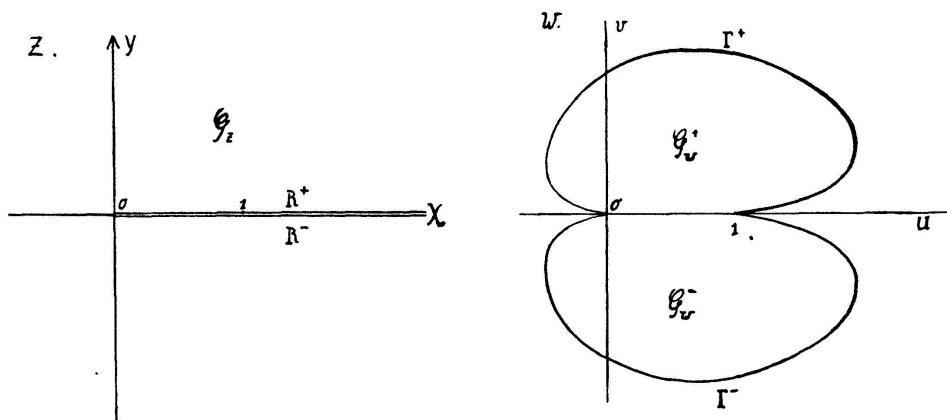


Fig. 3.

Wir ermitteln in erster Linie die Bildkurve  $\Gamma$  des Randes  $R$  von  $G_z$ . Die Teilstücke  $R^+$  und  $R^-$  von  $R$  werden durch die Gleichungen gegeben:

$$(54) \quad R^+ : 0 \leq x \leq \infty, y = +0; \quad R^- : 0 \leq x \leq \infty, y = -0.$$

Da der Hauptzweig  $f_0(z)$  auf dem Rande endlich und stetig ist, so ist die Bildkurve  $\Gamma$  eine endliche, stetige geschlossene Linie. Den Teilstücken  $R^+$ ,  $R^-$  von  $R$  entsprechen zwei Teilstücke  $\Gamma^+$ ,  $\Gamma^-$  von  $\Gamma$ , die symmetrisch zur  $u$ -Achse liegen. Es genügt daher, eines von ihnen, etwa  $\Gamma^+$  genauer zu untersuchen.



Die Gleichung der Bildkurve  $\Gamma$  ergibt sich nach den Formeln I in der parametrischen Darstellung:

$$(55) \quad \begin{cases} u = -\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} \left[ \int_1^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_{-\frac{1}{x}}^1 \frac{e^{-t}-1}{t} dt + \log x \right] \\ v = \pm \pi \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} \quad 0 \leq x \leq \infty \end{cases}$$

was nach leichter Umwandlung auch auf die Form gebracht werden kann:

$$(56) \quad \begin{cases} u = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} \left[ \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{e^t - e^{-t}}{t} dt - \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right] = g(x) \cdot h(x) \\ v = \pm \pi \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \pm \pi g(x) \quad 0 \leq x \leq \infty. \end{cases}$$

Dem Teilstück  $\Gamma^+$  entspricht das obere, dem Teilstück  $\Gamma^-$  das untere Vorzeichen in der Ordinate  $v$ . Die Richtung der Tangente an einen Punkt von  $\Gamma$  wird gegeben durch

$$\frac{dv}{du} = \frac{v_x}{u_x}, \text{ also nach II durch}$$

$$(57) \quad \frac{dv}{du} = \pm \pi \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} \cdot \frac{(1-x)}{(1-x)u-1}.$$

An den Stellen  $x=0, 1, \infty$  wird  $\frac{dv}{du} = 0$ .

Die Bildkurve  $\Gamma$  besitzt in allen Punkten eine stetig sich drehende Tangente und ist daher eine reguläre Kurve.

Wir verfolgen zunächst die Bewegung der Abszisse  $u$ , wenn die Variable  $z$  stetig das obere Randstück  $R^+$  von 0 bis unendlich durchläuft.

Da wir hiebei die partiellen Ableitungen von  $u$  nach  $x$  der beiden ersten Ordnungen brauchen, so geben wir dieselben hier an:

$$(58) \quad \begin{aligned} u_x &= \frac{(1-x)u - 1}{x^2} = -\frac{(x-1)u + 1}{x^2} \\ u_{xx} &= \frac{(2x^2 - 4x + 1)u + 3x - 1}{x^4} \end{aligned}$$

Nun bedeutet  $u_x(0, 0) = 1$  (Gl. (50)), daß  $u$  von  $x = 0$  ausgehend zunächst wächst und zwar solange bis  $u_x$  das Vorzeichen wechselt. Für alle endlichen Stellen  $\xi$  wird

$$(59) \quad u_x(\xi, 0) = 0, \text{ wenn nach (58) } u(\xi, 0) = \frac{1}{1-\xi} \text{ wird.}$$

Für alle diese Nullstellen von  $u_x(x, 0)$  wird nach (58)

$$(60) \quad \begin{aligned} u_{xx}(\xi, 0) &= \frac{-1}{\xi^2(1-\xi)} = \frac{1}{\xi^2(\xi-1)} \text{ d. h.} \\ u_{xx}(\xi, 0) &\begin{cases} < 0 \text{ für } 0 \leq \xi < 1 \\ > 0 \text{ für } 1 < \xi < \infty \end{cases} \end{aligned}$$

Wir untersuchen  $u(x, 0)$  an der Stelle  $x = 1$ , also nach (56)

$$\begin{aligned} u(1, 0) &= \frac{1}{e} \left[ \int_0^1 \frac{e^t - e^{-t}}{t} dt - \int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \right] = g(1) \cdot h(1). \\ \frac{e^t - e^{-t}}{t} &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

ist eine mit  $t$  monoton wachsende Funktion, welche im ersten Integral ihr Maximum an der obern, ihr Minimum an der untern Grenze erreicht. Im zweiten Integral ist stets  $t > 1$ , daher

$$0 < \int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt < \int_1^\infty e^{-t} dt = \frac{1}{e} < \frac{1}{2}.$$

Für  $0 \leq t \leq 1$  ist  $2 \leq \frac{e^t - e^{-t}}{t} \leq e - e^{-1}$ , mithin

$$\frac{1}{e} \left[ \int_0^1 2 dt - \int_1^\infty e^{-t} dt \right] < u(1, 0) < \frac{1}{e} \int_0^1 \left( e - \frac{1}{e} \right) dt$$

$$\frac{1}{3} \left[ 2 - \frac{1}{2} \right] < \frac{1}{e} \left[ 2 - \frac{1}{e} \right] < u(1, 0) < 1 - \frac{1}{e^2} < 1 - \frac{1}{9}$$

$$(61) \quad \frac{1}{2} < u(1, 0) < \frac{8}{9} < u(0, 0) = 1$$

d. h. an der Stelle  $x = 1$  muß  $u$  bereits das erste Maximum hinter sich haben. Also muß die Gleichung (59) im Intervall  $0 < x < 1$  mindestens eine Wurzel  $\xi$  haben. Es sei  $\xi_1$  die erste Wurzel dieser Gleichung. Ihr entspricht das erste Maximum  $M'_a$ . In der Tat ist an der Stelle  $\xi_1$  nach (59) und (60)

$$u_x(\xi_1, 0) = 0; \quad u_{xx}(\xi_1, 0) < 0.$$

Hätte die Gleichung (59) in diesem Intervall noch weitere Lösungen, so sei  $\xi_2$  die auf  $\xi_1$  nachfolgende Wurzel. An der Stelle  $x = \xi_2$  müßte  $u(x, 0)$  offenbar ein Minimum haben, also müßte hier

$$u_x(\xi_2, 0) = 0 \text{ und } u_{xx}(\xi_2, 0) > 0 \text{ sein,}$$

was nach (60) unmöglich ist.

Im Intervall  $0 \leq x \leq \xi_1 < 1$  wächst mithin  $u$  monoton, erreicht bei  $x = \xi_1$  das Maximum  $M'_a(\xi_1, 0)$  und im Intervall  $\xi_1 \leq x \leq 1$  fällt  $u$  monoton.

Wir haben in (56)  $u = g(x) h(x)$  gesetzt. Dabei ist

$$(62) \quad g(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$$

eine im Intervall  $0 \leq x \leq 1$  monoton wachsende und im Intervall  $1 \leq x \leq \infty$  monoton fallende Funktion.

$$g'(x) = (1 - x) \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3}; \quad g'(x) = 0 \text{ für } x = 1 \text{ und } x = \infty.$$

$$(63) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Für } 0 \leq x \leq 1 \text{ ist } 0 \leq g(x) \leq \frac{1}{e} \text{ mit } g(0) = 0 \\ \text{Für } 1 \leq x \leq \infty \text{ ist } \frac{1}{e} \geq g(x) \geq 0 \text{ mit } g(\infty) = 0. \end{array} \right.$$

$$(64) \quad h(x) = \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{e^t - e^{-t}}{t} dt - \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

fällt monoton von  $+\infty$  auf  $-\infty$ , ist aber im Intervall  $0 < x < \infty$  eine stetige und differenzierbare Funktion:

$$(65) \quad \left\{ \begin{array}{l} h'(x) = -\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} < 0 \text{ für alle } x > 0 \\ h(0) = +\infty \quad h(+\infty) = -\infty \end{array} \right.$$

$h(x)$  hat somit im Intervall  $0 \leq x \leq \infty$  genau eine Nullstelle, die wir mit  $x_0$  bezeichnen wollen. Wegen  $g(x) > 0$  im Innern dieses Intervalles hat daher hier der Realteil  $u = g(x) h(x)$  nur eine Nullstelle

$$(66) \quad u(x_0, 0) = g(x_0) h(x_0) = 0; \quad x_0 > 1.$$

Oben haben wir gesehen, daß  $h(1)$  noch positiv ist, also muß  $x_0 > 1$  sein.

Solange  $x > 1$  und  $u > 0$  ist, bleibt nach (58)  $u_x < 0$  und da für  $u(x_0, 0) = 0$

$$u_x(x_0, 0) = -\frac{1}{x_0^2}$$

noch negativ ist, so fällt  $u$  im Intervall  $1 \leq x \leq x_0$  beständig und fällt solange weiter, bis wieder  $u_x = 0$  oder nach (58) bis  $u(\xi, 0) = -\frac{1}{\xi - 1}$  wird.

Weil  $u(\infty, 0) = 0$  ist, so muß diese Gleichung im Intervall  $1 < x_0 \leq x < \infty$  mindestens eine Wurzel haben, sonst müßte ja stets

$u < 0$  bleiben. Es sei  $\xi_2$  die erste Wurzel in diesem Intervall. Dann ist für diese Stelle nach (59) und (60)

$$u_x(\xi_2, 0) = 0 \text{ und } u_{xx}(\xi_2, 0) > 0.$$

Also ist  $u(\xi_2, 0)$  wirklich ein Minimum  $M_i'(\xi_2, 0)$ . Im Intervall  $\xi_1 \leq x \leq \xi_2$  mit  $0 < \xi_1 < 1 < \xi_2 < \infty$  fällt  $u$  monoton von dem positiven Maximalwert  $M_a'(\xi_1, 0)$  auf den negativen Minimalwert  $M_i'(\xi_2, 0)$ .

Wären im Intervall  $\xi_2 < x < \infty$  wieder noch weitere Lösungen der Gleichung (59), so sei  $\xi_3$  die auf  $\xi_2$  nachfolgende Wurzel. Dieser Stelle müßte dann offensichtlich ein Maximum von  $u$  entsprechen. Also müßte

$$u_x(\xi_3, 0) \text{ und } u_{xx}(\xi_3, 0) < 0 \text{ sein,}$$

was nach (60) unmöglich ist.

Daher wächst  $u$  im Intervall  $\xi_2 \leq x \leq \infty$  monoton, d. h. es ist hier

$$-\frac{1}{\xi_2 - 1} \leq u \leq 0.$$

Für  $x = 4$  z. B. erhält man  $u(4, 0) > -0,13$  oder  $-u(4, 0) < 0,13$ . Daher ist nach (58)

$$u_x(4, 0) = \frac{-3u(4, 0) - 1}{16} < \frac{0,4 - 1}{16} < 0.$$

Mithin ist an der Stelle  $x = 4$   $u$  immer noch im Abnehmen begriffen, d. h. es muß  $\xi_2 > 4$  sein.

Daher ist

$$u(\xi_2, 0) = -\frac{1}{\xi_2 - 1} > -\frac{1}{3}.$$

Das Minimum von  $u$  liegt in einem geringeren Abstände als  $\frac{1}{3}$  vom Ursprung entfernt. Wenn die Variable  $z$  mithin das obere Randstück  $R^+$  stetig von 0 bis  $\infty$  durchläuft, so nimmt der Realteil  $u$  von  $f_0(z)$  zu-

nächst monoton zu, bis er sein Maximum  $M_a$ , das endlich ist, erreicht hat. Dann nimmt er monoton ab bis zu dem negativen Minimum  $M_i$ , das vom Nullpunkt um weniger als  $\frac{1}{3}$  entfernt liegt. Hierauf nimmt  $u$  wieder monoton zu, bis der Ursprung erreicht ist.

Jedem Werte, den  $u$  auf dem oberen Rande  $R^+$  annimmt, entspricht nach (56) eindeutig eine positive Ordinate  $v$ , die zunächst ebenfalls monoton wächst, bis sie bei  $x = 1$  das Maximum  $\frac{\pi}{e}$  erreicht hat. Dann fällt sie monoton auf null.

Das Maximum von  $\Gamma^+$  liegt mithin an der Stelle  $u(1, 0)$ ,  $v(1, 0)$ , also links vom Ausgangspunkte  $f_0(0) = 1$ , denn wie wir oben gesehen haben, ist

$$u(1, 0) < \frac{8}{9} < u(0, 0) = 1.$$

An dieser Stelle ist in der Tat nach (57)  $\frac{dv}{du} = 0$ . Da weiter am Anfangspunkt  $x = 1$  und am Endpunkt  $x = \infty$  von  $R^+$   $\frac{dv}{du}$  ebenfalls verschwindet, so ist die  $u$  Axe Tangente im Anfangspunkt  $u(0, 0) = 1$ ,  $v(0, 0) = 0$  und im Endpunkt  $u(\infty, 0) = 0$ ,  $v(\infty, 0) = 0$  von  $\Gamma^+$ .

Aus diesen wenigen Daten läßt sich schon eine ganz gute Vorstellung über den Verlauf von  $\Gamma^+$  und damit auch von  $\Gamma^-$  machen, und die Bildkurve  $\Gamma$  hat das in der Figur veranschaulichte Aussehen.

Der endliche durch  $\Gamma$  begrenzte Teil der  $w$  Ebene stellt uns den Bildbereich  $G_w$  von  $G_z$  dar, was uns in anschaulicher Weise eine Vorstellung über den Wertevorrat des Hauptzweiges  $f_0(z)$  verschafft.

Wir betrachten noch kurz die Doppelschar von Parallelen zur  $X$  bzw.  $Y$  Axe. Ihre Bilder in  $G_w$  bilden natürlich ein Orthogonalsystem. Die Parallelen zur  $X$  Axe liegen alle im Innern von  $G_z$ . Ihre Bilder sind deshalb ausnahmslos geschlossene Kurven, die alle vom Ursprung ausgehen und dort wieder zurückkehren, und zwar erfüllt die Schar der Bilder der in der obern Halbebene gelegenen Parallelen zur  $X$  Axe die obere Hälfte und die andere Schar die untere Hälfte von  $G_w$ .

Alle Parallelen zur  $Y$  Axe in der linken Halbebene liegen ebenfalls im Innern von  $G_z$ . Daher sind deren Bilder ganz in  $G_w$  verlaufende geschlossene Kurven, die alle in den Nullpunkt einströmen. Dagegen

können die Parallelen zur  $Y$  Axe, welche den Rand  $R$  schneiden, keine geschlossenen Kurven zu Bildern haben. Diese Bildkurven zerfallen in zwei zur  $u$  Axe symmetrisch gelegene Aeste, die wieder vom Nullpunkte ausgehen, aber auf dem Rande  $\Gamma$  und zwar unter rechtem Winkel ausmünden.

Was die Abbildungseigenschaften der übrigen Zweige  $f_m(z)$  anbetrifft, so erkennt man aus Gleichung (53), daß diese sehr verwickelter Natur sein müssen. Der Bildbereich eines jeden Blattes  $B_m$  ist jetzt nicht mehr wie hier ein endliches Gebiet, nicht einmal eine schlichte Ebene, sondern seinerseits eine unendlich vielblättrige Fläche. Aus (53) ersieht man z. B. daß das Bild der  $Y$  Axe eine vom Punkte  $w = 1$  ausgehende, spiralförmige Kurve sein muß, die sich auf dieser Fläche ins Unendliche windet.

Die Umkehrfunktion  $z = \varphi(w)$  von  $w = f(z)$  ist ebenfalls unendlich vieldeutig.

(Eingegangen den 8. Juli 1930)