

# Opérateurs de Dirac et équations de Maxwell.

Autor(en): **Juvet, G.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **2 (1930)**

PDF erstellt am: **17.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-3620>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Opérateurs de Dirac et équations de Maxwell

par G. JUVET, Lausanne

**Introduction.** Dans ses remarquables mémoires et dans son livre: *The Principles of Quantum Mechanics*<sup>1)</sup>, M. P. A. M. Dirac — afin d'obtenir des équations pour l'électron plus conformes aux principes de la mécanique des quanta que celles qu'on obtient en partant de l'équation de d'Alembert — s'est proposé de trouver un opérateur différentiel du premier ordre  $\nabla$  qui itéré  $\nabla^2$  soit l'opérateur de d'Alembert  $\square$ :

$$\nabla^2 = \square \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{j=4} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

avec  $x, y, z = x_1, x_2, x_3$ ;  $ict = x_4$ .

Cela revient à trouver quatre „nombres“  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$  tels que

$$\left( \sum_{j=1}^{j=4} \Gamma_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^2 = \sum_{j=1}^{j=4} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2},$$

c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$\Gamma_j \Gamma_k + \Gamma_k \Gamma_j = 0, \quad (j \neq k), \quad \Gamma_j^2 = 1.$$

Ces nombres peuvent être considérés comme des opérateurs représentables par des matrices ou par des nombres hypercomplexes. Dans la représentation par des matrices, on peut prendre:

$$\Gamma_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Gamma_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Gamma_4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

<sup>1)</sup> Oxford University Press, 1930; p. 238 et suiv.

mais la fonction qui subit l'opérateur  $\nabla$  n'est plus un scalaire. Pour M. H. Weyl<sup>2)</sup>, elle est une matrice à quatre lignes et une colonne

$$\begin{vmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{vmatrix},$$

et l'on a pour la matrice  $\|\nabla\psi\|$  qui est du même type, les quatre composantes de  $\left\| \sum_{k=1}^{k=4} \nabla_{jk} \psi_k \right\|$  c'est-à-dire<sup>3)</sup>:

$$\begin{aligned} & i \frac{\partial \psi_4}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_4}{\partial x_1} + i \frac{\partial \psi_3}{\partial x_3} + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_4} \\ & i \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x_2} - i \frac{\partial \psi_4}{\partial x_3} + \frac{\partial \psi_4}{\partial x_4} \\ & - i \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} - i \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_4} \\ & - i \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + i \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} \end{aligned}$$

M. A. Proca, en utilisant la représentation par les nombres hypercomplexes, a proposé, dans une généralisation hardie et élégante, de remplacer la fonction des ondes par un nombre hypercomplexe et il a obtenu, pour les équations de Dirac, un système de 16 équations aux dérivées partielles du premier ordre dont on peut espérer tirer un heureux parti pour la dynamique de l'électron<sup>4)</sup>.

Nous avons retrouvé les nombres hypercomplexes en question en cherchant à résoudre un problème que s'est posé M. C. Lanczos<sup>4)</sup>: il est possible de donner aux équations de Maxwell et aux équations de Dirac des formes qui les rapprochent les unes des autres en utilisant le calcul des quaternions, et cela pourrait permettre de lier les équations de Dirac à une théorie de champ. Les mémoires de M. Lanczos sont d'une étonnante ingéniosité et l'élégance de leurs conceptions est à souligner<sup>5)</sup>, cependant il se présente en cours de route des difficultés con-

<sup>2)</sup> Gruppentheorie und Quantenmechanik, p. 112.

<sup>3)</sup> Gruppentheorie und Quantenmechanik, p. 171.

<sup>4)</sup> C. R. Paris, T. 190, séance du 16 juin 1930, p. 1377, et T. 191, séance du 7 juillet 1930, p. 26; enfin J. de Phys. (VII) T. I, juillet 1930, p. 235—248.

<sup>5)</sup> Cf. en particulier le premier d'une série de trois mémoires, intitulé: Die tensoranalytischen Beziehungen der Diracschen Gleichung, Z. f. Phys. Bd. 57, p. 447—473.

cernant la covariance qui conduisent l'auteur à cette remarque: „Dieser Umstand scheint sehr darauf hinzuweisen, daß die Diracsche Gleichung nicht als ein abgeschlossenes System für sich, sondern als Bestandteil eines größeren Systems zu betrachten ist.“

Nous verrons que si l'on utilise non pas les quaternions comme système de nombres hypercomplexes, mais bien un autre système, celui-là même qu'a employé M. Proca, on est conduit à une formulation très simple des équations de Maxwell. Nous croyons que c'est en rapprochant ces résultats de ceux qu'a obtenus M. Proca qu'on pourra obtenir une théorie de champ pour les équations de Dirac. Pour l'instant, nous nous bornerons aux équations de Maxwell.

\*

\*        \*

1. Les nombres hypercomplexes dont il s'agit ici sont des nombres considérés naguère par plusieurs auteurs dont Clifford est le premier en date<sup>6)</sup>. Ils servent à représenter les substitutions linéaires qui laissent invariante la forme:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

(où  $x_4$  sera *ict*); ce sont les rotations de l'espace euclidien  $E_4$ . On démontre que ces substitutions linéaires  $x \rightarrow x'$  s'obtiennent de la manière suivante.

On définit un système de nombres hypercomplexes à multiplication associative au moyen de 16 unités formées à partir de 5 unités fondamentales:

$$1, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4,$$

dont les produits deux à deux satisfont aux équations suivantes:

$$(1) \quad \begin{cases} 1 \cdot \Gamma_j = \Gamma_j, & \Gamma_j^2 = 1 \\ \Gamma_j \Gamma_k + \Gamma_k \Gamma_j = 0, & (j \neq k). \end{cases}$$

Les autres unités du système sont les produits:

---

<sup>6)</sup> Pour tout ce qui concerne les nombres hypercomplexes, il faut se reporter à l'Encyclopédie des Sciences mathématiques, Tome I. volume I, fascicule 3, (1908) où MM. *Cartan* et *Study* ont résumé, d'une façon très originale, les résultats obtenus à cette date dans cette partie des mathématiques; cf. tout particulièrement, pour les nombres de Clifford, p. 463—466.



$$\begin{aligned} & \Gamma_1 \Gamma_2, \Gamma_1 \Gamma_3, \Gamma_1 \Gamma_4, \Gamma_2 \Gamma_3, \Gamma_2 \Gamma_4, \Gamma_3 \Gamma_4; \\ & \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3, \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_4, \Gamma_1 \Gamma_3 \Gamma_4, \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4; \\ & \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4. \end{aligned}$$

Ces 16 unités sont linéairement indépendantes et tout produit d'un nombre quelconque d'entre elles se réduit grâce à (I) à l'une d'elles. Un nombre hypercomplexe de notre système aura la forme suivante:

$$\begin{aligned} C = & c_0 + c_1 \Gamma_1 + c_2 \Gamma_2 + c_3 \Gamma_3 + c_4 \Gamma_4 \\ & + c_{12} \Gamma_1 \Gamma_2 + c_{13} \Gamma_1 \Gamma_3 + c_{14} \Gamma_1 \Gamma_4 + c_{23} \Gamma_2 \Gamma_3 \\ & \qquad \qquad \qquad + c_{24} \Gamma_2 \Gamma_4 + c_{34} \Gamma_3 \Gamma_4 \\ & + c_{123} \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 + c_{124} \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_4 + c_{134} \Gamma_1 \Gamma_3 \Gamma_4 + c_{234} \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4 \\ & + c_{1234} \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4. \end{aligned}$$

Les  $c_\lambda$  sont des nombres ordinaires (qui peuvent être des nombres de Gauss). Un tel nombre sera dit un *nombre de Lorentz*<sup>7)</sup>.

On représentera un point de coordonnées  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  de l' $E_4$  ou un vecteur de composantes  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  du même  $E_4$  rapporté à un système d'axes rectangulaires par un nombre de Lorentz, dont 12 coordonnées sont nulles:

$$V = x_1 \Gamma_1 + x_2 \Gamma_2 + x_3 \Gamma_3 + x_4 \Gamma_4.$$

2. Une transformation de Lorentz sur  $E_4$  transforme  $V$  en

$$V' = x_1' \Gamma_1 + x_2' \Gamma_2 + x_3' \Gamma_3 + x_4' \Gamma_4,$$

et  $V'$  est défini de la façon suivante qui montre précisément l'importance du système des nombres de Lorentz. Désignons par  $A$  un nombre de Lorentz qui est un vecteur ou un produit de vecteurs non diviseurs de zéro, c'est-à-dire dont aucun ne puisse être un facteur d'un produit nul.  $A$  aura un inverse bien déterminé  $A^{-1}$  ( $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ ). On passe de  $V$  à  $V'$  par la relation:

$$(2) \qquad V' = A V A^{-1}.$$

Il est clair que les coordonnées de  $A$  doivent satisfaire à certaines conditions de réalité pour que la transformation de Lorentz (2) soit réelle elle-même. On voit que les  $x_j'$  s'expriment linéairement en fonc-

<sup>7)</sup> Il nous semble préférable d'employer le nom de nombre de Lorentz plutôt que celui de quadriquaternion; ce terme précise bien l'utilité de ces nombres.

tion des  $x_j$ , les paramètres de la transformation entrent bilinéairement dans les formules et ils sont surabondants si  $A$  a plus de 6 coordonnées non-nulles et indépendantes. La transformation (2) ne consiste pas à faire un changement d'unités  $\Gamma_j$  comme on le ferait dans le calcul vectoriel si les  $\Gamma_j$  étaient considérés comme des vecteurs de base; ce sont les règles du calcul auxquelles obéissent les unités  $\Gamma_j$  qui donnent à l'équation (2) son caractère lorentzien. M. Proca fait un changement sur les  $\Gamma_j$  qui n'est pas dans l'esprit de la méthode imaginée par les inventeurs du système des nombres ainsi utilisés; cela d'ailleurs ne diminue pas l'intérêt des résultats obtenus par ce physicien.

3. M. Proca<sup>8)</sup> a fait le premier une remarque qui revient à dire que le nombre de Lorentz

$$\begin{aligned} W &= c_{234} \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4 - c_{134} \Gamma_1 \Gamma_3 \Gamma_4 + c_{124} \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_4 - c_{123} \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \\ &= (c_{234} \Gamma_1 + c_{134} \Gamma_2 + c_{124} \Gamma_3 + c_{123} \Gamma_4) \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4 \end{aligned}$$

peut représenter un vecteur de composantes

$$y_1 = c_{234}, y_2 = c_{134}, y_3 = c_{124}, y_4 = c_{123}.$$

En effet, si l'on écrit

$$W \equiv V \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4,$$

la transformation

$$(3) \quad W' = A W A^{-1}$$

revient à

$$\begin{aligned} W' &= A V \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4 A^{-1} = A V A^{-1} A \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4 A^{-1} \\ &= -V' \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4. \end{aligned}$$

Donc la multiplication d'un vecteur  $V$  par  $\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4$  conserve le caractère vectoriel du nombre  $V$ ; mais la transformation (3) est la transformation de Lorentz (2) suivie d'une symétrie par rapport à l'origine.

---

<sup>8)</sup> J. de Phys. loc. cit. p. 241.

4. Une autre remarque de M. Proca<sup>9)</sup> revient à dire que le nombre de Lorentz

$$T = c_{12} \Gamma_1 \Gamma_2 + c_{23} \Gamma_2 \Gamma_3 + c_{31} \Gamma_3 \Gamma_1 \\ + c_{14} \Gamma_1 \Gamma_4 + c_{24} \Gamma_2 \Gamma_4 + c_{34} \Gamma_3 \Gamma_4,$$

par la transformation

$$(4) \quad T' = A T A^{-1},$$

se transforme comme un tenseur symétrique gauche du second ordre. Cela est évident si l'on remarque que  $T$  peut être considéré comme le produit de deux nombres

$$G = g_1 \Gamma_1 + g_2 \Gamma_2 + g_3 \Gamma_3 + g_4 \Gamma_4 \\ H = h_1 \Gamma_1 + h_2 \Gamma_2 + h_3 \Gamma_3 + h_4 \Gamma_4$$

tels que  $g_1 h_1 + g_2 h_2 + g_3 h_3 + g_4 h_4 = 0$ . Alors  $GH + HG = 0$  et  $c_{jk} = g_j h_k - g_k h_j$ .

La transformation (4) s'écrit alors:

$$T' = A G H A^{-1} = A G A^{-1} A H A^{-1} = G' H'$$

et comme  $G' H' + H' G' = 0$ ,  $T'$  est bien le transformé de  $T$  par la transformation de Lorentz dont  $A$  est le symbole opératoire.

5. Remarquons enfin que le nombre de Lorentz

$$C = c_0$$

est inaltéré par la transformation  $A C A^{-1}$ , et que

$$C = c_{1234} \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4$$

se transforme en  $-C$ .

6. En résumé, un nombre hypercomplexe  $C$  peut s'écrire sous la forme

$$C = I + V + T + W + J,$$

et par la transformation distributive relativement à l'addition:

---

<sup>9)</sup> J. de Phys. loc. cit. p. 242.

$$C' = ACA^{-1} = I' + V' + T' + W' + J',$$

$$\begin{aligned} I &= I' & J &= -J' \\ V' &= AVA^{-1}, & (V' &= \text{vecteur transformé du vecteur} \\ & & & V \text{ par la transformation de Lorentz } \mathcal{L}(2)) \\ W' &= AWA^{-1}, & (W' &= \text{vecteur transformé du vecteur} \\ & & & W \text{ par la transformation de Lorentz } -\mathcal{L}) \\ T' &= ATA^{-1}, & (T' &= \text{tenseur symétrique gauche trans-} \\ & & & \text{formé du tenseur symétrique gauche } T \\ & & & \text{par la transformation de Lorentz } \mathcal{L}) \end{aligned}$$

Il est dès lors préférable d'écrire

$$C = I_1 + V_1 + T + (V_2 + T_2) \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4$$

et alors  $I_1$  et  $I_2$  sont deux invariants,  $V_1$  et  $V_2$  sont deux vecteurs et  $T$  un tenseur symétrique gauche.

7. Considérons maintenant l'opérateur différentiel  $\nabla$  que nous définirons par le nombre hypercomplexe

$$\nabla = \Gamma_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \Gamma_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \Gamma_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + \Gamma_4 \frac{\partial}{\partial x_4}.$$

D'après les règles les plus élémentaires de l'analyse vectorielle, il est clair qu'une transformation (2) portant sur l'espace  $E_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$  transformera  $\nabla$  en

$$\nabla' = A\nabla A^{-1} = \Gamma_1 \frac{\partial}{\partial x_1'} + \Gamma_2 \frac{\partial}{\partial x_2'} + \Gamma_3 \frac{\partial}{\partial x_3'} + \Gamma_4 \frac{\partial}{\partial x_4'},$$

puisque de  $(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow (x_1', x_2', x_3', x_4')$ , on tire

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4} \right) \rightarrow \left( \frac{\partial}{\partial x_1'}, \frac{\partial}{\partial x_2'}, \frac{\partial}{\partial x_3'}, \frac{\partial}{\partial x_4'} \right).$$

8. Soit dès lors  $C$  un champ de nombres de Lorentz, c'est-à-dire un ensemble de nombres de Lorentz correspondant univoquement à tous les points d'une région de l' $E_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$ . Les coordonnées de  $C$  sont des fonctions de  $x_1, x_2, x_3, x_4$ . On pourra définir un champ dérivé  $\nabla C$  et cela d'une manière invariante, c'est-à-dire indépendamment du repère de Lorentz  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  considéré. Faisons le calcul pour chaque partie de  $C$ .

9. L'application de  $\nabla$  à  $c_0$  donne le vecteur

$$\nabla I = \Gamma_1 \frac{\partial c_0}{\partial x_1} + \Gamma_2 \frac{\partial c_0}{\partial x_2} + \Gamma_3 \frac{\partial c_0}{\partial x_3} + \Gamma_4 \frac{\partial c_0}{\partial x_4}$$

qui n'est pas autre chose que le gradient du scalaire  $I_1$ . De même l'application à

$$J = c_{1234} \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4$$

donne

$$\begin{aligned} \nabla J &= \frac{\partial c_{1234}}{\partial x_1} \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4 - \frac{\partial c_{1234}}{\partial x_2} \Gamma_1 \Gamma_3 \Gamma_4 + \frac{\partial c_{1234}}{\partial x_3} \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_4 \\ &\quad - \frac{\partial c_{1234}}{\partial x_4} \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \\ &= \left( \frac{\partial c_{1234}}{\partial x_1} \Gamma_1 + \frac{\partial c_{1234}}{\partial x_2} \Gamma_2 + \frac{\partial c_{1234}}{\partial x_3} \Gamma_3 + \frac{\partial c_{1234}}{\partial x_4} \Gamma_4 \right) \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4. \end{aligned}$$

On obtient donc une expression qui peut s'écrire

$$\text{grad } I_2 \cdot \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4.$$

10. Prenons la partie  $V = c_1 \Gamma_1 + c_2 \Gamma_2 + c_3 \Gamma_3 + c_4 \Gamma_4$ , on a

$$\begin{aligned} \nabla V &= \left( \Gamma_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \Gamma_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \Gamma_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + \Gamma_4 \frac{\partial}{\partial x_4} \right) \\ &\quad (c_1 \Gamma_1 + c_2 \Gamma_2 + c_3 \Gamma_3 + c_4 \Gamma_4) \\ &= \frac{\partial c_1}{\partial x_1} + \frac{\partial c_2}{\partial x_2} + \frac{\partial c_3}{\partial x_3} + \frac{\partial c_4}{\partial x_4} \\ &\quad + \left( \frac{\partial c_2}{\partial x_1} - \frac{\partial c_1}{\partial x_2} \right) \Gamma_1 \Gamma_2 + \left( \frac{\partial c_3}{\partial x_1} - \frac{\partial c_1}{\partial x_3} \right) \Gamma_1 \Gamma_3 + \dots \\ &\quad + \left( \frac{\partial c_4}{\partial x_3} - \frac{\partial c_3}{\partial x_4} \right) \Gamma_3 \Gamma_4; \end{aligned}$$

ce qui montre que  $\nabla V$  est la somme d'un invariant et d'un tenseur symétrique gauche qu'on peut appeler la divergence et le curl de  $V$ :

$$\nabla V = \text{div } V + \text{curl } V.$$

L'application de  $\nabla$  à  $W$  donnera, si l'on écrit

$$W = (w_1 \Gamma_1 + w_2 \Gamma_2 + w_3 \Gamma_3 + w_4 \Gamma_4) \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4 = V_2 \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4,$$

$$\nabla W = (\text{div } V_2 + \text{curl } V_2) \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4.$$

11. Enfin l'application à  $T$  donnera la formule suivante:<sup>10)</sup>

$$\begin{aligned} \nabla T = & \left( \sum I_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \left( \sum_{k,l} c_{kl} \Gamma_k \Gamma_l \right) = \\ & \left( \frac{\partial c_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial c_{31}}{\partial x_3} + \frac{\partial c_{41}}{\partial x_4} \right) \Gamma_1 + \left( \frac{\partial c_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial c_{32}}{\partial x_3} + \frac{\partial c_{42}}{\partial x_4} \right) \Gamma_2 \\ & + \left( \frac{\partial c_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial c_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial c_{43}}{\partial x_4} \right) \Gamma_3 + \left( \frac{\partial c_{14}}{\partial x_1} + \frac{\partial c_{24}}{\partial x_2} + \frac{\partial c_{34}}{\partial x_3} \right) \Gamma_4 \\ & - \left[ \left( \frac{\partial c_{43}}{\partial x_2} + \frac{\partial c_{32}}{\partial x_4} + \frac{\partial c_{24}}{\partial x_3} \right) \Gamma_1 + \left( \frac{\partial c_{34}}{\partial x_1} + \frac{\partial c_{41}}{\partial x_3} + \frac{\partial c_{13}}{\partial x_4} \right) \Gamma_2 \right. \\ & \left. + \left( \frac{\partial c_{14}}{\partial x_2} + \frac{\partial c_{42}}{\partial x_1} + \frac{\partial c_{21}}{\partial x_4} \right) \Gamma_3 + \left( \frac{\partial c_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial c_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial c_{31}}{\partial x_2} \right) \Gamma_4 \right] \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4. \end{aligned}$$

$\nabla T$  est donc la somme de deux termes l'un du type  $V$  et l'autre du type  $W$  ou si l'on veut

$$\nabla T = T_1 - T_2 \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4,$$

$T_1$  et  $T_2$  étant deux vecteurs. On voit que  $T_1$  est le vecteur-divergence du tenseur  $T$  (aux composantes du type  $\sum_j \frac{\partial c_{jk}}{\partial x_j}$ );  $T_2$  est un autre vecteur dont la composante  $m$  est  $\frac{\partial c_{jk}}{\partial x_l} + \frac{\partial c_{kl}}{\partial x_j} + \frac{\partial c_{lj}}{\partial x_k}$ ,  $(jklm)$  étant une permutation paire des quatre chiffres 1, 2, 3, 4.

On peut abrégé cela en écrivant

$$\nabla T = \text{DIV } T - \text{max } T \cdot \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4,$$

$\text{DIV } T$  étant le vecteur-divergence de  $T$  et  $\text{max } T$  un vecteur que nous appellerons le *maxwellien* du tenseur  $T$ .

11. En résumé, si l'on écrit

$$C = I_1 + V_1 + T + (V_2 + I_2) \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4,$$

on aura:

$$\begin{aligned} \nabla C = & \text{div } V_1 + (\text{grad } I_1 + \text{DIV } T) + \text{curl } V_1 + \text{curl } V_2 \cdot \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4 \\ & + (\text{grad } I_2 - \text{max } T) \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4 + \text{div } V_2 \cdot \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4. \end{aligned}$$

<sup>10)</sup> Dans ces formules  $\Sigma$  est une somme double où il ne faut considérer que les combinaisons.

$i, k$

12. Cela étant, on peut écrire les équations de Maxwell sous une forme très élégante qui fait voir immédiatement leur invariance vis-à-vis des transformations de Lorentz.

Rappelons la forme sous laquelle M. Weyl les a écrites, par exemple <sup>11)</sup>.

Le potentiel électromagnétique étant un vecteur  $\Phi$  ( $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ ) de l'espace  $E_4$ , le champ électromagnétique  $F$  est un tenseur symétrique gauche de composantes

$$(5) \quad F_{ik} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k},$$

ce qui implique que

$$(6) \quad \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} = 0.$$

Si de plus on introduit le vecteur courant  $C$  avec les composantes  $c_1, c_2, c_3, c_4$ , on a

$$(7) \quad \sum_{k=1}^{k=4} \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} = c_i;$$

enfin

$$(8) \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} + \frac{\partial \varphi_4}{\partial x_4} = \text{div } \Phi = 0,$$

et

$$(9) \quad \frac{\partial c_1}{\partial x_1} + \frac{\partial c_2}{\partial x_2} + \frac{\partial c_3}{\partial x_3} + \frac{\partial c_4}{\partial x_4} = \text{div } C = 0.$$

13. Représentons le potentiel et le courant par deux nombres de Lorentz

$$\begin{aligned} \Phi &= \varphi_1 \Gamma_1 + \varphi_2 \Gamma_2 + \varphi_3 \Gamma_3 + \varphi_4 \Gamma_4 \\ C &= c_1 \Gamma_1 + c_2 \Gamma_2 + c_3 \Gamma_3 + c_4 \Gamma_4; \end{aligned}$$

on a

$$\nabla \Phi = \text{div } \Phi + \text{curl } \Phi,$$

<sup>11)</sup> P. ex. Raum, Zeit, Materie, 5te Aufl. p. 154—155 et aussi *Frenkel*, Lehrbuch der Elektrodynamik, Bd. I, passim.

mais si l'on représente le champ électromagnétique  $F$  par le nombre de Lorentz

$$F = \sum_{i,k} F_{ik} \Gamma_i \Gamma_k;$$

en écrivant

$$\nabla \Phi = F,$$

on a du même coup les équations (5) et l'équation (8).

Formons ensuite

$$\nabla F = \text{DIV } F - \max F \cdot \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4,$$

si l'on pose

$$\nabla F = -C,$$

on écrit à la fois les équations (7) et les équations (6). On tire de là immédiatement

$$\nabla \nabla \Phi = -C$$

c'est-à-dire

$$\square \Phi = -C,$$

d'autre part, on doit avoir identiquement:

$$\nabla \nabla F = \square F = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left[ \sum_{j,k} F_{jk} \Gamma_j \Gamma_k \right] = \sum_{j,k} \square F_{jk} \Gamma_j \Gamma_k,$$

or

$$\square F = -\nabla C = -\text{div } C - \text{curl } C,$$

donc

$$\text{div } C = 0$$

c'est-à-dire (9).

Le problème que nous nous sommes posé est donc complètement résolu. On peut se proposer de donner une forme analogue aux équations de l'énergie, c'est ce que nous verrons peut-être dans un prochain mémoire.

(Reçu le 16 août 1930)