Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 2 (1930)

Artikel: Ueber konvergente Folgen meromorpher Funktionen.
Autor: Saxer, Walter
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-3608

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Ueber konvergente Folgen meromorpher Funktionen

Von WALTER SAXER, Zürich

Die Theorie der konvergenten Folgen meromorpher Funktionen ist in doppelter Hinsicht bemerkenswert. Sie liefert bekanntlich die von Montel geschaffene Theorie der normalen und quasi-normalen Funktionsscharen, die ihrerseits eine sehr praktische und weittragende Methode im Picard'schen Ideenkreis darstellt. Andererseits ist sie an sich interessant, da sie in ihrem Aufbau und in ihren grundlegenden Sätzen weitgehende Analogien zur Theorie der analytischen Funktionen aufweist, ein Umstand, auf den Ostrowski [1]) in mehreren schönen Arbeiten aufmerksam gemacht hat. Trotzdem ist ihr Aufbau noch gar nicht weit getrieben worden; insbesondere bei der Untersuchung *irregulärer Punkte* konvergenter Folgen meromorpher Funktionen hat man sich bis heute auf diejenigen *endlicher Ordnung*, die in der Theorie der analytischen Funktionen den Polen entsprechen, beschränkt. Die vorliegende Arbeit hatte zum Ziel, die Theorie in dieser Richtung weiter auszubauen, und *wesentlich irreguläre Punkte konvergenter Folgen* zu untersuchen und zu klassifizieren. Damit bezeichnen wir alle diejenigen irregulären Punkte konvergenter Folgen, die nicht von endlicher Ordnung im Sinne Montels sind. Bei der Untersuchung solcher wesentlich irregulärer Punkte ergab sich als Hauptresultat dieser Arbeit, daß sich der Begriff Ordnung eines irregulären Punktes genau in dem Sinne verallgemeinern läßt, wie der Grad eines Polynoms zur Ordnung einer ganzen Funktion. Um diese Sachlage auch in der Bezeichnung anzudeuten, führen wir deshalb neben den bisherigen irregulären Punkten endlicher Ordnung *irreguläre Punkte mit wesentlich endlicher Ordnung* ein. Im Anschluß an diese weitergehende Klassifikation der irregulären Punkte läßt sich dann auch die Einteilung der *quasi-normalen Funktionsscharen* etwas weiter treiben, was wir in § 3 kurz ausführen.

---

[1]) Man vergleiche insbes. *A. Ostrowski*, Ueber allgemeine Konvergenzsätze der komplexen Funktionentheorie, Jahresbericht d. D. M. V., Bd. 32 (1923), S. 185—194.

§ 1. Ueber konvergente Folgen rationaler Funktionen

Eine Folge rationaler Funktionen

$$R_n(z) = \frac{\prod_{\nu=1}^{m_\alpha^{(n)}} \left(1 - \frac{z}{\alpha_\nu^{(n)}}\right)}{\prod_{\nu=1}^{m_\beta^{(n)}} \left(1 - \frac{z}{\beta_\nu^{(n)}}\right)}$$

sei gegeben. Ueber diese Folge treffen wir die folgenden Voraussetzungen:

1. Die Folge konvergiert für $|z| \leqq 1$ gleichmäßig gegen die Funktion $F(z)$.

2. Bezeichnen wir mit $\alpha_\nu^{(n)}$ resp. mit $\beta_\nu^{(n)}$ die Nullstellen, resp. die Pole der Funktionen $R_n(z)$, so gebe es eine solche positive Zahl ϱ, wobei $p < \varrho \leqq p + 1$, daß die Ungleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{m_\alpha^{(n)}} \frac{1}{\left|\alpha_\nu^{(n)}\right|^\varrho} < M, \quad \sum_{\nu=1}^{m_\beta^{(n)}} \frac{1}{\left|\beta_\nu^{(n)}\right|^\varrho} < M$$

für sämtliche Werte n erfüllt sind, wobei M eine endliche positive Zahl bedeutet.

Satz A: *Unter diesen Voraussetzungen bildet die Folge eine in der ganzen z-Ebene quasi-normale Funktionsschar und zwar ist dieselbe in jedem endlichen Gebiete von beschränkter Ordnung.* [2]) Dieser Satz läßt sich in folgender Weise verschärfen, wenn noch eine Bedingung 3 hinzugefügt wird:

3. Es existiere eine solche positive Zahl ε, daß

$$\left|\alpha_\nu^{(n)} - \beta_\mu^{(m)}\right| > \varepsilon \text{ für alle Werte } \nu, \mu, m, n.$$

Satz B: *Unter diesen Voraussetzungen konvergiert die Folge notwendigerweise in der ganzen z-Ebene und zwar gleichmäßig in irgend*

---

[2]) Quasi-normale Funktionsschar beschränkter Ordnung = Famille quasi-normale d'ordre total fini im Sinne Montels. Man vergl. a) *P. Montel,* Sur les familles quasi-normales de fonctions holomorphes, Mémoires de l'Académie royale de Belgique, classe des Sciences, (2) 6 (1922), p. 1—44 und b) *P. Montel,* Sur les familles quasi-normales de fonctions analytiques, Bulletin de la Soc. Math. de France 52 (1924), p. 85—114.

einem endlichen Gebiete gegen eine meromorphe Funktion vom Geschlechte $\leqq p$. *Wenn* ϱ *eine ganze Zahl darstellt, so ist die Grenzfunktion* $F(z)$ *gleich dem Produkt einer Funktion vom Geschlecht* $\leqq p$ *und der Funktion* $e^{c_{p+1} z^{p+1}}$ *wobei* c_{p+1} *eine Konstante bedeutet*[3]).

Beweis der Sätze A und B: Die Folge $R_n(z)$ soll laut Voraussetzung (1) im Einheitskreis gleichmäßig gegen eine Funktion $F(z)$ konvergieren. $F(z)$ muß sich deshalb im Einheitskreise meremorph verhalten und ist $\not\equiv 0, \infty$, da $R_n(0) = 1$. Deshalb verhalten sich auch die logarithmischen Ableitungen der Funktionen $R_n(z)$ und $F(z)$ in der Umgebung des Nullpunktes regulär analytisch. Zudem gilt

$$\lim_{n \to \infty} \frac{R_n'(z)}{R_n(z)} = \frac{F'(z)}{F(z)} \text{ für } |z| \leqq 1.$$

Man findet

$$\frac{R_n'(z)}{R_n(z)} = -\sum_{\nu=1}^{m_\alpha^{(n)}} \frac{1}{\alpha_\nu^{(n)} - z} + \sum_{\nu=1}^{m_\beta^{(n)}} \frac{1}{\beta_\nu^{(n)} - z}$$

$$= -\sum_{\nu=1}^{m_\alpha^{(n)}} \frac{1}{\alpha_\nu^{(n)}} + \sum_{\nu=1}^{m_\beta^{(n)}} \frac{1}{\beta_\nu^{(n)}} + z\left[-\sum_{\nu=1}^{m_\alpha^{(n)}} \left(\frac{1}{\alpha_\nu^{(n)}}\right)^2 + \sum_{\nu=1}^{m_\beta^{(n)}} \left(\frac{1}{\beta_\nu^{(n)}}\right)^2\right] + \dots$$

$\frac{F'(z)}{F(z)}$ besitze in der Umgebung des Nullpunktes die Taylor-Entwicklung

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = c_1 + c_2 z + c_3 z^2 + \dots\dots$$

Dann gilt nach dem Weierstraß'schen Doppelreihensatz

$$\lim_{n \to \infty} \left[-\sum_{\nu=1}^{m_\alpha^{(n)}} \left(\frac{1}{\alpha_\nu^{(n)}}\right)^k + \sum_{\nu=1}^{m_\beta^{(n)}} \left(\frac{1}{\beta_\nu^{(n)}}\right)^k\right] = c_k. \tag{1}$$

---

[3]) Man vergleiche *W. Saxer*, Ueber die Verteilung der Nullstellen und Pole von rationalen Funktionen konvergenter Folgen, Math. Zeitschrift 27 (1928), S. 518—535. In dieser Arbeit wurde im wesentlichen der oben formulierte Satz B ohne Voraussetzung der Bedingung (3) als Satz I ausgesprochen und ist deshalb in der dort publizierten Form nicht richtig. Unter den Voraussetzungen (1) und (2) kann man nur Satz A aussprechen. Diese Tatsache und der Umstand, daß der Satz B im Folgenden angewendet wird, veranlaßten mich, ihn noch einmal knapp darzustellen. Im übrigen sind die in der Zeitschrift-Arbeit gezogenen Schlüsse aus dem Satz I, insbesondere Satz II richtig, da Bedingung (3) dank der Voraussetzungen des letztern ohne weiteres erfüllt ist.

Wir schreiben $R_n(z)$ in der folgenden, etwas veränderten Form

$$(2) \qquad R_n(z) =$$

$$= \frac{e^{z\left[-\sum\limits_{\nu=1}^{m_\alpha^{(n)}} \frac{1}{\alpha_\nu^{(n)}} + \sum\limits_{\nu=1}^{m_\beta^{(n)}} \frac{1}{\beta_\nu^{(n)}}\right] + \dots + \frac{z^p}{p}\left[-\sum\limits_{\nu=1}^{m_\alpha^{(n)}} \left(\frac{1}{\alpha_\nu^{(n)}}\right)^p + \sum\limits_{\nu=1}^{m_\beta^{(n)}} \left(\frac{1}{\beta_\nu^{(n)}}\right)^p\right]} \prod\limits_{\nu=1}^{m_\alpha^{(n)}} \left(1 - \frac{z}{\alpha_\nu^{(n)}}\right) e^{\frac{z}{\alpha_\nu^{(n)}} + \dots + \frac{1}{p}\left(\frac{z}{\alpha_\nu^{(n)}}\right)^p}}{\prod\limits_{\nu=1}^{m_\beta^{(n)}} \left(1 - \frac{z}{\beta_\nu^{(n)}}\right) e^{\frac{z}{\beta_\nu^{(n)}} + \dots + \frac{1}{p}\left(\frac{z}{\beta_\nu^{(n)}}\right)^p}}.$$

Die Funktionsfolge

$$e^{z\left[-\sum\limits_{\nu=1}^{m_\alpha^{(n)}} \frac{1}{\alpha_\nu^{(n)}} + \sum\limits_{\nu=1}^{m_\beta^{(n)}} \frac{1}{\beta_\nu^{(n)}}\right] + \dots + \frac{z^p}{p}\left[-\sum\limits_{\nu=1}^{m_\alpha^{(n)}} \left(\frac{1}{\alpha_\nu^{(n)}}\right)^p + \sum\limits_{\nu=1}^{m_\beta^{(n)}} \left(\frac{1}{\beta_\nu^{(n)}}\right)^p\right]}$$

konvergiert wegen der Gleichung (1) gleichmäßig in der ganzen z-Ebene gegen die ganze Funktion $F^*(z) = e^{c_1 z + \dots + c_p z^p}$. Es bleibt also lediglich die Funktionsfolge $F_n(z) = \frac{G_n(z)}{H_n(z)}$, wobei

$$G_n(z) = \prod_{\nu=1}^{m_\alpha^{(n)}} \left(1 - \frac{z}{\alpha_\nu^{(n)}}\right) e^{\frac{z}{\alpha_\nu^{(n)}} + \dots + \frac{1}{p}\left(\frac{z}{\alpha_\nu^{(n)}}\right)^p}$$

$$H_n(z) = \prod_{\nu=1}^{m_\beta^{(n)}} \left(1 - \frac{z}{\beta_\nu^{(n)}}\right) e^{\frac{z}{\beta_\nu^{(n)}} + \dots + \frac{1}{p}\left(\frac{z}{\beta_\nu^{(n)}}\right)^p}.$$

Beide Funktionsscharen werden nach einer bekannten Ungleichung in der Theorie der ganzen Funktionen von der Funktion $e^{c z^\rho}$ gleichmäßig majorisiert, wenn c eine geeignete, positive Konstante bedeutet. Beide Scharen bilden demnach je eine in jedem endlichen Bereiche beschränkte und damit normale Funktionsschar. Sowohl aus den Funktionen des Zählers als auch aus den Funktionen des Nenners läßt sich also je eine in der ganzen z-Ebene konvergente Teilfolge von Funktionen mit gleichen Indizes n_k herausgreifen. Die Grenzfunktion dieser Folgen sind ganze Funktionen von der Ordnung $\leqq \rho$ und ihre Nullstellen α_ν resp. β_ν erfüllen nach Hurwitz die Ungleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{N}\left|\frac{1}{\alpha_\nu}\right|^{\varrho} < M, \qquad \sum_{\nu=1}^{N}\left|\frac{1}{\beta_\nu}\right|^{\varrho} < M$$

wobei N irgend eine ganze positive Zahl bedeutet. Aus diesen Ungleichungen folgt die Konvergenz der beiden Reihen $\Sigma\left|\frac{1}{\alpha_\nu}\right|^{\varrho}$ und $\Sigma\left|\frac{1}{\beta_\nu}\right|^{\varrho}$. Damit ist also gezeigt, daß die Grenzfunktionen dieser konvergenten Folgen $G_{n_k}(z)$ resp. $H_{n_k}(z)$ ganze Funktionen vom Geschlecht $\leqq p$ darstellen, wenn ϱ nicht ganzzahlig und vom Geschlecht $\leqq p+1$, wenn $\varrho = p+1$, d. h. ganzzahlig. Ist $\varrho = p+1$, so sind die in den betreffenden ganzen Funktionen enthaltenen kanonischen Produkte vom Geschlecht $\leqq p$.

Umgeben wir nun die Nullstellen der Funktionen $H_{n_k}(z)$ mit beliebig kleinen Kreislein, so können wir schließen, daß die Funktionen $\frac{G_{n_k}(z)}{H_{n_k}(z)}$ außerhalb dieser Kreislein gleichmäßig konvergieren. Denn außerhalb dieser Kreislein konvergieren Zähler und Nenner und zwar nicht gleichmäßig gegen 0 resp. ∞. Innerhalb braucht keine Konvergenz stattzufinden, wenn nicht Bedingung (3) gefordert und damit die gleichzeitige Konvergenz in einem Punkte von Zähler und Nenner gegen 0 ausgeschlossen wird. Hingegen wäre dann eine solche Stelle eine irreguläre Stelle endlicher Ordnung[4]), da die Funktionen der betreffenden Folge in der Umgebung einer solchen Stelle eine beschränkte Anzahl von Nullstellen und Polen besitzen. Zudem kommen solche irreguläre Stellen in einem endlichen Gebiete nur in beschränkter Anzahl vor, da die Grenzfunktion der Folge $H_{n_k}(z) \not\equiv 0$.

Damit ist also gezeigt, daß die Funktionen $R_n(z)$ unter den Voraussetzungen (1) und (2) eine in jedem endlichen Gebiete quasi-normale Funktionsschar beschränkter Ordnung bilden.

Gemäß den obigen Ausführungen kann man unter Hinzufügung der Voraussetzung (3) schließen, daß diese Funktionen eine in jedem endlichen Gebiete normale Funktionsschar bilden. Da die Folge laut Voraussetzung (1) im Einheitskreis gleichmäßig konvergiert, so muß sie wegen ihres normalen Charakters in jedem endlichen Gebiete gleichmäßig konvergieren. Ihre Grenzfunktion $F(z)$ erfüllt die Gleichung

---

[4]) Irreguläre Stelle endlicher Ordnung im Sinne von P. Montel. Man vergl. loc. cit. [2]) b oder *W. Saxer*, Ueber quasi-normale Funktionsscharen und eine Verschärfung des Picardschen Satzes, Mathem. Annalen 99 (1928) S. 708—737, insb. 714—715.

$$F(z) = \bar{F}(z)\,\overset{*}{F}(z) \text{ wobei } \bar{F}(z) = \lim_{n_k \to \infty} \frac{G_{n_k}(z)}{H_{n_k}(z)}.$$

Dank den bereits festgestellten Eigenschaften der Funktionen $\bar{F}(z)$ und $\overset{*}{F}(z)$ ist damit auch Satz B bewiesen.

Wie man durch Beispiele feststellen kann, läßt sich Satz A nicht in dem Sinne verschärfen, daß man die Konvergenz wenigstens auf gewisse Gebiete außerhalb des Einheitskreises schließen kann.

§ 2. Wesentlich irreguläre Punkte endlicher Ordnung

Eine Folge von in einem zusammenhängenden Gebiete G meromorpher Funktionen $f_1(z)$, $f_2(z)$, ... sei gegeben. Diese Folge konvergiere in G, abgesehen von einem irregulären Punkte P, gleichmäßig gegen die Funktion $f(z)$, d. h.

$$\lim_{n \to \infty} f_n(z) = f(z).$$

$f(z)$ ist dann in bekannter Weise eine in G abgesehen vom Punkte P meromorphe Funktion, die speziell unendlich sein kann. Wir erinnern zunächst der Vollständigkeit wegen an den folgenden **Satz C:** *Es existiere ein solcher Wert $a_0 \not\equiv f(z)$, so daß die Funktionen $f_n(z)$ abgesehen von endlich vielen, in der Umgebung des irregulären Punktes P die gleiche, und zwar endliche Anzahl von Nullstellen besitzen. Dann gelten folgende Eigenschaften:*

a) Die Grenzfunktion $f(z)$ verhält sich auch im irregulären Punkte meromorph.

b) Für jedes a mit Ausnahme eines bestimmten Wertes $\bar{a}$ existiert eine solche positive ganze Zahl $N(a)$, so daß für $n > N(a)$ die Funktionen $f_n(z) - a$ dieselbe Anzahl Nullstellen in der Umgebung des irregulären Punktes besitzen. Dabei ist diese Anzahl k endlich und von a unabhängig. Ist die Grenzfunktion keine Konstante, so haben auch die Funktionen $f_n(z) - \bar{a}$ abgesehen von endlich vielen in der Umgebung des irregulären Punktes die gleiche Anzahl Nullstellen. Diese Anzahl ist ebenfalls endlich und $> k$. Ist die Grenzfunktion eine Konstante, so ist dieser Ausnahmewert gleich der Grenzfunktion. Die Anzahl der Nullstellen der Funktionen $f_n(z) - \bar{a}$ in der Umgebung des irregulären Punktes ist in diesem Falle beliebig [5]).

[5]) loc. cit. [4]) Saxer, S. 714.

Ungenauer kann man diesen Satz in folgender Weise aussprechen: Wenn ein solcher Wert $a \not\equiv f(z)$ existiert, daß die meromorphen Funktionen $f_1(z)$, $f_2(z)$ ... einer abgesehen von einem irregulären Punkte gleichmäßig konvergenten Folge in seiner Umgebung eine beschränkte Anzahl von a-Stellen besitzen, dann gilt diese Eigenschaft für alle x-Stellen, wobei x einen beliebigen Wert $\not\equiv f(z)$ annehmen darf.

Wir bezeichnen einen solchen irregulären Punkt gegenüber der bisherigen Bezeichnung irregulärer Punkt von endlicher Ordnung k als *rational irregulären Punkt der Ordnung k.*

Als direkte Verallgemeinerung dieses Satzes beweisen wir nun unsern

Hauptsatz: *Eine Folge, im Gebiete $z > 1$ inklusive den unendlich fernen Punkt meromorpher Funktionen $f_1(z)$, $f_2(z)$ .... sei gegeben. Diese Folge sei im Kreisring $1 + \varepsilon \leqq |z| \leqq R$, wobei ε eine beliebig kleine und R eine beliebig große Zahl bedeuten, gleichmäßig konvergent, die Grenzfunktion werde mit $f(z)$ bezeichnet. Es sollen zwei solche Werte a, $b \not\equiv f(z)$ existieren, die folgende Bedingungen erfüllen: Bezeichnet man die a-Stellen der Funktion $f_n(z)$ im Bereich $|z| \geqq 1 + \varepsilon$ mit $\alpha_\nu^{(n)} \left(\nu = 1 \ldots m_\alpha^{(n)}\right)$ und die b-Stellen mit $\beta_\nu^{(n)} \left(\nu = 1 \ldots m_\beta^{(n)}\right)$, so soll eine solche endliche, von n unabhängige Zahl ϱ, wobei $p < \varrho \leqq p + 1$ und eine endliche, nur von ε abhängige Zahl $M(\varepsilon)$ existieren, daß*

$$
(3) \qquad
\begin{aligned}
&\sum_{\nu=1}^{m_\alpha^{(n)}} \frac{1}{\left|\alpha_\nu^{(n)}\right|^\varrho} < M(\varepsilon) \\
&\sum_{\nu=1}^{m_\beta^{(n)}} \frac{1}{\left|\beta_\nu^{(n)}\right|^\varrho} < M(\varepsilon)
\end{aligned}
$$

Unter diesen Voraussetzungen können wir die folgenden Eigenschaften schließen:

a) Die Ungleichung (3) wird auch von den x-Stellen der Funktionen $f_n(z)$ erfüllt, wenn x einen beliebigen Wert $\not\equiv f(z)$ und $n > N(x)$, wobei $N(x)$ eine endliche Zahl bedeutet und an Stelle von ϱ die Zahl $\varrho + \eta$ gesetzt wird, wobei η eine beliebig kleine, positive Größe bedeutet.

b) Die Differenz zwischen der Anzahl der x-Stellen und der y-Stellen der Funktionen $f_n(z)$ im Bereiche $|z| \geqq 1 + \varepsilon$, wobei x, y zwei beliebige Werte $\not\equiv f(z)$ bedeuten, ist für alle Funktionen gleichmäßig beschränkt.

c) Die Grenzfunktion besitzt folgende Form:

$$f(z) = C z^m \varphi(z) \psi(z).$$

C bedeutet eine Konstante, m eine positive oder negative ganze Zahl. $\varphi(z)$ ist eine im Bereiche $|z| > 1$ meromorphe Funktion, deren Pole im Kreisring $1 \leqq |z| \leqq 1 + \varepsilon$ liegen, wobei $\varphi(\infty) = 1$. $\psi(z)$ ist eine in der ganzen z-Ebene ($z = \infty$ ausgenommen) meromorphe Funktion vom Geschlechte $\leqq p$, wenn ϱ keine ganze Zahl. Wenn ϱ eine ganze Zahl, so ist $\psi(z)$ gleich dem Produkt einer meromorphen Funktion vom Geschlecht $\leqq p$ und der Funktion $e^{c_{p+1} z^{p+1}}$, wobei c_{p+1} eine Konstante bedeutet.

Unter Anwendung einer bekannten Terminologie könnte man die Eigenschaft (a) auch kurz so ausdrücken: *Wenn die a- und b-Stellen, wobei $a, b \not\equiv f(z)$ der Funktionen $f_1(z)$, $f_2(z)$ ..... einer gleichmäßig konvergenten Folge in der Umgebung des irregulären Punktes unendlich höchstens den Konvergenzexponenten ϱ besitzen, dann gilt dies für alle andern x-Stellen, wobei $x \not\equiv f(z)$.* Die Eigenschaft a regelt also die Verteilung der x-Stellen in der Umgebung des irregulären Punktes. Sie gibt aber gar keine Angaben über das Verhalten der Funktionen $f_n(z)$ direkt im irregulären Punkte, d. h. über die Multiziplität, mit welcher der zu ∞ gehörige Funktionswert von $f_n(z)$ angenommen wird. Diese Frage wird durch die Eigenschaft (b) entschieden, die zeigt, daß die totale Anzahl der a- und b-Stellen im Bereiche $|z| \geqq 1 + \varepsilon$ der Funktion $f_n(z)$ im wesentlichen gleich groß ist, wenn $a, b \not\equiv f(z)$.

Der Umstand, daß der irreguläre Punkt in den Punkt ∞ gelegt wurde, ist selbstverständlich irrelevant. Liegt er im Endlichen, so hat man an Stelle der Ausdrücke $\sum_{\nu=1}^{m_\alpha^{(n)}} \left|\frac{1}{\alpha_\nu^{(n)}}\right|^\varrho$ und $\sum_{\nu=1}^{m_\beta^{(n)}} \left|\frac{1}{\beta_\nu^{(n)}}\right|^\varrho$ die Summen $\sum_{\nu=1}^{m_\alpha^{(n)}} \left|\alpha_\nu^{(n)}\right|^\varrho$ und $\sum_{\nu=1}^{m_\beta^{(n)}} \left|\beta_\nu^{(n)}\right|^\varrho$ zu setzen.

Beweis des Hauptsatzes:

Für den Beweis unterscheiden wir 2 Fälle. Fall I: $\varrho \geqq 1$.

Wir können voraussetzen, daß $a = o$ und $b = \infty$, im entgegengesetzten Fall könnte man diese Voraussetzung durch eine lineare Transformation erreichen. Die $\alpha_\nu^{(n)}$ resp. $\beta_\nu^{(n)}$ Stellen der Funktion $f_n(z)$ sind dann also mit ihren Nullstellen resp. Polen identisch. Ebenso muß nun

die Grenzfunktion laut Voraussetzung $\not\equiv o, \infty$ sein. Wir betrachten nun die Folge der folgenden Hilfsfunktionen:

$$\varphi_n(z) = f_n(z) \frac{\prod_{\nu=1}^{m_\beta^{(n)}} \left(1 - \frac{z}{\beta_\nu^{(n)}}\right)}{\prod_{\nu=1}^{m_\alpha^{(n)}} \left(1 - \frac{z}{\alpha_\nu^{(n)}}\right)}. \tag{4}$$

Wir behaupten den folgenden Hilfssatz:

Die Funktionen $\varphi_n(z)$ bilden im Bereiche $|z| \geqq 1 + \varepsilon$ eine normale Funktionsschar. Die erste Derivierte, d. h. die Menge aller Grenzfunktionen dieser Funktionsschar enthält die Konstanten o und ∞ nicht.

Beweis des Hilfssatzes: Wir betrachten zunächst die Folge der Funktionen $\varphi_n(z)$ im Kreisring $1 + \varepsilon \leqq |z| \leqq R$, wobei R eine beliebig große, aber feste Zahl bedeutet. Bezeichnet man die Nullstellen resp. die Pole der Grenzfunktion $f(z)$ mit $\alpha_{\nu_\varkappa}$ resp. $\beta_{\nu_\varkappa}$, so sollen die Indizes so gewählt werden, daß infolge der Konvergenz der Folge $f_n(z)$

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_{\nu_\varkappa}^{(n)} = \alpha_{\nu_\varkappa}, \quad \lim_{n \to \infty} \beta_{\nu_\varkappa}^{(n)} = \beta_{\nu_\varkappa}.$$

Alle andern allfällig vorhandenen $\alpha_\nu^{(n)}$ resp. $\beta_\nu^{(n)}$ streben dann mit wachsendem n gegen ∞.

Wir umgeben die Nullstellen $\alpha_{\nu_\varkappa}$ und Pole $\beta_{\nu_\varkappa}$ mit Kreislein vom Radius η, wobei η eine feste, beliebig kleine Zahl bedeutet, und denken uns diese Kreislein aus dem Bereiche $1 + \varepsilon \leqq |z| \leqq R$ herausgeschnitten. In diesem durchlöcherten Bereiche $\bar{B}$ ist $f(z)$ beschränkt und $\neq o$ und damit auch die Funktionen $f_n(z)$ von einem gewissen Index an. Zudem gelten infolge Ungleichung (3) folgende Ungleichungen

$$\left| \prod_{\nu=1}^{m_\alpha^{(n)}} \left(1 - \frac{z}{\alpha_\nu^{(n)}}\right) \right| < e^{c|z|^\varrho}$$

$$\left| \prod_{\nu=1}^{m_\beta^{(n)}} \left(1 - \frac{z}{\beta_\nu^{(n)}}\right) \right| < e^{c|z|^\varrho}$$

wobei c eine geeignete Konstante bedeutet.

Sowohl die Funktionen $\prod_{\nu=1}^{m_\alpha^{(n)}}\left(1-\frac{z}{\alpha_\nu^{(n)}}\right)$ als auch $\prod_{\nu=1}^{m_\beta^{(n)}}\left(1-\frac{z}{\beta_\nu^{(n)}}\right)$ bilden also je eine beschränkte und damit normale Funktionsschar. Die erste Derivierte jeder dieser Scharen kann die Grenzfunktion 0 nicht enthalten, da sämtliche Funktionen für $z=0$ den Funktionswert 1 annehmen. Aus diesen Gründen bilden auch die Funktionen $\dfrac{\prod_{\nu=1}^{m_\beta^{(n)}}\left(1-\frac{z}{\beta_\nu^{(n)}}\right)}{\prod_{\nu=1}^{m_\alpha^{(n)}}\left(1-\frac{z}{\alpha_\nu^{(n)}}\right)}$ in $\bar{B}$ eine normale Funktionsschar, deren erste Derivierte weder 0 noch ∞ enthält. Infolge dieser Sachlage bilden also schließlich die Funktionen $\varphi_n(z)$ eine normale Funktionsschar, deren erste Derivierte die Grenzfunktionen 0 und ∞ nicht enthält. Da sich die Funktionen in den herausgeschnittenen Kreislein regulär verhalten, ebenso die zur ersten Derivierten dieser Schar gehörigen Grenzfunktionen, so kann man unter Anwendung eines bekannten Konvergenzsatzes von Weierstraß schließen, daß die Funktionen $\varphi_n(z)$ überhaupt im Bereiche $1+\varepsilon \leqq |z| \leqq R$ eine normale Schar bilden, deren erste Derivierte die Grenzfunktionen 0 und ∞ nicht enthält.

Als zweiten Teil für den Beweis des Hilfssatzes bleibt noch die Untersuchung des Verhaltens der Funktionen $\varphi_n(z)$ in der Umgebung des irregulären Punktes ∞ übrig. Sie zerfallen in dieser Hinsicht in drei Klassen, je nach den Funktionswerten $\varphi_n(\infty)$.

1. Klasse: $\varphi_n(\infty)=0$. Die Funktionen dieser Klasse besitzen also in der Umgebung der irregulären Stelle keine Pole.

2. Klasse: $\varphi_n(\infty)=\infty$. Die Funktionen dieser Klasse besitzen also in der Umgebung der irregulären Stelle keine Nullstellen.

3. Klasse: $\varphi_n(\infty)\neq 0, \infty$. Die Funktionen dieser Klasse besitzen also in der Umgebung von ∞ weder Pole noch Nullstellen.

Die Funktionen aller drei Klassen besitzen also in der Umgebung von ∞ einen Ausnahmewert, der nicht mit einer Funktion der ersten Derivierten dieser normalen Schar identisch ist. Deshalb muß nach dem Satze von Weierstraß eine solche in der Umgebung des Punktes gleichmäßig konvergente Folge auch in diesem Punkte selbst konvergent sein, d. h. die Funktionsschar $\varphi_n(z)$ verhält sich wirklich im ganzen Bereiche $|z| \geqq 1+\varepsilon$ normal und ihre erste Derivierte enthält weder die Kon-

stante 0 noch die Konstante ∞. Im Anschluß an diesen Beweis des Hilfssatzes schließen wir eine für den Beweis des Hauptsatzes wichtige

Bemerkung: Die Anzahl der Nullstellen resp. Pole der Funktionen $\varphi_n(z)$ im Punkte $z = \infty$ ist beschränkt. Der Beweis dieser Bemerkung ergibt sich sofort aus dem Umstande, daß die erste Derivierte dieser Schar 0 und ∞ nicht enthält.

Für das Folgende genügt es anzunehmen, daß $\varphi_n(\infty) \neq \infty$. Im andern Fall betrachte man die Funktionen $\frac{1}{f_n(z)}$. Unter dieser Voraussetzung kann man sogar schließen, daß die Funktionen $\varphi_n(z)$ im Bereiche $|z| \geqq 1 + \varepsilon$ beschränkt sind. Dieser verschärfte Hilfssatz folgt wieder aus der Bemerkung, daß die erste Derivierte dieser Schar ∞ nicht enthält.

Mit diesem Hilfssatz und einem bekannten Satz von F. und R. Nevanlinna kann nun der Beweis des Hauptsatzes leicht erbracht werden. Wir bestimmen direkt die a-Stellen der Funktionen $f_n(z)$, d. h. die Nullstellen der Funktionen $f_n(z) - a$, wobei $a \not\equiv f(z)$.

$$f_n(z) - a = \varphi_n(z) \frac{\prod_{\nu=1}^{m_\alpha^{(n)}} \left(1 - \frac{z}{\alpha_\nu^{(n)}}\right)}{\prod_{\nu=1}^{m_\beta^{(n)}} \left(1 - \frac{z}{\beta_\nu^{(n)}}\right)} - a = \frac{\varphi_n(z) \prod_{\nu=1}^{m_\alpha^{(n)}} \left(1 - \frac{z}{\alpha_\nu^{(n)}}\right) - a \prod_{\nu=1}^{m_\beta^{(n)}} \left(1 - \frac{z}{\beta_\nu^{(n)}}\right)}{\prod_{\nu=1}^{m_\beta^{(n)}} \left(1 - \frac{z}{\beta_\nu^{(n)}}\right)}$$

Die Nullstellen der Funktion $f_n(z) - a$ sind mit den Nullstellen des Zählers des obigen Ausdruckes identisch; denn Zähler und Nenner dieses Ausdruckes verschwinden nicht gleichzeitig. Der Zähler ist für $n > N$ nicht identisch 0, da $f(z) \not\equiv a$. Der Zähler bildet eine für $|z| \geqq 1 + \varepsilon$ holomorphe Funktion, welche die folgende Ungleichung befriedigt

$$\left| \varphi_n(z) \prod_{\nu=1}^{m_\alpha^{(n)}} \left(1 - \frac{z}{\alpha_\nu^{(n)}}\right) - a \prod_{\nu=1}^{m_\beta^{(n)}} \left(1 - \frac{z}{\beta_\nu^{(n)}}\right) \right| < e^{c_1 |z|^\varrho}$$

wenn $|z|$ genügend groß und c_1 eine geeignete Konstante bedeutet.

Unter Anwendung eines bekannten Satzes von F. und R. Nevanlinna[6]) folgt aus dieser Ungleichung, daß $\sum \frac{1}{|a_\mu^{(n)}|^{\rho+\eta}}$ konvergent, wenn wir mit $a_\mu^{(n)}$ die a-Stellen der Funktionen $f_n(z)$ bezeichnen und η eine beliebig kleine positive Zahl bedeutet. Damit ist der Beweis für die Eigenschaft (a) unseres Hauptsatzes geleistet.

Der Beweis der Eigenschaft (b) folgt sofort aus der beim Beweise des Hilfssatzes gemachten Bemerkung. Diese zeigt, daß unsere Eigenschaft (b) zunächst für die Nullstellen und Pole richtig ist. Mittelst einer linearen Transformation schließen wir aus der Eigenschaft (a) und diesem Resultat, daß sie für zwei beliebige Werte a und b richtig bleibt.

Die Eigenschaft (c) ergibt sich aus unserm Hilfssatz und dem Satz B des § 1. Denn wir stellen nun $f_n(z)$ mittelst $\varphi_n(z)$ dar:

$$f_n(z) = \varphi_n(z) \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{m_\alpha^{(n)}} \left(1 - \frac{z}{\alpha_\nu^{(n)}}\right)}{\prod\limits_{\nu=1}^{m_\beta^{(n)}} \left(1 - \frac{z}{\beta_\nu^{(n)}}\right)}.$$

Da sowohl die Funktionen $\varphi_n(z)$ als auch $\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{m_\alpha^{(n)}} \left(1 - \frac{z}{\alpha_\nu^{(n)}}\right)}{\prod\limits_{\nu=1}^{m_\beta^{(n)}} \left(1 - \frac{z}{\beta_\nu^{(n)}}\right)}$ je eine normale Funktionsschar darstellen, so können wir je eine konvergente Teilfolge mit gleichen Indizes n_k aus beiden Scharen herausgreifen. Die Grenzfunktion der Folge $\varphi_{n_k}(z)$ ist eine im Bereiche $|z| \geqq 1 + \varepsilon$ eventuell abgesehen vom Punkte ∞ holomorphe Funktion, die im Punkte ∞ höchstens einen Pol besitzen kann. Auf die konvergente Folge der andern Schar kann direkt der zitierte Satz B angewendet werden, und damit ist auch die Eigenschaft (c) bewiesen.

Fall II: $\rho > 1$. Zunächst folgt nach einer bekannten und schon einmal angewendeten Schlußweise von Hurwitz, daß $\sum\limits_{\nu_\varkappa} \frac{1}{|\alpha_{\nu_\varkappa}|^\rho}$ und

[6]) *F. und R. Nevanlinna,* Ueber die Eigenschaften analytischer Funktionen in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie, Acta Societatis Scientiarum Fennicae, L. No. 5 (1922) S. 3—46, insbes. S. 31 u. 32.

$\sum_{\nu_\varkappa} \frac{1}{|\beta_{\nu_\varkappa}|^\varrho}$ konvergent. Im Uebrigen wird der Fall II mittelst einer bekannten Borel'schen Transformation auf den Fall I zurückgeführt. Wir setzen

$$F_n(z) = f_n(z)\, f_n(\omega z) \ldots . f_n(\omega^{k-1} z)$$

und $$F(z) = f(z)\, f(\omega z) \ldots f(\omega^{k-1} z)\,.$$

ω bedeutet eine k. primitive Einheitswurzel, wobei $k = [\varrho] + 1$ wenn ϱ nicht ganzzahlig und $k = \varrho$, wenn ϱ ganzzahlig.

Die Nullstellen $\bar{\alpha}_\nu^{(n)} = \omega^\varkappa\, \alpha_\nu^{(n)} \begin{pmatrix} \varkappa = 0 \ldots k-1 \\ \nu = 1 \ldots m_\alpha^{(n)} \end{pmatrix}$ resp. die Pole $\bar{\beta}_\nu^{(n)} = \omega^\varkappa\, \beta_\nu^{(n)} \begin{pmatrix} \varkappa = 0 \ldots k-1 \\ \nu = 1 \ldots m_\beta^{(n)} \end{pmatrix}$ der Funktion $F_n(z)$ erfüllen die Ungleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{k m_\alpha^{(n)}} \frac{1}{|\bar{\alpha}_\nu^{(n)}|^\varrho} < k\, M(\varepsilon)$$

$$\sum_{\nu=1}^{k m_\beta^{(n)}} \frac{1}{|\bar{\beta}_\nu^{(n)}|^\varrho} < k\, M(\varepsilon)\,.$$

Die Funktionen $F_n(z)$ befriedigen die Funktionalgleichung $F_n(z) = F_n(\omega z)$. Deshalb besitzt die im Gebiete $|z| > 1$ konvergente Taylorreihe einer solchen Funktion die Form

$$F_n(z) = c_{mk}^{(n)} z^{mk} + c_{(m-1)k}^{(n)} z^{(m-1)k} + \ldots + c_0^{(n)} + c_{-k}^{(n)} z^{-k} + \ldots\ldots$$

Wir substituieren $z^k = t$ und erhalten $F_n(t)$ und $F(t)$. Die Nullstellen $(\alpha_\nu^{(n)})^k = A_\nu^{(n)}$ resp. Pole $(\beta_\nu^{(n)})^k = B_\nu^{(n)}$ von $F_n(t)$ befriedigen die Ungleichung

$$\sum_{\nu=1}^{m_\alpha^{(n)}} \frac{1}{|A_\nu^{(n)}|^{\frac{\varrho}{k}}} < M(\varepsilon)$$

$$\sum_{\nu=1}^{m_\beta^{(n)}} \frac{1}{|B_\nu^{(n)}|^{\frac{\varrho}{k}}} < M(\varepsilon)$$

wobei laut Annahme $\frac{\varrho}{k} \leqq 1$.

Die Funktionen $F_n(t)$ resp. $F(t)$ erfüllen also die Voraussetzungen des Falles I unseres Hauptsatzes, und deshalb kann direkt auf die Eigenschaften (a) und (b) der Funktionen $f_n(z)$ zurückgeschlossen werden. Ebenso folgt gemäß der Eigenschaft (c) des Falles I, daß sich $F(t)$ in der Form darstellen läßt

$$(5) \qquad F(t) = C \frac{\varphi(t) \prod\limits_{\nu_\varkappa} \left(1 - \frac{t}{\alpha_{\nu_\varkappa}^k}\right)}{\prod\limits_{\nu_\varkappa} \left(1 - \frac{t}{\beta_{\nu_\varkappa}^k}\right)} t^u,$$

wenn ϱ nicht ganzzahlig, wobei $\varphi(t)$ eine im Bereiche $|t| \geqq |1 + \varepsilon|^k$ inklusive den unendlich fernen Punkt holomorphe Funktion bedeutet. Wenn ϱ ganzzahlig, kommt eventuell der Faktor $e^{c_1 t}$ hinzu. Schließen wir nun gemäß unserer Substitution wieder rückwärts, so erhalten wir

$$(6) \qquad F(t) = F(z^k) = f(z) f(\omega z) \ldots f(\overset{k-1}{\omega z}) = C \varphi(z^k) \frac{\prod\limits_{\nu_\varkappa} \left(1 - \frac{z^k}{\alpha_{\nu_\varkappa}^k}\right)}{\prod\limits_{\nu_\varkappa} \left(1 - \frac{z^k}{\beta_{\nu_\varkappa}^k}\right)} z^{ku}$$

wenn ϱ nicht ganzzahlig.

Da der Konvergenzexponent der Nullstellen resp. Pole von $f(z)$ ϱ beträgt, so läßt sich andrerseits $f(z)$ in der Form darstellen

$$(7) \quad f(z) = \psi(z)\, e^{g(z)} \frac{\prod\limits_{\nu_\varkappa} \left(1 - \frac{z}{\alpha_{\nu_\varkappa}}\right) e^{\frac{z}{\alpha_{\nu_\varkappa}} + \ldots + \frac{1}{p}\left(\frac{z}{\alpha_{\nu_\varkappa}}\right)^p}}{\prod\limits_{\nu_\varkappa} \left(1 - \frac{z}{\beta_{\nu_\varkappa}}\right) e^{\frac{z}{\beta_{\nu_\varkappa}} + \ldots + \frac{1}{p}\left(\frac{z}{\beta_{\nu_\varkappa}}\right)^p}} \qquad p = k - 1,$$

wobei $\psi(z)$ eine im Bereiche $|z| \geqq 1 + \varepsilon$ holomorphe Funktion [im Punkte $z = \infty$ eventuell einen Pol] und $g(z)$ eine ganze, zunächst noch unbekannte Funktion bedeuten. $g(z)$ läßt sich aus den Gleichungen (6) und (7) bestimmen und muß folgende Gleichung erfüllen:

$$\psi(z)\, \psi(\omega z) \ldots \psi(\overset{k-1}{\omega z})\, e^{g(z) + g(\omega z) + \ldots + g(\overset{k-1}{\omega z})} = C \varphi(z^k)\, z^{ku}.$$

Da sich der Quotient $\dfrac{C\,\varphi(z^k)\,z^{ku}}{\psi(z)\,\psi(\omega z)\,\ldots\,\psi(\omega^{k-1} z)}$ in der Umgebung des unendlich fernen Punktes meromorph verhält, schließen wir daraus, daß $g(z) + g(\omega z) + \ldots + g(\omega^{k-1} z)$ eine Konstante sein muß. $g(z)$ besitzt deshalb die Form

$$g(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{k-1} z^{k-1} + a_{k+1} z^{k+1} + \ldots a_{2k-1} z^{2k-1} + \\ + a_{2k+1} z^{2k+1} + \ldots\ldots$$

Wählt man an Stelle einer k. primitiven Einheitswurzel eine $(k+1)$, so kann man genau gleich zeigen, daß die Koeffizienten, deren Indizes Multipla von $k+1$ sind, verschwinden müssen usw. Man findet schließlich für $g(z)$ die Form

$$g(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_{k-1} z^{k-1} = c_0 + c_1 z + \ldots + c_\rho z^\rho$$

wenn ρ nicht ganzzahlig und

$$g(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_k z^k = c_0 + c_1 z + \ldots + c_\rho z^\rho + c_{\rho+1} z^{\rho+1}$$

wenn ρ ganzahlig.

Damit ist der Beweis für den Hauptsatz geleistet.

Das folgende Beispiel zeigt, daß man wirklich voraussetzen muß, daß $a, b \not\equiv f(z)$. Es sei nämlich

$$f_n(z) = \left(\frac{z}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n \to \infty} f_n(z) = 0 \text{ für } z \neq \infty .$$

Die Funktionen $f_n(z)$ besitzen in der Umgebung der irregulären Stelle $z = \infty$ keine Nullstellen. Die Pole der Funktionen $f_n(z)$ liegen im irregulären Punkte. Für die a-Stellen, wobei a einen beliebigen Wert $\neq 0, \infty$ bedeutet, findet man

$$z = \sqrt[n]{a}\, n$$

d. h. die a-Stellen der Funktionen $f_n(z)$ besitzen den Konvergenzexponenten 1.

Ebenso ist klar, daß man über zwei Funktionswerte $a, b \not\equiv f(z)$ eine Voraussetzung über den Konvergenzexponenten der a- resp. b-Stellen der Funktionen $f_n(z)$ machen muß und nicht bloß über einen, um eine Aussage im Sinne unseres Hauptsatzes machen zu können. Beispiele

bieten die Abschnittspolynome der eine ganze Funktion darstellenden Taylorreihe. Dieselben besitzen nur Pole im irregulären Punkte.

Wir bezeichnen einen irregulären Punkt einer konvergenten Folge meromorpher Funktionen, der die Eigenschaften unseres Hauptsatzes besitzt, als *wesentlich irregulären Punkt der Ordnung* ρ.

§ 3. Ueber die Klassifikation der quasi-normalen Funktionsscharen.

Eine Schar von in einem Gebiete G meromorpher Funktionen sei gegeben. Nach Montel sagt man, die Schar verhalte sich in G *quasi-normal*, wenn man aus jeder Folge eine in G, abgesehen von endlich vielen irregulären Punkten gleichmäßig konvergente Teilfolge auswählen kann[7]). Die Schar heiße speziell *quasi-normal von rational endlicher Ordnung*, wenn die irregulären Punkte dieser konvergenten Folge *rational irreguläre Punkte von endlicher Ordnung* darstellen. Montel hat gezeigt, daß z. B. alle diejenigen meromorphen Funktionen in G eine quasi-normale Funktionsschar von rational endlicher Ordnung darstellen, die in G höchstens p Nullstellen, q Einsstellen und r Pole besitzen, wobei p, q, r ganze, positive Zahlen bedeuten.

Auf Grund unseres Hauptsatzes und der Einführung wesentlich irregulärer Punkte endlicher Ordnung kann man nun die in der Systematik der quasi-normalen Funktionsscharen folgende höhere Klasse der *quasi-normalen Funktionsscharen von wesentlich endlicher Ordnung* einführen. Darunter verstehen wir solche Funktionsscharen, bei denen man aus jeder Folge eine in G abgesehen von endlich vielen wesentlich irregulären Punkten endlicher Ordnung gleichmäßig konvergente Teilfolge auswählen kann. Speziell erhält man quasi-normale Funktionsscharen von *beschränkter wesentlich endlicher Ordnung*, wenn die konvergenten Teilfolgen so ausgewählt werden können, daß die Anzahl ihrer irregulären Punkte und ihre Ordnung beschränkt ist.

Beispiel einer quasi-normalen Funktionsschar von beschränkter wesentlich endlicher Ordnung: Wir bezeichnen die in G liegenden Nullstellen der zur Schar gehörigen Funktionen mit α, die Einsstellen mit β und die Pole mit γ. Es sei möglich, aus jeder Folge der zur Schar gehörigen Funk-

[7]) Man vergl. *P. Montel*, Leçons sur les familles normales et quasi-normales de fonctions analytiques et leurs applications, Collection Borel, Paris 1927, Verlag Gauthiers-Villars, insbes. p. 137 oder *G. Valiron*, Familles normales et quasi-normales de fonctions méromorphes, Fascicule XXXVIII des Mémorials des Sciences Mathématiques, Paris 1929, Verlag Gauthiers-Villars.

tionen eine Teilfolge so auszuwählen, daß die α, β, γ Punkte der dieser Teilfolge angehörigen Funktionen in G höchstens p, q, r Häufungsstellen besitzen, die zudem folgende Eigenschaft erfüllen: Die Konvergenzexponenten der α, β, γ Stellen der betreffenden Funktionen seien bezüglich dieser Häufungsstellen gleichmäßig beschränkt, d. h. $\leqq \rho$. Eine solche Funktionsschar besitzt quasi-normalen Charakter von beschränkter wesentlich endlicher Ordnung. Für den Beweis dieser Behauptung wird eine solche Teilfolge herausgegriffen, deren α, β, γ Stellen die in der Voraussetzung formulierte Bedingung erfüllen. Umgibt man die Häufungsstellen mit kleinen Kreislein, so nehmen die Funktionen im durchlöcherten Bereiche von einem bestimmten Index an keine Null-, Einsstellen und Pole mehr an. Sie bilden deshalb im durchlöcherten Bereiche eine normale Funktionsschar. Wir können deshalb aus jeder Folge eine in G abgesehen von einer beschränkten Anzahl irregulärer Punkte gleichmäßig konvergente Teilfolge auswählen. Zudem sind die irregulären Punkte dank unsern Voraussetzungen von wesentlich endlicher Ordnung, womit der Beweis geleistet ist.

Man sieht jedoch leicht, daß dieses Beispiel nicht den allgemeinen Typus einer quasi-normalen Funktionsschar von beschränkter wesentlich endlicher Ordnung darstellt. Denn eine zu dieser Schar gehörige Grenzfunktion besitzt in der Umgebung eines irregulären Punktes 3 Ausnahmewerte und muß sich deshalb nach dem großen Picard'schen Satz in den irregulären Punkten und damit überhaupt im Gebiet G meromorph verhalten.

(Eingegangen den 3. Januar 1930)