Ueber analytische Funktionen mit nichtbeschränkten Randwerten des Realteiles

Von A. WEINSTEIN, Breslau

Die folgenden Zeilen enthalten eine Bemerkung über das Verhalten einer analytischen Funktion, deren Realteil vorgeschriebene *nichtbeschränkte* Werte am Rande eines Gebietes annimmt. Wir werden zeigen, daß es möglich ist in gewissen einfachen Fällen das Verhalten der Funktion bei einer *beliebigen* Annäherung an den Rand mit elementaren Mitteln festzustellen.

Das Gebiet sei die obere Halbebene $y > 0$ der Ebene $z = x + iy$. Für das Verhalten einer analytischen Funktion in der Nähe der Stelle $z = 0$ ist die Verteilung der Randwerte auf der reellen Achse in der Umgebung der Stelle $x = 0$ ausschlaggebend. Wir wollen zunächst eine Verteilung betrachten, wo die Randwerte in einem beliebigen Intervall rechts von $x = 0$, z. B. im Intervall $(0, 1)$, die Größenordnung von $\frac{1}{x^\alpha}$ haben $(0 < \alpha < 1)$, während sie sonst beschränkt sind. Genauer gesagt wollen wir zunächst den folgenden Fall ins Auge fassen.

Die vorgeschriebenen Randwerte $\varphi(x)$ des Realteiles der gesuchten Funktion $f(z)$ seien

$$(1) \qquad \varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 > x \text{ und } x > 1 \\ \dfrac{\chi(x)}{x^\alpha} & \text{für } 0 < x \leqq 1, \end{cases}$$

wobei $\chi(x)$ eine für $0 \leqq x \leqq 1$ zweimal stetig differentiierbare Funktion ist, die für $x = 0$ nicht verschwinden soll. Für den Exponenten α soll die Ungleichung $0 < \alpha < 1$ gelten. Wir werden auch den Fall $-1 < \alpha < 0$ zu betrachten haben. Die Randwerte sind dann im Punkte $x = 0$ stetig, die rechtsseitige Ableitung, nämlich $\chi'(x)\, x^\beta + \beta \chi(x)\, x^{\beta-1}$ verhält sich aber im Falle $\chi(0) \neq 0$ wie $\frac{1}{x^{1-\beta}}$. (Dabei wurde für einen Augenblick $-\alpha = \beta$, $0 < \beta < 1$ gesetzt.)

Wir wollen nun zeigen, daß es eine analytische Funktion $f(z)$ mit den vorgeschriebenen Randwerten (1) des Realteiles gibt, für welche $\lim\limits_{z \to 0} z^\alpha f(z)$ existiert und von 0 verschieden ist, wobei z bei dem Grenzübergang eine beliebige Folge von Werten mit positivem Imaginärteil durchlaufen darf. Diese Funktion ist, wie wir gleich zeigen werden, durch das Cauchy-Schwarzsche Integral

$$f(z) = \frac{1}{i\pi} \int_0^1 \frac{\chi(x)}{x^\alpha} \frac{dx}{x - z}, \quad 0 < \alpha < 1 \tag{2}$$

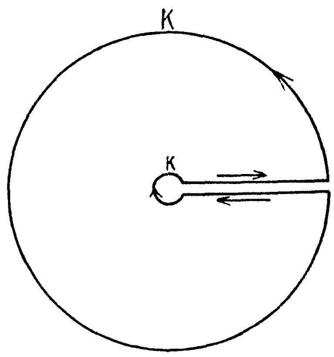
gegeben. Der einzige Punkt der Behauptung, der einer besonderen Untersuchung bedarf, ist das Verhalten von $f(z)$ an der Stelle $z = 0$. Wir beschäftigen uns zunächst mit der entsprechenden Frage für die Funktion

$$f_1(z) = \frac{1}{i\pi} \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha (x - z)},$$

die aus f entsteht, indem man $\chi(x)$ durch 1 ersetzt.

Wir betrachten z als Parameter mit einem positiven Imaginärteil und bilden das Integral

$$\int \frac{d\zeta}{\zeta^\alpha (\zeta - z)}$$



in der komplexen $\zeta = \xi + i\eta$ Ebene auf dem in der Figur angegebenen Weg, bestehend aus zwei konzentrischen Kreisen k und K mit dem gemeinsamen Mittelpunkt $\zeta = 0$ und zwei zur reellen Achse parallelen unendlich benachbarten Strecken. Im Inneren des Integrationsweges ist derjenige Zweig der Funktion $\frac{1}{\zeta^\alpha}$, welcher auf der oberen geraden Strecke reell ist, eindeutig. Somit ist unser Integral nach dem Residuumsatz gleich $\frac{2\pi i}{z^\alpha}$. Andrerseits bekommt man durch Grenzübergang, indem man den Radius von K nach Unendlich, denjenigen von k nach 0 konvergieren läßt, für unser Integral den Wert

$$(1 - e^{-2\pi i\alpha}) \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi^\alpha (\xi - z)},$$

woraus zu ersehen ist, daß

$$f_1(z) = \frac{1}{i\pi} \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha (x - z)} = \frac{2\, e^{2\pi i \alpha}}{e^{2\pi i \alpha} - 1}\, \frac{1}{z^\alpha} - \frac{1}{i\pi} \int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha (x - z)}$$

ist. Daraus aber folgt die Grenzbeziehung

$$\lim_{z \to 0} z^\alpha f(z) = \frac{2\, e^{2\pi i \alpha}}{e^{2\pi i \alpha} - 1} \neq 0 .$$

Wir betrachten weiter das Verhalten der Funktion

$$f_2(z) = \frac{1}{i\pi} \int_0^1 \frac{x^\beta\, dx}{x - z} - \frac{1}{i\pi\beta}, \quad 0 < \beta < 1$$

in der oberen Halbebene in der Umgebung der Stelle $z = 0$. (Der Realteil von $f_2(z)$ ist gleich x^β im Intervalle $0 \leqq x \leqq 1$ und gleich 0 für die übrigen x.) Setzt man $x^\beta = x^{\beta-1}(x - z) + z x^{\beta-1}$, so wird

$$f_2(z) = \frac{1}{i\pi} \int_0^1 \frac{dx}{x^{1-\beta}} + \frac{z}{i\pi} \int_0^1 \frac{dx}{x^{1-\beta}(x - z)} - \frac{1}{i\pi\beta} = \frac{z}{i\pi} \int_0^1 \frac{dx}{x^{1-\beta}(x - z)} .$$

Da $0 < 1 - \beta < 1$ ist, so ist das letzte Integral von dem eben betrachteten Typus. Daraus folgt, daß der $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{f_2(z)}{z^\beta}$ existiert und von 0 verschieden ist.

Wir betrachten schließlich die Funktion (2)

$$f(z) = \frac{1}{i\pi} \int_0^1 \frac{\chi(x)}{x^\alpha}\, \frac{dx}{x - z} .$$

Da $\chi(x)$ zweimal stetig differentiierbar ist, setzen wir $\chi(x) = \chi(0) + \chi'(0)\, x + \chi''(\vartheta x)\, \dfrac{x^2}{2}$, $(0 < \vartheta < 1)$. Es wird

$$(3) \quad f(z) = \frac{\chi(0)}{i\pi} \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha (x - z)} + \frac{\chi'(0)}{i\pi} \int_0^1 \frac{x^{1-\alpha}\, dx}{x - z} + \frac{1}{2 i\pi} \int_0^1 \frac{x^{2-\alpha}\, \chi''(\vartheta x)\, dx}{x - z} .$$

Das Verhalten des ersten und zweiten Integrals auf der rechten Seite ist soeben festgestellt worden. Das dritte Integral stellt eine in der oberen Halbebene analytische Funktion dar, deren Realteil auf der reellen Achse im Intervalle (0, 1) die Werte $\frac{x^{2-\alpha}\chi''(\vartheta x)}{2}$ annimmt und außerhalb dieses Intervalles, insbesondere für negative x verschwindet. Dieser Realteil ist eine an der Stelle $x = 0$ differentiierbare Funktion. Schreibt man nämlich für $x^{2-\alpha}\chi(x)$ den Ausdruck $\frac{\chi(x) - \chi(0) - x\chi'(0)}{x^\alpha}$, so sieht man sofort, daß dieser Ausdruck nach 0 konvergiert, wenn x durch positive Werte nach 0 strebt. Der rechtsseitige Differenzenquotient ist also an der Stelle $x = 0$ gleich $\frac{\chi(x) - \chi(0) - x\chi'(0)}{x^{1+\alpha}}$. Daraus ergibt sich, z. B. nach der l'Hôpitalschen Regel, für die rechtsseitige Ableitung an der Stelle $x = 0$ der Wert

$$\lim_{x=0} \frac{\chi'(x) - \chi'(0)}{(1+\alpha)\quad x^\alpha} = \lim_{x=0} \frac{\chi'(x) - \chi'(0)}{x} \; \frac{x^{1-\alpha}}{1+\alpha} = 0$$

in Uebereinstimmung mit dem Wert der linksseitigen Ableitung an derselben Stelle, w. z. b. w. Nach bekannten Sätzen bleibt also die durch das Integral

$$\frac{1}{2 i \pi} \int_0^1 \frac{x^{2-\alpha}\chi''(x)\,dx}{x - z}$$

dargestellte Funktion bei der Annäherung an $z = 0$ beschränkt.

Zusammenfassend ersehen wir also aus der Formel (3), daß, wie behauptet wurde, der $\lim\limits_{z \to 0} z^\alpha f(z)$ existiert und von 0 verschieden ist.

Dieses Resultat läßt sich leicht verallgemeinern. Lassen sich z. B. die vorgegebenen Randwerte für kleine positive x in der Form $\frac{\chi_1(x)}{x^{\alpha_1}}$, für kleine negative x aber in der Gestalt $\frac{\chi_2(x)}{|x|^{\alpha_2}}$ schreiben, wobei $0 < \alpha_1 < 1$, $0 < \alpha_2 < 1$ ist und $\chi_1(x)$ und $\chi_2(x)$ denselben Voraussetzungen wie $\chi(x)$ genügen, so kann man durch eine naheliegende additive Zerlegung der Randwerte eine zugehörige analytische Funktion $F(z)$ bilden, für welche $\lim z^\alpha F(z) = 0$ existiert, wobei unter α die größere der beiden Zahlen α_1 und α_2 zu verstehen ist.

(Eingegangen den 27. August 1931)