Essai sur les petites vibrations des astres fluides (suite).

Autor(en): **Wavre, R.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **4 (1932)**

PDF erstellt am: **28.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-5610

Essai sur les petites vibrations des astres fluides (suite)

par R. WAVRE, Genève

§ 14. Sommaire

La première partie de ce mémoire se trouve dans les « Commentarii Mathematici Helvetici », Vol. 3, p. 183. Un résumé des problèmes envisagés et des principaux résultats est inséré à la fin de cet article au § 25. Cela afin de dispenser le lecteur, qui s'interesserait plus aux conclusions qu'à la méthode employée de relire l'ensemble de ces deux publications.

Disons simplement que nous avons cherché à compléter, dans le cadre de la mécanique classique, la théorie des petits mouvements des astres fluides dont les particules s'attirent suivant la loi de Newton.

La compressibilité des fluides n'a pas été exclue, ni l'action de corps perturbateurs, ni enfin l'attraction des intumescences liquides.

Dans la première partie, nous avons envisagé un astre constitué par un seul fluide chimiquement homogène. Considérons maintenant le cas d'une enveloppe fluide entourant un noyau plus dense.

1° Le noyau pourra être supposé solide et c'est la théorie classique des marées océaniques que nous devrons rejoindre.

2° Le noyau pourra être supposé animé d'un mouvement connu, problème dont l'irréalité est manifeste, mais dont l'intérêt subsiste au point de vue de l'hydrodynamique.

3° Enfin, le noyau pourra être constitué par un fluide parfait et c'est un problème nouveau, sauf erreur, qui sera résolu. G. H. Darwin[6]) a envisagé le cas d'un noyau élastique et celui d'un noyau très visqueux et Poincaré[7]) a résumé cette très belle étude.

Les différences essentielles entre cet article-ci et le précédent proviennent de deux faits:

a) Des conditions de raccord entre les mouvements s'introduisent sur la frontière du nouyau qui ne se présentaient pas dans le cas d'un astre fluide homogène.

---

6) Phil. Trans. Part. I, 1879.
7) Théorie des Marées p. 431.

b) L'enveloppe n'ayant pas la connexité de la sphère pleine, des séries du type de Laurent remplaceront pour l'enveloppe des séries tayloriennes.

Les notations dont le sens est précisé dans l'article précédent ne seront pas expliquées à nouveau.

Disons, enfin, qu'il y aurait interêt à traiter séparément les différents cas envisagés: noyau solide, noyau fluide, ... compressibilité, présence ou absence d'astres perturbateurs .... Ce serait plus clair et plus didactique; car c'était un peu une gageure de procéder comme nous l'avons fait en recherchant d'emblée les formules les plus générales et l'exposé le plus synthétique.

§ 15. Noyau et enveloppe

Soient S_1 la surface libre de l'astre envisagé et S_2 la surface du noyau. A l'intérieur de ce dernier, comme à l'intérieur de l'enveloppe, les mouvements seront de genre un si ces corps sont homogènes et les équations de l'hydrodynamique se résumeront par la relation entre les trois potentiels

$$\Phi = U + Q. \tag{47}$$

Le potentiel de la pesanteur Φ est constant sur S_1 où la pression est nulle, il croît vers l'intérieur, mais il n'est pas nécessairement constant sur S_2.

Soient alors S'' une surface fermée à pression constante, intérieure à S_2 et C'' la cavité qu'elle limite puis Z'' la zone allant de S'' à S_1 et comprenant en plus les corps étrangers s'il y en a. Le mouvement du noyau sera régi par l'équation, pareille à celle du début du mémoire

$$\frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dn}\,dS'' + i\int \frac{1}{r}\,\varrho\,dz'' = \Phi_{S''} - \Big(Q + \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r}\,\Delta Q\,dc''\Big)_{P''}. \tag{48}$$

Elle devra être satisfaite, quelles que soit la position du point potentié P'' intérieur à C'' et la surface S'' intérieure au noyau.

Le cas de l'enveloppe est un peu plus compliqué, cette partie de l'astre n'ayant pas la connexité de la sphère.

Soient S et S' deux surfaces de niveau situées dans l'enveloppe et C la cavité comprise entre elles. L'identité de Green s'écrit pour cette cavité

$$\int \frac{1}{r} \Delta \Phi \, dc + \int \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dn} (dS + dS') + 4\pi \Phi_P - 4\pi \Phi_S = 0.$$

Les dérivées normales sont prises vers la cavité. Soient z la zone située entre S et S_1 comprenant les corps étrangers s'il y en a et z' la région intérieure à S' comprenant le noyau. Le potentiel newtonien s'écrit en un point P intérieur à c

$$U_P = i \int \frac{1}{r} \varrho \, (dc + dz + dz')$$

et l'équation fondamentale (47) donne dans l'enveloppe

$$\Delta \Phi = -4\pi i \varrho + \Delta Q.$$

Tirons ϱ de cette équation et portons dans la première intégrale de la relation précédente

$$U_P = \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} (\Delta Q - \Delta \Phi) \, dc + i \int \frac{1}{r} \varrho \, (dz + dz').$$

Enfin, remplaçons U_P par $\Phi_P - Q_P$ et l'intégrale portant sur $\Delta \Phi$ par sa valeur tirée de l'identité de Green; on trouve

$$\tag{49} \begin{aligned} &\frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dn} (dS + dS') + i \int \frac{1}{r} \varrho \, (dz + dz') \\ &\qquad = \Phi_S - \left(Q + \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} \Delta Q \, dc \right)_P . \end{aligned}$$

Cette équation devra être satisfaite, quelles que soient les deux surfaces de niveau S et S' intérieures à l'enveloppe. On vérifie comme précédemment que cette condition est suffisante, c'est-à-dire que l'équation (49) est alors équivalente à l'équation fondamentale

$$\tag{50} \Phi = U + Q.$$

Une *remarque* en passant: l'équation (49) paraît beaucoup plus compliquée que (50); mais rappelons que la simplicité de cette dernière n'est qu'apparente et due aux notations, car le calcul du potentiel newtonien U donne lieu à des difficultés énormes et notamment aux objections formulées par Tisserand, chaque fois que l'on désire développer à la manière classique l'inverse de la distance.

L'équation (48) comme d'ailleurs (49) échappent à ces difficultés, aucune des intégrales des premiers membres ne portant sur les cavités. Pour les petits mouvements d'un fluide incompressible, on a $\Delta Q = 0$ et l'intégrale des seconds membres disparaît.

§ 16. L'application du procédé uniforme

Soient τ le rayon vecteur du point potentié, l'origine étant au centre de gravité de l'astre et R le rayon vecteur d'un point potentiant, puis γ l'angle de ces deux rayons. Dans les intégrales étendues aux domaines S et z plus éloignés de l'origine que P, nous prendrons

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} \sum_{q=0}^{\infty} \left(\frac{\tau}{R}\right)^q X_q (\cos \gamma).$$

Tandis que pour S' et z' plus rapprochés, au contraire, nous écrirons

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\tau} \sum_{q=0}^{\infty} \left(\frac{R}{\tau}\right)^q X_q (\cos \gamma).$$

S'il y avait des corps étrangers, nous ferions passer leur potentiel newtonien dans le second membre. En l'absence de ceux-là, l'équation (49) devient

$$(51) \quad \frac{1}{4\pi} \sum_{q=0}^{\infty} \int X_q \left(\tau^q [R] - \tau^{-1-q} [R]'\right) d\Omega = \Phi_S - \left(Q + \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} \Delta Q \, dc\right)_P.$$

Le premier crochet en R est le même que précédemment, le second est d'une forme légèrement différente:

$$[R] = -\frac{\partial \Phi}{\partial j} H \left(\frac{\partial R}{\partial j}\right)^{-1} R^{1-q} + 4\pi i \int_j^{j_1} \varrho \, R^{1-q} \, dR$$

$$[R]' = -\frac{\partial \Phi}{\partial j'} H \left(\frac{\partial R}{\partial j'}\right)^{-1} R^{2+q} + 4\pi i \int_{j'}^{0} \varrho \, R^{2+q} \, dR$$

j est toujours le rayon de la sphère sur laquelle la pression, dans l'état de repos, a la même valeur que sur S; j' et j'' correspondent à S' et S''. L'équation (48) relative au noyau s'écrit comme précédemment

$$(52) \qquad \frac{1}{4\pi}\sum_{q=0}^{\infty} \tau^q \int X_q\,[R]''\,d\Omega = \Phi_{S''} - \Big(Q + \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r}\,\Delta Q\,dc''\Big)_{P''}$$

et le crochet d'indice ($''$) est le même que le crochet sans indice ci-dessus, mais il doit être pris pour j''.

Quant aux parenthèses des seconds membres, ce sont des fonctions harmoniques. Celle de la formule (52) est harmonique dans la cavité C'' qui contient l'origine. Nous la développerons comme d'habitude en polynomes harmoniques, ce qui donne

$$\sum_{q=0}^{\infty} \tau^q\, Y''_q(j'',\ \theta,\ \psi,\ t)$$

Y''_q étant une fonction sphérique de rang q en les angles θ et ψ. Elle dépend du paramètre j'' de la cavité c'' si ΔQ n'est pas identiquement nul. Enfin, t est toujours le temps.

Dans (51) la paranthèse du second membre est harmonique dans la cavité c, laquelle ne contient pas l'origine. Son développement exige l'introduction des polynomes harmoniques inverses en plus du développement direct, et on peut l'écrire sous forme laurentienne

$$\sum_{q=0}^{\infty} \tau^q\, Y_q(j,\ j',\ \theta,\ \psi,\ t) + \sum_{q=0}^{\infty} \tau^{-1-q}\, Y_q'(j, j',\ \theta,\ \psi,\ t).$$

Les fonctions sphériques ne contiendront les paramètres j et j' de C que si le fluide est compressible. Les équations (51) et (52) doivent être satisfaites, quelles que soient les positions des points potentiés P et P'' dans les cavités c et c''. On peut identifier les coefficients des mêmes puissances de τ, ce qui donne, pour $q > 0$:

$$(53) \qquad \begin{aligned} [R]_q &= -(1+2q)\,Y_q \\ [R]_q' &= +(1+2q)\,Y_q' \\ [R]_q'' &= -(1+2q)\,Y_q''. \end{aligned}$$

Ces trois équations devront être à leur tour satisfaites, quels que soient les angles θ et ψ, le temps t et les valeurs des paramètres j, satisfaisant aux relations $0 < j'' < j_2 < j' < j < j_1$ où j_2 et j_1 sont les rayons du noyau et de l'astre entier dans l'état de repos. S'il y a des corps perturbateurs, leurs potentiels newtoniens seront inscrits dans les seconds membres et l'on aura, pour $q > 0$:

$$
(54) \qquad
\begin{aligned}
[R]_q &= -(1+2q)\,(Y_q + U_q^1 + U_q^2 + \ldots)\\
[R]_q' &= +(1+2q)\,Y_q'\\
[R]_q'' &= -(1+2q)\,(Y_q'' + U_q^1 + U_q^2 + \ldots).
\end{aligned}
$$

Si l'on est en droit de confondre ces astres extérieurs avec des points matériels de masse m à distance l, on aura pour chacun d'eux, comme précédemment

$$
U_q = \frac{i\,m}{l^{1+q}}\,X_q\,(\cos\gamma).
$$

Enfin, les équations relatives à $q = 0$ s'écriraient, pour un seul corps étranger,

$$
(55) \qquad
\begin{aligned}
[R]_0 &= \Phi(j,\,t) - Y_0 - \frac{i\,m}{l}\\
[R]_0' &= Y_0'\\
[R]_0'' &= \Phi(j'',\,t) - Y_0'' - \frac{i\,m}{l}.
\end{aligned}
$$

S'il y avait plusieurs corps, les termes correspondants s'ajouteraient; mais nous n'aurons pas besoin ici de ces relations particulières. On sait d'ailleurs que les fonctions des accélérations d'indices 0 et 1 disparaissent pour un fluide incompressible, quand on tient compte du mouvement du centre de gravité.

Les systèmes (54) *et* (55) *conviennent à l'étude des petites vibrations d'un astre composé de deux fluides chimiquement homogènes, compressibles ou incompressibles et soumis à l'action constante ou variable de corps étrangers.*

Pratiquement, dans les pages suivantes, nous supposerons le fluide incompressible. Les fonctions Y ne contiendront plus les paramètres j et seront celles du développement du potentiel des accélérations lui-même.

§ 17. Mise en évidence des déformations.

Introduisons la déformation radiale rapportée au rayon j de la surface de niveau de paramètre j en posant $R = j\,(1 + e)$. L'approximation d'ordre zéro ne donne rien de nouveau.

L'identification des termes du premier ordre introduit comme précédemment des accolades en e au lieu des crochets en R. Ce sont actuellement

$$\{e\} = -\frac{1}{3} D j^{3-2q} \frac{\partial e j^q}{\partial j} + \int_j^{j_1} \varrho \, d(e j^{2-q})$$

$$\{e\}' = -\frac{1}{3} D j'^{5+2q} \frac{\partial e j'^{-1-q}}{\partial j'} + \int_{j'}^{0} \varrho \, d(e j'^{3+q})$$

et une accolade d'indice $''$ identique à la première prise pour j''. Développons, ensuite, e et les Y en séries de fonctions sphériques fondamentales:

$$Y_{q,m}(\theta, \psi)$$

ce qui est toujours possible, pour chaque valeur de t et de j

$$e = \sum_{q=0}^{\infty} e_q, \qquad e_q = \sum_{m=-q}^{+q} e_{q,m}(j, t)\, Y_{q,m}$$

puis

$$Y_q = \sum \alpha_{q,m} Y_{q,m}, \qquad Y_q' = \sum \alpha'_{q,m} Y_{q,m}, \qquad Y_q'' = \sum \alpha''_{q,m} Y_{q,m}.$$

Ces dernières sommes sont également à prendre de $m = -q$ à $m = +q$. Ensuite, l'identification des coefficients des $Y_{q,m}$ dans les relations (53) du paragraphe précédent donne

$$\begin{aligned} \{e_{q,m}\} &= -K_q \alpha_{q,m}(t) \\ \{e_{q,m}\}' &= +K_q \alpha'_{q,m}(t) \\ \{e_{q,m}\}'' &= -K_q \alpha''_{q,m}(t) \end{aligned} \qquad K_q = \frac{1+2q}{4\pi i}.$$

S'il y a un astre perturbateur, son potentiel s'exprimera également au moyen des $Y_{q,m}$

$$U_q = \sum \delta_{q,m}(t)\, Y_{q,m}$$

et les fonctions δ viendront simplement s'ajouter aux fonctions de même indice α et α''. Pour simplifier, nous supprimerons souvent les indices q et m et souvent aussi, nous reviendrons aux fonctions e_q et Y_q en multipliant par les fonctions fondamentales et sommant par rapport à m.

Le système complété s'écrira, en tenant compte des perturbations

$$(56)\qquad \begin{aligned} \{e\} &= -K(\alpha + \delta) \\ \{e\}' &= +K\alpha' \\ \{e\}'' &= -K(\alpha'' + \delta). \end{aligned}$$

Il faut encore lui adjoindre les conditions aux frontières.

§ 18. Les conditions aux frontières.

L'accélération radiale rapportée se forme comme précédemment à partir du potentiel des accélérations et l'on trouve, pour le noyau,

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = -q j^{q-2} \alpha''$$

et pour l'enveloppe

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = -q j^{q-2} \alpha + (1 + q) j^{-q-3} \alpha'.$$

Ceci étant, quatre conditions aux frontières doivent être transcrites pour le problème général:

1° La surface libre S_1 est une surface fluide en même temps qu'une surface à pression constante. Il faut écrire $e_1 = \eta_1$[8]) d'où

$$(57)\qquad \frac{d^2 e_1}{dt^2} = -q j_1^{q-2} \alpha + (1 + q) j_1^{-q-3} \alpha'.$$

2° La frontière du noyau S_2 est également une surface fluide, ce qui donne, ε étant la déformation rapportée de cette surface,

$$(58)\qquad \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} = -q j_2^{q-2} \alpha''.$$

3° La surface S_2 peut être indifféremment considérée comme appartenant au noyau et à l'enveloppe. Dans les deux cas, ses points auront la même accélération radiale, d'où

[8]) L'indice (1) signifie ici que les quantités sont à prendre sur la surface libre $j = j_1$.

$$\alpha'' = \alpha - \frac{1+q}{q} j_2^{-1-2q} \alpha' . \tag{59}$$

4° Enfin, la surface de pression $p\ (j_2)$ qui, au repos, coïncide avec la frontière S_2 est la même, qu'on l'approche par le noyau ou par l'enveloppe

$$e_{\text{noy}}\,(j_2) = e_{\text{env}}\,(j_2) . \tag{60}$$

Pour d'autres configurations que les sphéroïdes, les trois conditions de raccord sur la frontière S_2 donneraient prise, quant à la rigueur, à des difficultés sur lesquelles je n'ai pas insisté ici.

§ 19. Le calcul des accolades

Soient ϱ_1 la densité du noyau et ϱ_2 celle de l'enveloppe, puis D la densité moyenne de la matière comprise dans la sphère de rayon j, on a $D = \varrho_2$ pour $0 \leq j \leq j_2$ et

$$D = \varrho_1 + (\varrho_2 - \varrho_1) j_2^3 j^{-3} \qquad \text{pour} \qquad j_2 \leq j \leq j_1.$$

La déformation ε ne coïncide pas, en général, avec la déformation $e\ (j_2)$ car S_2 n'est pas en général une surface de niveau. Cette remarque faite, calculons les intégrales portant sur les zones dans les accolades en e. Il n'y a pas de difficulté à calculer la première pour laquelle $\varrho = \varrho_1 =$ constante. Pour la seconde, la densité subit un saut $\varrho_1 \longrightarrow \varrho_2$ pour $j = j_2$ c'est à dire sur la surface $R = j\,(1 + \varepsilon)$ laquelle ne coïncide pas avec $R = j\,[1 + e\,(j_2)]$; mais l'intégrale à calculer est indépendante du mode de repérage du noyau et de l'enveloppe par la stratification en surface S, puisque ces deux parties sont homogènes. On peut donc supposer, pour ce calcul, que l'on a $\varepsilon = e\,(j_2)$ et il n'y a plus de difficulté.

La troisième se calcule par le même artifice et les équations (56) s'écrivent

$$\left(\frac{q}{3} D + \varrho_1\right) e + \frac{1}{3} D j \frac{\partial e}{\partial j} = j^{q-2} \left[\varrho_1 e_1 j_1^{2-q} + K(\alpha + \delta)\right] \tag{61}$$

$$\left(-\frac{1+q}{3} D + \varrho_1\right) e + \frac{1}{3} D j \frac{\partial e}{\partial j} = j^{-q-3} \left[(\varrho_1 - \varrho_2)\, \varepsilon\, j_2^{3+q} - K\alpha'\right] \tag{62}$$

$$(63) \qquad \frac{\varrho_2}{3}\,\frac{\partial\, e j^{q+3}}{\partial j} = j^{2q}\,[\varrho_1 e_1 j_1^{2-q} + (\varrho_2 - \varrho_1)\,\varepsilon\, j_2^{2-q} + K(\alpha'' + \delta)].$$

Les deux premières sont relatives à l'enveloppe, la troisième est relative au noyau supposé fluide. S'il est solide au contraire, cette dernière équation devrait être supprimée.

§ 20. Résolution du système d'équations

Les conditions aux frontières 57, 58, 59, 60 et les relations 61, 62, 63 représentent le système à résoudre. Occupons-nous tout d'abord des équations 61 et 62. Par soustraction membre à membre, on obtient en posant $q' = \frac{2q+1}{3}$

$$(64) \quad q' D e = j^{-3-q}\,[(\varrho_2 - \varrho_1)\,\varepsilon\, j_2^{3+q} + K\alpha'] + j^{q-2}\,[\varrho_1 e_1 j_1^{2-q} + K(\alpha + \delta)].$$

La valeur de e déduite de (64) est la solution commune aux deux équations (61) et (62), comme on le vérifie aisément. Si l'on fait $j = j_1$, e_1 peut être extraite facilement de (64) et l'on trouve

$$(65) \quad (q' D_1 - \varrho_1)\, e_1 = (\varrho_2 - \varrho_1)\,\varepsilon\, j_2^{3+q} j_1^{-3-q} + K\alpha' j_1^{-3-q} + K(\alpha + \delta)\, j_1^{q-2}.$$

Puis, portant la valeur de e_1 tirée de (65) dans (64), la déformation de l'enveloppe s'écrit

$$(66) \quad e = \frac{1}{q' D}\,\varepsilon\, j_2^{3+q}\left[(\varrho_2 - \varrho_1)\, j^{-3-q} + \frac{\varrho_1(\varrho_2 - \varrho_1)}{q' D_1 - \varrho_1}\, j_1^{-1-2q} j^{q-2}\right]$$
$$+ \frac{K\alpha'}{q' D}\left[j^{-q-3} + \frac{\varrho_1}{q' D_1 - \varrho_1}\, j_1^{-1-2q} j^{q-2}\right] + \frac{K}{D}\,\frac{D_1}{q' D_1 - \varrho_1}(\alpha + \delta)\, j^{q-2}.$$

Dérivons deux fois par rapport à t l'équation (65) et remplaçons les dérivées secondes de e_1 et ε par leur valeur (57) et (58). Enfin remplaçons α' par sa valeur tirée de (59) qui est

$$(67) \qquad \alpha' = \frac{q}{1+q}\,(\alpha - \alpha'')\, j_2^{1+2q}$$

Ceci donne, en posant encore $\mathcal{J} = j_2^{1+2q} j_1^{-1-2q}$ et $q'' = \dfrac{1+q}{1+q+q\mathcal{J}}$

$$(68)\quad \frac{d^2\alpha}{dt^2}+\frac{q}{K}q''(1-\mathcal{J})(q'D_1-\varrho_1)\alpha=q''\left[-\frac{d^2\delta}{dt^2}+q\mathcal{J}\left(\frac{1}{1+q}\frac{d^2\alpha''}{dt^2}+\frac{\varrho_2-q'D_1}{K}\alpha''\right)\right].$$

Ces relations 66, 67, 68 sont vraies, que le noyau soit solide ou liquide.

Enfin, pour un noyau fluide, l'équation (63) donne

$$(69)\qquad e_{\text{noy}}=\frac{1}{q'\,\varrho_2}j^{q-2}\,[\varrho_1\,e_1\,j_1^{2-q}+\varepsilon\,j_2^{2-q}\,(\varrho_2-\varrho_1)+K(\alpha''+\delta)].$$

C'est la solution de (63), une puissance négative de j à savoir j^{-q-3} ayant été exclue à priori, car il serait illégitime d'admettre que la déformation e devienne infinie au voisinage du centre. Si l'on exprime la relation (60) en faisant $j=j_2$ dans (64) et (69), on trouve

$$(70)\qquad \alpha'=(\alpha''-\alpha)\,j_2^{1+2q}.$$

Ces relations (69) et (70) ne sont valables que pour un noyau constitué par un fluide parfait.

Les formules (66) et (69) montrent que *la déformation est toujours une fonction rationnelle du rayon j dans l'astre entier.*

§ 21. L'hypothèse d'un noyau solide

Si le noyau est solide et sphérique, on a $\varepsilon=0$ d'où $\alpha''=0$, et l'équation (68) se réduit à

$$(71)\qquad \frac{d^2\alpha}{dt^2}+\omega_q^2\,\alpha=-q''\frac{d^2\delta}{dt^2}$$

avec

$$\omega_q^2=\frac{q}{K}\,q''\,(1-\mathcal{J})\,(q'\,D_1-\varrho_1),$$

ω_q est la fréquence déjà déterminée par *Lord Kelvin.*

L'accélération radiale rapportée au rayon s'écrit actuellement

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}=-q\,\alpha\,(j^{q-2}-j_2^{1+2q}\,j^{-q-3}).$$

Elle est nulle pour $j=j_2$. Tirant α de (71) et intégrant deux fois par rapport à t, on trouvera

$$\eta = \frac{q}{\omega_q^2} (j^{q-2} - j_2^{1+2q} j^{-q-3}) (\alpha + q'' \delta),$$

expression du déplacement radial des particules. L'équation (71) s'intègre facilement et donne

$$\alpha = \alpha^+ + \frac{q''}{\omega_q} \int_0^t \frac{d^2\delta(\tau)}{d\tau^2} \sin \omega_q (\tau - t) \, d\tau.$$

Dans cette relation α^+ représente la solution de l'équation (78) sans second membre

$$\alpha^+ = c^{(1)} \cos \omega_q t + c^{(2)} \sin \omega_q t.$$

Pour $t = 0$ l'intégrale précédente et sa dérivée par rapport à t s'annulent et l'on a

$$\alpha_{t=0} = c^{(1)} \qquad \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_{t=0} = c^{(2)} \omega_q .$$

La perturbation δ étant supposée connue, les deux données

$$\eta_{t=0} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{d\eta}{dt}\right)_{t=0}$$

pour une valeur j_+ détermineront α et $\frac{d\alpha}{dt}$ et par conséquent $c^{(1)}$ et $c^{(2)}$. *Le mouvement est entièrement déterminé quel que soit t si à un instant donné, on connaît sur une seule surface fluide (par exemple sur la surface libre) les positions initiales et les vitesses radiales initiales des particules.*

La marée statistique répond à $\delta =$ constante et $\alpha = 0$; et l'on a

$$\eta = \frac{qq''}{\omega_q^2} (j^{q-2} - j_2^{1+2q} j^{-q-3}) \delta.$$

Pour $j_2 = 0$, on aura $\mathcal{J} = 0$, $q'' = 1$ et d'ailleurs $\eta = e$ et l'on retrouvera l'ancienne valeur: § 10. [9])

Quant aux déformations des surfaces mobiles de niveau, elle s'obtiennent facilement à partir de l'équation (66).

---

[9]) Dans les deux premières formules de la page 203 remplacez $\frac{3}{8\pi}$ par $\frac{1}{2}$ et $\frac{15}{8\pi}$ par $\frac{5}{2}$.

La surface du noyau n'est pas une surface d'égale pression, comme on le vérifie facilement.

Revenons aux fréquences ω_q. Si $j_2 = 0$, on rejoint l'ancienne expression de la page 195. Enfin, si le noyau occupe l'astre presque tout entier, on retrouve une formule de *Laplace*

$$\omega_q^2 = 4\pi i q (1 + q)\left(\frac{\varrho_2}{3} - \frac{\varrho_1}{2q+1}\right)\frac{h}{j_1} + h^2 (\ )$$

où h est la profondeur de l'enveloppe: $h = j_1 - j_2$. Les fréquences tendent toutes vers zéro avec l'épaisseur h de l'enveloppe.

Remarque. Pour comparer les résultats actuels avec ceux de l'article précédent, il convient de tenir compte de ce que l'équation $\alpha'' + \omega_q^2 \alpha = -\delta''$ peut s'écrire $(\alpha + \delta)'' + \omega_q^2 (\alpha + \delta) = \omega_q^2 \delta$. L'accent représente ici une dérivation et si l'on revient aux e_q ou η_q, il faut changer

$$\delta \text{ en } \frac{i\,m}{l^{q+1}} X_q (\cos\gamma).$$

§ 22. L'hypothèse d'un noyau liquide

Si le noyau est constitué par un fluide parfait incompressible, les équations (67) et (70) donnent, c'est immédiat, : $\alpha = \alpha''$ et $\alpha' = 0$. La relation (68) se réduit, après avoir fait passer le terme en α'' dans le premier membre, à

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_q^2 \alpha = -\frac{d^2\delta}{dt^2}. \tag{72}$$

Les carrés des fréquences ont d'autres valeurs que précédemment. *Ce ne sont plus les fréquences de Lord Kelvin* et l'on a

$$\omega_q^2 = \frac{q}{K}\left[q' D_1 - \varrho_1 + \mathcal{J}(\varrho_1 - \varrho_2)\right].$$

Les accélérations radiales rapportées ont une forme plus simple qu'avant

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = -q\, j^{q-2}\, \alpha$$

et la substitution à α de sa valeur tirée de (72) donne, après intégration,

$$\eta = \frac{q}{\omega_q^2} j^{q-2} (\alpha + \delta).$$

Cette expression des déplacements radiaux rapportés aux rayons est valable dans l'astre entier $0 \leq j \leq j_1$.

Si l'on fait $q = 2$, les surfaces fluides qui, au repos, sont des sphères, sont, pendant les petites vibrations ou encore pour la marée statique, des ellipsoïdes homothétiques, car alors η ne dépend plus de j. En particulier, *la surface du noyau et la surface libre sont deux ellipsoïdes homothétiques pour* $q = 2$. *Pour* $q > 2$, *les déformations rapportées du noyau sont plus faibles que celles de l'enveloppe.*

L'équation (72) s'intègre facilement et donne, α^+ ayant la même forme qu'avant

$$\alpha = \alpha^+ + \frac{1}{\omega_q} \int_0^t \frac{d^2 \delta}{d\tau^2} \sin \omega_q (\tau - t)\, d\tau.$$

Le mouvement sera déterminé à toute époque, si l'on connaît à un instant et pour une surface fluide (j_1 ou j_2 par exemple) les valeurs de η et de $\frac{d\eta}{dt}$. *Le mouvement est entièrement déterminé par la position initiale d'une surface fluide et les vitesses radiales initiales des points de cette surface.*

Quant aux déformations des surfaces d'égale pression, on les tirerait des équations (66) et (69). On vérifierait que η coïncide avec e pour $j = j_1$, tandis que e ne coïncide pas avec η pour $j = j_2$ sauf si $\rho_1 = \rho_2$. Dans ce dernier cas, l'on a $e \equiv \eta$, quel que soit le rayon j, comme on l'a déjà vu dans l'article précédent. *La frontière du noyau n'est une surface d'égale pression que si l'astre est entièrement homogène.*

La marée statique correspond à $\alpha = 0$ et $\delta =$ constante. Les déformations rapportées aux rayons sont alors

$$\eta_q = \frac{q}{\omega_q^2} j^{q-2} \frac{i\, m}{l^{q+1}} X_q (\cos \gamma).$$

Pour $\rho_1 = \rho_2$ ou encore $j_2 = 0$, on retrouverait l'ancienne valeur de ω_q et l'ancienne déformation. Les fréquences s'écrivent plus explicitement

$$\omega_q^2 = 4\pi i q \rho_1 \left\{ \frac{2}{3}\frac{q-1}{2q+1} + \frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{j_2}{j_1}\right)^3 - \frac{1}{2q+1}\left(\frac{j_2}{j_1}\right)^{2q+1}\right]\right\}.$$

Elles sont les mêmes pour le noyau et pour l'enveloppe. C'est naturel puisqu'il n'existe ici qu'un seul et même potentiel des accélérations pour l'astre entier. Si ρ_1 restant le même, ρ_2 augmente, les fréquences augmentent. *Elles sont indépendantes des dimensions de l'astre,* c'est-à-dire invariantes pour une homothétie; *elles ne dépendent que des densités et du rapport des rayons du noyau et de la surface libre.* Une dérivation par rapport à j_2 donnerait zéro pour $j_2 = j_1$, c'est immédiat. *Les fréquences sont donc stationnaires pour une profondeur nulle de l'enveloppe.* En posant $h = j_1 - j_2$, on trouve d'ailleurs

$$\omega_q^2 = \frac{8}{3}\pi i \rho_2 q \frac{q-1}{2q+1} + h^2 (\ ).$$

Le premier terme correspond à un astre entièrement homogène et de densité ρ_2. Enfin, si l'indice q tend vers l'infini, la *valeur asymtotique du carré de la fréquence* est

$$\omega_q^2 \sim q \cdot \frac{4\pi i}{3} D_1$$

D_1 étant la densité moyenne de l'astre entier. Cette valeur asymtotique est la même que si l'astre était entièrement homogène.

§ 23. Hypothèse plus générale

Les équations (66), (67), (68) conviennent, que le noyau soit solide ou liquide. L'équation (68) s'écrit en abrégé

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_q^2 \alpha = F(t) \tag{73}$$

où ω_q a la même valeur que pour un noyau solide.

Au point de vue mathématique, on peut supposer que le noyau ait un mouvement donné à l'avance. La fonction $F(t)$ sera alors connue. Le petit mouvement du noyau devra être simplement celui d'un fluide incompressible et le centre de gravité ne devra pas se déplacer. L'équation (73) régira les petites vibrations de l'enveloppe autour de ce noyau, animé comme par un dragon, d'un mouvement donné. Au point de vue de la mécanique céleste, cette hypothèse est purement gratuite, mais l'intérêt du problème subsiste au point de vue de l'hydrodynamique.

Il serait intéressant d'étudier à partir de (73) les phénomènes de resonnance dans l'enveloppe, créés par les mouvements donnés du noyau. *Les fréquences propres de l'enveloppe sont les mêmes que pour un noyau solide* et ce sont encore, dans ce cas, celles de *Lord Kelvin.* C'est assez naturel puisque dans un cas comme dans l'autre le noyau ne cède pas aux pressions de l'enveloppe.

Sans prétendre trancher la question de la viscosité du globe terrestre, je veux cependant aborder sommairement une question qui s'y rapporte. Pour un noyau formé d'un fluide parfait, on avait $\alpha'' = \alpha$ et pour un noyau solide, on avait $\alpha'' = 0$. On peut donc songer à poser $\alpha'' = \theta\alpha$; où θ serait comme un coefficient de fluidité du noyau; et étudier les cas intermédiaires $0 < \theta < 1$. L'équation (68) dans laquelle il faut alors faire passer au premier membre les termes en α s'écrit

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_q^2(\theta)\,\alpha = -q''(\theta)\frac{d^2\delta}{dt^2} \tag{74}$$

avec

$$q''(\theta) = \frac{1+q}{1+q+q\mathcal{J}(1-\theta)} \tag{75}$$

et

$$\omega_q^2(\theta) = q''(\theta)\frac{q}{K}\left[(1-\mathcal{J})(q'D_1-\rho_1) - \mathcal{J}\theta(\rho_2 - q'D_1)\right]. \tag{76}$$

Les accélérations radiales rapportées s'écriraient ici, on le vérifie aisément

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = -q\alpha\left[j^{q-2} - j_2^{1+2q}j^{-q-3}(1-\theta)\right] \tag{77}$$

et les déplacements radiaux rapportés

$$\eta = \frac{q}{\omega_q^2(\theta)}\left[j^{q-2} - j_2^{1+2q}j^{-q-3}(1-\theta)\right]\left[\alpha + q''(\theta)\,\delta\right]. \tag{78}$$

Pour $\theta = 0$ et $\theta = 1$, on retrouve, bien entendu: les équations des vibrations, les valeurs propres, les accélérations radiales et les déplacements radiaux qui conviennent au noyau solide ($\theta = 0$) et au noyau formé d'un fluide parfait ($\theta = 1$). A ce titre déjà, ce point de vue synthétique est intéressant.

Mettons en évidence les déplacements radiaux pour les surfaces de l'astre et du noyau. Pour $j = j_1$, on a

$$\eta_1 = \frac{q}{\omega_q^2(\theta)} j_1^{q-2} (1 - \mathcal{J} + \mathcal{J}\theta) [\alpha + q''(\theta)\,\delta] \tag{79}$$

et pour $j = j_2$

$$\eta_2 = \frac{q}{\omega_q^2(\theta)} j_2^{q-2}\, \theta\, [\alpha + q''(\theta)\,\delta]. \tag{80}$$

Le rapport des deux déformations rapportées est

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \left(\frac{j_1}{j_2}\right)^{q-2} \frac{1 - \mathcal{J} + \mathcal{J}\theta}{\theta} \tag{81}$$

et l'on peut s'attacher spécialement aux deux déformations principales relatives à $q = 2$. En posant $h = j_1 - j_2$, on trouve pour θ

$$\theta = \frac{5\dfrac{h}{j_1}}{\dfrac{\eta_1}{\eta_2} - 1 + 5\dfrac{h}{j_1}}. \tag{82}$$

Dans l'étude des marées océaniques, on pourrait déterminer θ *par la formule précédente à partir de deux observations, l'une de la marée océanique, l'autre de la marée terrestre en un point.* La théorie retracée dans ce paragraphe fournirait *les équations fondamentales pour le mouvement de l'océan en tenant compte de la marée terrestre et le coefficient* θ *remplacerait un renseignement qui nous manque sur la fluidité du globe terrestre.* On sait que *Darwin* a déjà envisagé l'hypothèse d'un noyau élastique ou très visqueux et *Poincaré* a résumé et critiqué son point de vue dans un chapitre de sa «Théorie des marées».

§ 24. Hétérogénéité et mouvement barotrope

Envisageons les particules qui, dans l'état stable, occupent une sphère de rayon j. Au cours des petits mouvements, ces points subissent, à partir de leur position initiale, des déplacements radiaux $j\,\eta\,(j, \theta, \psi, t)$ et forment au cours du temps une surface fluide dont l'expression précédente est précisément la déformation radiale. La déformation radiale des surfaces sur lesquelles la pression a une valeur constante $p(j)$, la même que sur la sphère de rayon j dans l'état de repos, est au contraire $je(j, \theta, \psi, t)$. Ceci rappelé, faisons quelques calculs. Supposons que l'on ait

$$e \equiv \eta. \tag{83}$$

On aurait encore,

$$\left\{\frac{d^2 e}{dt^2}\right\} = \left\{\frac{d^2 \eta}{dt^2}\right\}. \tag{84}$$

Les équations (56) donnent, pour le noyau et pour l'enveloppe,

$$\left\{\frac{d^2 e}{dt^2}\right\} = -K\frac{d^2 \alpha''}{dt^2} \qquad \left\{\frac{d^2 e}{dt^2}\right\} = -K\frac{d^2 \alpha}{dt^2}$$

et s'il y a des astres perturbateurs, il suffira d'ajouter δ aux α et α''. Les accélérations radiales rapportées étaient, pour le noyau et pour l'enveloppe :

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} = -q\, j^{q-2}\, \alpha'' \qquad \frac{d^2 \eta}{dt^2} = -q\, j^{q-2}\, \alpha + (1+q)\, j^{-q-3}\, \alpha'.$$

Sur ces dernières équations, faisons agir les accolades et exprimons la relation (84):

$$K\frac{d^2 \alpha''}{dt^2} = q\left\{j^{q-2}\right\}\alpha'', \qquad K\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = q\left\{j^{q-2}\right\}\alpha - (1+q)\left\{j^{-q-3}\right\}\alpha' ;$$

puis dérivons ces équations par rapport au paramètre j

$$0 = \alpha''\frac{d\left\{j^{q-2}\right\}}{dj} \qquad 0 = q\alpha\frac{d\left\{j^{q-2}\right\}}{dj} - (1+q)\,\alpha'\,\frac{d\left\{j^{-q-3}\right\}}{dj}. \tag{85}$$

Les accolades et leurs dérivées se calculent sans difficulté et l'on trouve

$$\left\{j^{q-2}\right\} = \tfrac{2}{3}(1-q)\, D \qquad \left\{j^{-q-3}\right\} = Dj^{-1-2q} + \int_j^{j_1} \rho\, d\left(j^{-1-2q}\right)$$

$$\frac{d\left\{j^{q-2}\right\}}{dj} = \tfrac{2}{3}(1-q)\frac{dD}{dj} \qquad \frac{d\left\{j^{-q-3}\right\}}{dj} = \tfrac{2}{3}(2+q)\, j^{-1-2q}\,\frac{dD}{dj}.$$

Pour obtenir la dernière formule, nous avons employé la relation entre densité et densité moyenne

$$\varrho = D + \tfrac{1}{3} j \frac{dD}{dj}.$$

Alors les équations (85) donnent, pour le noyau

$$0 = q(q-1)\alpha'' \frac{dD}{dj}$$

et pour l'enveloppe

$$0 = [q(q-1)\alpha + (1+q)(2+q)\alpha' j^{-1-2q}] \frac{dD}{dj}.$$

Les fonctions α, α', α'' ne dépendent que de t. D'autre part, q est différent de zéro et de un. Si l'on veut qu'il y ait coïncidence entre surfaces fluides et surfaces de niveau, il faudra que D soit une constante, d'où $\varrho =$ constante. Ces calculs faits, envisageons différentes hypothèses:

1° Le fluide est hétérogène et incompressible mais satisfait à une relation de la forme

$$\varrho = \mathfrak{h}(p).$$

Alors, les surfaces $p(x, y, z, t) =$ constante coïncideront avec les surfaces $\varrho(x, y, z, t) =$ constante. Ces dernières sont des surfaces fluides, puisque l'astre est incompressible. Les surfaces $p = c$ seraient des surfaces fluides et l'on aurait $e \equiv \eta$. Le mouvement serait bien barotrope ou de genre un et la méthode développée au début s'appliquerait, ainsi que les calculs ci-dessus; mais alors il y aurait contradiction, à supposer l'astre hétérogène, incompressible et à relation $\varrho = \mathfrak{h}(p)$, puisque la densité devrait être constante partout.

2° Si le fluide est hétérogène, incompressible et satisfait à une relation de la forme $\varrho = \mathfrak{h}(p, t)$ où t est le temps, nous pourrons prendre les surfaces d'égale densité $\varrho(x, y, z, t) =$ constante comme surface S. Les équations ci-dessus sont encore valables pour $q = 2, 3, 4 \ldots$. Seules les équations relatives à $q = 0$ seraient modifiées, on s'en persuade aisément, voir § 5. Les surfaces S seraient encore des surfaces fluides, l'on aurait $e \equiv \eta$ d'où $D = \varrho =$ constante. Il y aurait de nouveau, contradiction à supposer l'astre hétérogène incompressible et le mouvement barotrope, c'est-à-dire à relation $\varrho = \mathfrak{h}(p, t)$.

En résumé, *un astre composé d'un fluide incompressible et dans une certaine région hétérogène ne saurait être animé dans cette région d'un mouvement barotrope au cours des petites vibrations, libres ou contraintes, dans le voisinage de l'état sphérique. Il n'y aurait pas de potentiel des accélérations.* Cette proposition est vraie, même si la densité subit un saut brusque, comme c'est le cas sur la frontière d'un noyau.

3° Si l'astre est composé d'une enveloppe homogène et d'un noyau homogène, le mouvement est barotrope dans chacune des parties, mais la surface de séparation n'est pas d'égale pression, nous l'avons déjà vu. Demandons-nous si les particules restent dans ce cas à pression constante au cours des petites mouvement?

Les surfaces $p(x, y, z, t) =$ constante seraient de nouveau des surfaces fluides; l'on aurait $e \equiv \eta$ et l'astre devrait être entièrement homogène.

Si le noyau est d'une autre densité que l'enveloppe, les particules ne sauraient rester à pression constante au cours des petits mouvements libres ou contraints au voisinage de la sphère.

Si les densités sont égales, deux cas sont à distinguer:

a) Si le noyau est fluide, les particules restent à pression constante et les surfaces de niveau sont des surfaces fluides. Voir l'article précédent, § 8 et 10.

b) Si le noyau est solide, les particules ne restent pas à pression constante, comme nous l'avons constaté au § 22.

Pour un noyau solide et sphérique, il est clair que la densité peut être remplacée par la densité moyenne d'une répartition de la matière en sphères concentriques homogènes.

4° Enfin, envisageons une zone z limitée par deux sphéroïdes d'égale densité et de rayon j' et j'' au repos. Calculons le potentiel créé à l'intérieur du plus petit des deux. En posant $R = j(1 + \varepsilon)$, on trouvera

$$\int \frac{\varrho}{r}\, dz = \text{constante} + 4\pi \sum_{q=2}^{\infty} \frac{\tau^q}{2q+1} \int_{j'}^{j''} \varrho \frac{\partial\, \varepsilon_q j^{2-q}}{\partial j}\, dj.$$

Si les déformations ε_q sont de la forme $j^{q-2} Y_q(\theta, \psi, t)$, les intégrales seront toutes nulles et le potentiel se réduira à une constante. Or, pour un astre entièrement fluide, nous avions précisément

$$\frac{d^2 \eta_q}{dt^2} = -q j^{q-2} Y_q \qquad \text{d'où} \qquad \eta_q = -q j^{q-2} \int_0^t dt \int_0^t Y_q\, dt$$

et la déformation η_q des surfaces fluides est bien de la forme indiquée.

Dans les petits mouvements, libres ou contraints, d'un astre incompressible, formé par un noyau fluide homogène, entouré d'une enveloppe également homogène et fluide, toute zone déterminée par deux surfaces fluides qui, au repos, seraient sphériques, crée une attraction nulle à l'intérieur de la plus petite des deux surfaces. En particulier, *l'attraction de l'enveloppe est nulle en chaque point du noyau.*

Ces propriétés ne seraient pas vraies pour un noyau solide, elles ne seraient pas vraies non plus si l'on remplaçait les surfaces fluides par des surfaces mobiles de niveau (sauf si l'astre est entièrement fluide et homogène), car les déformations e contiennent alors, on l'a vu, un terme en j^{-q-3} qui donnerait un potentiel non constant.

Enfin, *si les densités des deux parties sont différentes, le noyau fluide ne vibrera plus comme si l'enveloppe n'existait pas,* car la pression n'est plus constante sur la surface du noyau.

Remarquons que la précaution prise au sujet du potentiel des accélérations pour l'enveloppe était essentielle si le noyau est solide, mais s'il est liquide, cette précaution était pratiquement inutile, puisque ce potentiel reprend dans ce cas sa forme taylorienne.

On vérifie encore que la discontinuité de la densité sur la frontière du noyau entraîne également une discontinuité pour $\frac{\partial e}{\partial j}$.

§ 25. Résumé

Le procédé uniforme qui s'est montré fécond dans l'étude des figures d'équilibre s'applique encore à la recherche des petites vibrations libres ou contraintes d'une masse fluide dont les particules s'attirent suivant la loi de Newton. Il permet d'exprimer le mouvement dans des hypothèses très générales sans exclure l'attraction des intumescences liquides ou l'action de corps perturbateurs.

Ce procédé fournit un système d'équations convenant au cas d'un astre composé de deux fluides chimiquement homogènes, compressibles ou incompressibles. Dans le cas de l'incompressibilité le système peut être résolu. Descendant ensuite du général au particulier plusieurs problèmes spéciaux ont pu être traités.

1° Celui d'une enveloppe fluide entourant un noyau solide, c'est le problème classique des marées océaniques tel qu'on l'a envisagé de Laplace à lord Kelvin.

2° Le cas d'un noyau formé par un fluide parfait. Problème nouveau à notre connaissance. Rappelons cependant que G. H. Darwin [10]) et Poincaré [11]) ont envisagé le cas d'un noyau élastique et celui d'un noyau très visqueux.

3° Le cas intéressant surtout au point de vue mathématique d'un noyau animé d'un mouvement donné qui conserve sa masse et son centre de gravité. Nos équations permettent de trouver le mouvement de l'enveloppe et d'étudier notamment les effets de résonnances.

4° Le cas pratiquement intéressant où les écarts de la surface libre et de la surface du noyau seraient liés par une relation donnée. Cette dernière pourrait exprimer le rapport entre la marée océanique et la marée terrestre.

5° Le cas d'un astre entièrement homogène qui a fait l'objet du debut de ce mémoire [12]).

Pour l'intelligence de nos résultats fixons bien le sens des termes suivants :

Nous appelons *surface fluide* le lieu, mobile avec le temps, des particules qui dans l'état d'équilibre stable occupent une sphère centrée au centre de gravité.

Nous appelons *surface mobile d'égale pression* le lieu des points en lesquels la pression à constamment la même valeur. Le procédé uniforme a sur les autres méthodes de résolution de ce genre de problème, l'avantage de donner, non seulement le mouvement de la surface libre, mais encore le mouvement de toutes les surfaees fluides et de toutes les surfaces d'égale pression. Voici, maintenant, les résultats principaux:

Cas général des fluides incompressibles. — 1. Le mouvement est entièrement déterminé à partir de la position initiale et des vitesses radiales initiales des particules de la surface libre.

2. Il y a toujours une infinité de vibrations propres qui correspondent aux diverses fonctions sphériques. Les fréquences sont indépendantes des dimensions absolues de l'astre.

3. Les déformations des surfaces fluides comme celle des surfaces d'égale pression sont des fonctions rationnelles du rayon moyen de ces surfaces.

Cas d'un noyau liquide. — 4. Les fréquences sont les mêmes pour le noyau et pour l'enveloppe, mais elles diffèrent de celles déterminées par lord Kelvin pour un noyau solide.

---

10) Phil. Trans., part I, 1879, p. 1.
11) Théorie des marées, p. 431.
12) Commentarii M. H., V. 3, p. 183.

5. Les déformations des surfaces fluides rapportées aux rayons sont plus faibles pour le noyau que pour l'enveloppe, sauf pour la vibration de la plus longue période. Pour cette dernière, les surfaces fluides sont des ellipsoïdes homothétiques.

6. Toutes les fréquences sont stationnaires pour une profondeur nulle de l'enveloppe.

7. La valeur asymtotique des fréquences qui s'exprime au moyen de la densité moyenne de l'astre entier est la même que si la masse était entièrement homogène.

Autres résultats. — 8. Si le noyau est d'une autre densité que l'enveloppe, les particules ne sauraient rester à pression constante.

9. Si le noyau et l'enveloppe ont même densité les particules restent à pression constante pour un noyau liquide mais pas pour un noyau solide.

10. Pour un noyau liquide l'attraction de l'enveloppe est toujours nulle en chaque point du noyau. Il n'en est pas de même pour un noyau solide.

11. Si le noyau fluide et l'enveloppe ont même densité, le noyau vibre comme si l'enveloppe n'existait pas. Si les densités sont différentes il n'en est plus ainsi.

12. Dans une région d hétérogénéité le mouvement n'est pas barotrope.

13. Les propositions précédentes sont vraies même s'il y a des corps étrangers qui perturbent le mouvement de l'astre envisagé.

(Reçu le 20 janvier 1932)