Suites récurrentes de cercles et de sphères.

Autor(en): **Kollros, L.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **4 (1932)**

PDF erstellt am: **29.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-5611

Suites récurrentes de cercles et de sphères

Par L. KOLLROS, Zurich

Steiner a énoncé (Oeuvres complètes, tome I, p. 160, 225, 456) les théorèmes suivants, dont on n'a trouvé aucune démonstration dans ses manuscrits:

I. On donne un plan P et une sphère s de rayon r, dont le centre est à la distance h du plan. Soit s_1 une deuxième sphère quelconque tangente à la première et au plan P. On construit une suite de sphères: $x_1, x_2, x_3, \ldots$ tangentes aux deux sphères s, s_1 et au plan P et dont chacune touche la précédente extérieurement, la première x_1 est arbitraire. Il est possible que la suite se ferme, que la n^{me} sphère x_n soit tangente à la première x_1; cette circonstance ne dépend que du rapport $h:r$, mais pas de la position des sphères s_1 et x_1. La condition est $h = 5r$, si $n = 3$; $h = 3r$, si $n = 4$; $h = r$, si $n = 6$.

II. Soient S, s deux sphères non concentriques, que, pour fixer les idées, nous supposons d'abord intérieures l'une à l'autre; s_1 une troisième sphère quelconque tangente à S et s. On considère une suite de sphères $x_1, x_2, x_3, \ldots$ dont la première est simplement assujettie à toucher à la fois les trois sphères S, s, s_1; chacune des autres x_i devra toucher S, s, s_1 et la sphère x_{i-1} qui la précède dans la suite. Alors, de deux choses l'une: ou bien la suite de ces sphères x se prolonge indéfiniment (suite incommensurable), ou bien, après u révolutions autour de la sphère s_1, on rencontre une dernière sphère x_n touchant la première x_1 (suite commensurable); il s'agit de prouver:

1) que ces circonstances ne dépendent pas des positions arbitraires de s_1 et x_1, mais uniquement des rayons R, r des deux sphères données S, s et de la distance d de leurs centres;

2) qu'on aura, pour les suites commensurables, la relation:

$$(R \pm r)^2 \mp 16 Rr \,.\, \sin^2 \frac{u\pi}{n} = d^2,$$

les signes inférieurs répondant au cas où les sphères données S, s sont extérieures l'une à l'autre.

III. Etant donnés dans le plan deux cercles fixes C et c (c intérieur à C), on trace un premier cercle quelconque x_1 tangent à C et c;

un deuxième cercle x_2 tangent à x_1, C et c; un troisième cercle x_3 tangent à x_2, C et c, etc... Si le système de ces cercles se ferme une fois par un cercle x_n tangent à x_{n-1} et x_1, il se fermera toujours et par le même nombre de cercles, quel que soit le cercle initial x_1; il existe alors entre les rayons R et r des deux cercles fixes et la distance d de leurs centres, la relation:

$$(R-r)^2 - 4Rr \,.\, \mathrm{tg}^2 \frac{u\pi}{n} = d^2$$

où u indique le nombre de révolutions autour du cercle c. Si les cercles C et c sont extérieurs, les deux signes — de la relation doivent être remplacés par $+$ (on change le signe de l'un des rayons).

Pour des cercles tracés sur une sphère, la suite des cercles x est commensurable si l'on a la relation:

$$\cos (R \mp r) \pm 2 \sin R \sin r \,\mathrm{tg}^2 \frac{u\pi}{n} = \cos d.$$

Des démonstrations de ces théorèmes ont été trouvées par *Clausen* (Crelle, tomes 6, 7 et 11); Ostwalds Klassiker, Nr. 123, p. 112 à 123, et par *Bützberger* (Ueber bizentrische Polygone, Steinersche Kreis- und Kugelreihen: Teubner 1914; p. 33 à 48).

Mais on peut arriver aux résultats de Steiner beaucoup plus simplement.

Soient O et o les centres des deux cercles C et c du théorème III, E un de leurs points communs, réels ou imaginaires, $\varphi = OEo$ l'angle des deux cercles; on aura: $d^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi$;

$$\cos \varphi = \frac{R^2 + r^2 - d^2}{2Rr}$$

est un invariant I de l'inversion (qui conserve les angles et les cercles).

Or, deux cercles non sécants C et c peuvent toujours se transformer en deux cercles concentriques par une inversion; il suffit de prendre comme centre d'inversion un des deux points A, B: cercles de rayon nul du faisceau (C, c); tous les cercles de ce faisceau sont coupés orthogonalement par les cercles passant par A et B; et comme ces derniers cercles se transforment en un faisceau de droites, les premiers cercles (C, c) se transforment en cercles concentriques. Soient R' et r' leurs rayons. La condition de commensurabilité de la série des cercles x' tangents à deux cercles concentriques est:

$$\frac{R'-r'}{R'+r'}=\sin\frac{u\pi}{n};$$

l'invariant I est maintenant ($d=O$):

$$\frac{R'^2+r'^2}{2R'r'}=2\,\mathrm{tg}^2\frac{u\pi}{n}+1.$$

Il a la même valeur pour les deux cercles non concentriques C et c; donc:

$$\frac{R^2+r^2-d^2}{2Rr}=2\,\mathrm{tg}^2\frac{u\pi}{n}+1 \quad \text{ou} \quad \underline{(R-r)^2-4Rr\ \mathrm{tg}^2\frac{u\pi}{n}=d^2.}$$

Sur la sphère, on a: $\cos d=\cos R\ \cos r+\sin R\ \sin r\ \cos\varphi$; l'invariant $\cos\varphi=\dfrac{\cos d-\cos R\ \cos r}{\sin R\ \sin r}$ est encore égal à $2\,\mathrm{tg}^2\dfrac{u\pi}{n}+1$; les cercles, les angles, les nombres u et n sont conservés par une projection stéréographique. On a donc sur la sphère (ou en géométrie de Riemann), la condition de commensurabilité de la suite des cercles x_i:

$$\underline{\cos(R-r)+2\sin R\ \sin r\ \mathrm{tg}^2\frac{u\pi}{n}=\cos d.}$$

On aurait une relation analogue en géométrie hyperbolique:

$$ch\,(R-r)-2\,shR\ shr\ \mathrm{tg}^2\frac{u\pi}{n}=chd.$$

[Je dois à M. Weyl la remarque suivante:
Si $x_1:x_2:x_3:x_4=x:y:1:x^2+y^2$ sont les coordonnées homogènes d'un cercle dans le plan euclidien, coordonnées liées par la relation $Q(x)=x_1^2+x_2^2-x_3x_4=0$, l'équation du cercle sera:

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=0.$$

Soit $A(a)=a_1^2+a_2^2-4a_3a_4$ la forme adjointe de Q,

$A(a,b)=a_1b_1+a_2b_2-2(a_3b_4+a_4b_3)$ la forme polaire correspondante, l'invariant I de deux cercles $C(a)$ et $c(b)$ est: $\dfrac{A(a,b)}{\sqrt{A(a)\,.\,A(b)}}$. Prenons le centre O du cercle C comme origine d'un système de coordonnées rectangulaires et le centre o du cercle c sur l'axe Ox, les coordonnées homogènes des deux cercles seront $(o, o, -R^2, 1)$ et $(-2d, o, d^2-r^2, 1)$; on a alors:

$$A(a) = 4R^2;\quad A(b) = 4r^2;\quad A(a, b) = 2(R^2 + r^2 - d^2);$$

l'invariant I est égal à $\frac{R^2 + r^2 - d^2}{2Rr}$].

Pour démontrer le théorème II, on transforme aussi les deux sphères données S et s par une inversion en sphères S' et s' de même centre O et de rayons R' ct r'. Soient s_1' unc troisième sphère (de centre M) tangente à S' et s', et x_1' la première sphère (de centre N) de la suite récurrente. Les rayons des sphères s_1' et x_1' sont égaux à $\frac{R'-r'}{2}$. Les centres de toutes les sphères x_i' sont sur un cercle de rayon $\rho = ON \sin 2\alpha$, où α est l'angle MOT et T le point de contact des sphères s_1' et x_1; or $\sin\alpha = \frac{MT}{OM} = \frac{R'-r'}{R'+r'}$; $\sin 2\alpha = \frac{4\sqrt{R'r'}(R'-r')}{(R'+r')^2}$ et $ON = \frac{R'+r'}{2}$; donc

$$\rho = \frac{2\sqrt{R'r'}(R'-r')}{R'+r'}.$$

La condition de commensurabilité de la suite $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ est:

$\sin\frac{u\pi}{n} = \frac{R'-r'}{2\rho} = \frac{R'+r'}{4\sqrt{R'r'}}$; il en résulte que l'invariant I ou

$$\frac{R'^2 + r'^2}{2R'r'} = 8\sin^2\frac{u\pi}{n} - 1.$$

Il a encore la même valeur pour les deux sphères non concentriques S et s, de rayons R et r; on a donc:

$$\frac{R^2 + r^2 - d^2}{2Rr} = 8\sin^2\frac{u\pi}{n} - 1,$$

d'où la condition de Steiner:

$$(R + r)^2 - 16\,Rr\sin^2\frac{u\pi}{n} = d^2.$$

Pour $u = 1$, $n = 3$ et 4, on trouve des théorèmes énoncés spécialement par Steiner (Oeuvres, t. I, p. 160, th. 7 et 8).

Le théorème I est le cas particulier de II où $R = \infty$. Ecrivons $R = d + h$; l'invariant:

$\frac{2dh + h^2 + r^2}{2dr + 2hr}$ devient, pour $d = \infty$, égal à $\frac{h}{r}$.

On a donc $\frac{h}{r} = 8 \sin^2 \frac{u\pi}{n} - 1$.

Pour $u = 1$, et $n = 3$, 4 ou 6, on trouve les résultats de Steiner: $\frac{h}{r} = 5$, 3 ou 1.

(Reçu le 25 janvier 1932)