Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 4 (1932)

Artikel: Sur quelques solutions des équations cosmologiques de la gravitation (suite).

Autor: Juvet, G.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-5612

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 06.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Sur quelques solutions des équations cosmologiques de la gravitation (suite)

par G. JUVET, Lausanne

1. Dans un mémoire récent des Commentarii Mathematici Helvetici (Vol. 3, p. 151—172), j'ai fait remarquer, entre autres choses, que rien ne s'oppose à la formation de solutions discontinues des équations cosmologiques de la gravitation. J'ai donné de brèves indications sur une solution discontinue statique du type d'Einstein S_E et de vagues suggestions sur une solution discontinue non-statique du type de Lemaître S_L. Je vais les reprendre ici, en conservant à très peu près les notations et les numéros des équations du mémoire cité; je rappelle que dans ces solutions, l'espace se sépare du temps; les discontinuités sont spatiales, c'est-à-dire que c'est en passant d'une région à l'autre de l'espace, que se fait le saut des grandeurs discontinues; en particulier la «constante» λ a une valeur fixe dans chaque région où la solution est continue; cette valeur change d'une région à l'autre.

2. La solution discontinue statique définit un espace applicable sur deux calottes d'hypersphères, séparées par une sphère qui est un «parallèle» de «colatitudes» $u_1 = U_a$, $u_1 = U_b$ pour chacune d'elles, (les colatitudes se comptent à partir des deux pôles de chaque calotte). Il est indiqué de ne pas particulariser l'unité de temps, et dès lors, de considérer deux constantes C_a et C_b pour la vitesse de la lumière dans chaque espace E_a et E_b. En écrivant le ds^2 sous les formes:

$$(S_E)\begin{cases} ds^2 = -R_a^2\, d\sigma^2 + C_a^2\, dt^2 & \text{(pour l'univers } U_a) \\ ds^2 = -R_b^2\, d\sigma^2 + C_b^2\, dt^2 & \text{(pour l'univers } U_b), \end{cases}$$

($d\sigma$ = élément linéaire d'une hypersphère de rayon un), les équations (4) et (5) (où $p = 0$) s'écrivent:

$$\varrho_a = \lambda_a + \frac{3}{R_a^2} \qquad \varrho_b = \lambda_b + \frac{3}{R_b^2}$$

et

$$0 = -\lambda_a - \frac{1}{R_a^2} \qquad 0 = -\lambda_b - \frac{1}{R_b^2},$$

l'équation (3) est identiquement satisfaite, mais il faut remarquer que l'on n'a aucune condition pour déterminer le rapport $\frac{C_a}{C_b}$. La solution S_E n'est donc déterminée qu'à ce rapport près. La «constante» λ a les deux valeurs

$$\lambda_a = -\frac{1}{R_a^2} = -\frac{\varrho_a}{2}, \qquad \lambda_b = -\frac{1}{R_b^2} = -\frac{\varrho_b}{2}.$$

3. La solution discontinue non-statique définit un espace variable qui se dilate homothétiquement, ce qu'un examen rapide ne m'avait pas fait reconnaître (*cf. loc. cit.* § 14); cet espace est applicable sur deux calottes d'hypersphères de rayons variables R_a et R_b séparées par une sphère, qui est un parallèle variable de colatitude *fixe* $u_1 = U_a$, $u_1 = U_b$ pour chacune d'elles. Notre solution a la forme:

$$(S_L)\begin{cases} ds^2 = -R_a^2\, d\sigma^2 + C_a^2\, dt^2 & \text{(pour l'univers } U_a) \\ ds^2 = -R_b^2\, d\sigma^2 + C_b^2\, dt^2 & \text{(pour l'univers } U_b) \end{cases}$$

où R_a et R_b sont des fonctions du temps et C_a et C_b des constantes. On fera encore $p = 0$ et on trouve (éq. (10) et (11) où l'on a écrit R_a et R_b à la place du rapport d'homothétie variable A):

$$\varrho_a = \lambda_a + \frac{3}{R_a^2} + \frac{3\,\dot{R}^2}{R_a^2 C_a^2}, \qquad \varrho_b = \lambda_b + \dots,$$

$$0 = -\lambda_a - \frac{1}{R_a^2} - \frac{2\,R_a \ddot{R}_a + \dot{R}^2}{R_a^2 C_a^2}, \quad 0 = -\lambda_b + \dots,$$

et l'équation de conservation (7) s'écrit

$$\frac{d\varrho_a}{dt} + \frac{3\,\dot{R}_a}{R_a}\varrho_a = 0, \qquad \frac{d\varrho_b}{dt} + \frac{3\,\dot{R}_b}{R_b}\varrho_b = 0.$$

La condition à laquelle doivent satisfaire les rayons R_a, R_b et les colatitudes extrêmes U_a et U_b, pour que les deux portions de solutions puissent être accolées, s'écrit:

$$R_a \sin U_a = R_b \sin U_b$$

d'où:

$$\frac{R_a}{R_b} = \text{constante} = \mu$$

On trouve ensuite sans difficultés (*loc. cit.* p. 169, 14e ligne):

$$dt = \frac{1}{C_a}\sqrt{\frac{-R_a}{\frac{\lambda_a R_a^3}{3} + R_a + \alpha}}\, dR_a =$$

$$= \frac{1}{C_b}\sqrt{\frac{-R_b}{\frac{\lambda_b R_b^3}{3} + R_b + \beta}}\, dR_b. \qquad (\alpha \text{ et } \beta, \text{ const.})$$

On tire de là, puisque $\frac{dR_a}{dR_b} = \mu$:

$$\frac{\mu^2 C_b^2}{C_a^2} = \frac{\frac{\mu^3 \lambda_a R_b^3}{3} + \mu R_b + \alpha}{\mu\left(\frac{\lambda_b R_b^3}{3} + R_b + \beta\right)}.$$

Cette équation qui doit être vérifiée pour toutes les valeurs que R_b prend au cours du temps, doit être une identité; par suite:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\mu^3 C_b^2}{C_a^2}, \quad 1 = \frac{\mu^2 C_b^2}{C_a^2}, \quad \frac{\lambda_a}{\lambda_b} = \frac{C_b^2}{C_a^2}.$$

Si on connaît la portion U_b de l'univers, la portion U_a s'en déduit bien aisément après qu'on a fixé le rapport μ des rayons:

$$C_a = \mu C_b$$
$$\lambda_a = \frac{\lambda_b}{\mu^2}$$
$$\alpha = \mu \beta$$

mais:

$$\varrho_a = -\frac{3\alpha}{R_a^3} \qquad \text{et} \qquad \varrho_b = -\frac{3\beta}{R_b^3};$$

donc α et β peuvent se calculer en fonction des masses de chaque espace E_a et E_b, μ est donc un nombre qui dépend du rapport de ces masses.

4. Dans notre solution S_L, le rapport des vitesses C_a et C_b est déterminé; si l'on considère la solution S_E comme un cas limite de S_L on peut prendre la relation $C_a = \mu C_b$ ou $C_a = \frac{R_a C_b}{R_b}$, pour définir le rapport $\frac{C_a}{C_b}$ qui est resté indéterminé.

5. Il est évident que nous n'avons pas à borner à deux le nombre des «morceaux» de solution; on peut en prendre autant qu'on veut, car les équations de la gravitation ne dépendent pas des limites, ni surtout du choix des pôles à partir desquels on compte les colatitudes.

Nous reprendrons cette question dans un mémoire plus détaillé où nous étudierons les applications à l'astronomie; il semble qu'il soit possible d'en tirer une explication de la petitesse des nébuleuses spirales relativement à notre galaxie (*cf.* Shapley, Stars Clusters, New-York, 1930, *passim*).

(Reçu le 25 janvier 1932)