

# Sur la représentation conforme des aires triplement connexes.

Autor(en): **Julia, Gaston**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **4 (1932)**

PDF erstellt am: **28.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-5613>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Sur la représentation conforme des aires triplement connexes

par GASTON JULIA, Paris.

1. — Le présent mémoire fait suite au mémoire<sup>1)</sup> paru en décembre 1931 dans les «Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa», Série II, vol. I, pages 113—138) et traite le cas le plus simple après celui qui fut traité dans le chapitre II du mémoire précédent. La présente étude me servira pour l'étude du cas général qui sera faite dans un mémoire ultérieur.

$\mathfrak{A}$  étant une aire triplement connexe du plan  $z$  limitée par un contour extérieur  $C_0$  et 2 contours intérieurs  $C_1$  et  $C_2$  qu'on peut supposer analytiques sans restreindre la généralité, considérons, après M. de la Vallée Poussin, la fonction  $F(z) = e^{U+iV}$ , holomorphe et uniforme dans  $\mathfrak{A}$  ayant les propriétés suivantes:<sup>2)</sup>

$U = \log |F|$  prend sur  $C_0, C_1, C_2$  des valeurs constantes  $\lambda_0 = 0, \lambda_1, \lambda_2$ ;  $V$  admet sur  $C_0, C_1, C_2$  les périodes  $(2 \cdot 2\pi), (-2\pi), (-2\pi)$ , lorsque  $C_0, C_1, C_2$  sont décrits dans le sens positif par rapport à  $\mathfrak{A}$ .

On sait que,  $\lambda_0$  étant nul,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont négatifs. Mais rien n'empêche à priori  $\lambda_1$  d'être égal à  $\lambda_2$ . J'ai aussi démontré (J. I N<sup>os</sup> 6—13, Chapitre 1) que,  $j$  étant le nombre des zéros simples de  $F'$  intérieurs à  $\mathfrak{A}$ , et  $f$  le nombre de ces zéros situés sur la frontière, on a  $2j + f = 2p - 2$  s'il y a  $p$  contours intérieurs. Ici,  $p = 2$ , donc

$$2j + f = 2$$

ce qui exige: ou bien  $j = 1, f = 0$

ou bien  $j = 0, f = 2$ .

Le I<sup>o</sup> cas est un cas particulier du cas traité au chapitre II du mémoire (J. I).

---

1) Nous désignerons ce mémoire par J. I. Pour compléter la bibliographie du sujet donnée dans l'introduction du mémoire J. I, citons un intéressant petit mémoire de M. E. Picard où se trouve bien mise en lumière la façon d'envisager les 2 faces d'un disque à  $p$  trous comme une surface de Riemann générale pour la classe de courbes algébriques de M. Schottky (voir E. Picard, Annales de l'École Normale Supérieure 1913: Sur la représentation conforme des aires multiplement connexes).

2) Voir J. I n<sup>o</sup> 2.

Le 2° cas fait l'objet du présent mémoire. Il y aura donc 2 zéros simples de  $F'$  ou un zéro double sur la frontière de  $\mathfrak{A}$ .

Mais on sait (J. I N° 4) qu'aucun de ces points ne peut se trouver sur  $C_0$  ou sur la  $C_K$  ( $K = 1$  ou  $2$ ) qui correspond au plus petit des nombres  $\lambda_1, \lambda_2$ .

Il en résulte que, dans le cas présent,  $\lambda_1$  ne peut être égal à  $\lambda_2$ . Nous devons donc supposer  $0 > \lambda_1 > \lambda_2$ , en mettant l'indice 2 au contour intérieur sur lequel  $U$  est minimum absolu. Notre hypothèse est alors que  $F'$  possède 2 zéros simples ou un zéro double sur  $C_1$ . Nous poursuivons l'analyse, de laquelle en particulier résultera que l'hypothèse précédente n'est pas vide et qu'il y a effectivement des  $\mathfrak{A}$  répondant à ces hypothèses.

### § 1. $F'$ a deux zéros simples sur $C_1$

2. — En un zéro simple de  $F'$ , qui est donc zéro simple de  $f'(z) = \frac{d}{dz}(U + iV)$ , toutes les dérivées partielles premières de  $U$  et  $V$  s'annulent. Donc  $\frac{dU}{dn} = 0$  et  $\frac{dV}{ds} = 0$ ,  $n$  étant la normale à  $C_1$  intérieure à  $\mathfrak{A}$  et  $s$  l'abscisse curviligne sur  $C_1$  ( $C_1$  est supposée orientée dans le sens positif par rapport à l'aire  $\mathfrak{A}$ : ce sens positif est donc celui des aiguilles d'une montre).

Nous appellerons  $\underline{a}$  et  $\underline{b}$  les zéros de  $F'$ . Au voisinage d'un tel zéro,  $\underline{a}$ , par exemple, la courbe  $U = \lambda_1$  comprend un arc de  $C_1$  et un arc orthogonal tous deux analytiques; la courbe  $V = V(a)$  comprend également 2 arcs analytiques orthogonaux en  $\underline{a}$  qui bissectent les premiers; dans l'un des couples d'angles opposés par le sommet que ces deux arcs déterminent on aura  $V > V(a)$  et dans l'autre  $V < V(a)$  au voisinage de  $\underline{a}$ ; au passage par  $\underline{a}$ , lorsque  $z$  décrit  $C_1$ , et suivant que  $C_1$  bissecte l'un ou l'autre des angles précédents,  $V$  passe par un minimum ou un maximum.

$\frac{dV}{ds}$  s'annule en changeant de signe au passage par  $\underline{a}$  et par  $\underline{b}$ . Or, on a,

$$\frac{dU}{ds} = \frac{dV}{dn} \quad \text{et} \quad \frac{dU}{dn} = -\frac{dV}{ds}.$$

Par suite  $\frac{dU}{dn}$ , sur  $C_1$ , change de signe en s'annulant au passage par  $\underline{a}$  et  $\underline{b}$ . Les points  $\underline{a}$  et  $\underline{b}$  délimitent donc sur  $C_1$  deux arcs; sur l'un

$\frac{dU}{dn} = -\frac{dV}{ds} > 0$ , sur l'autre  $\frac{dU}{dn} = -\frac{dV}{ds} < 0$ . Lorsqu'on parcourt ce dernier arc, que nous appellerons  $\widehat{ab}$ , dans le sens positif de  $C_1$ , nous supposons que  $\underline{a}$  est son origine et  $\underline{b}$  son extrémité, en sorte que l'arc  $\widehat{ba}$  signifiera l'arc de  $C_1$  sur lequel  $\frac{dU}{dn} > 0$ . On a vu (dans J. 1.) que, sur  $C_0$ ,  $\frac{dU}{dn} < 0$   $\frac{dV}{ds} > 0$  partout, et sur  $C_2$ ,  $\frac{dU}{dn} > 0$ ,  $\frac{dV}{ds} < 0$  partout.

3. — Nous considérons la surface de Riemann  $\sigma$ , élément canonique du problème, introduite en toute généralité dans le mémoire précédent (J. 1, chapitre I). Elle est décrite par  $\zeta = F(z)$  lorsque  $z$  décrit  $\mathfrak{A}$ . Elle admet 1° pour *frontière extérieure* le cercle  $\gamma_0$ , de centre  $o$ , de rayon 1, décrit 2 fois de suite dans le sens trigonométrique ( $V$ , croissant sur  $C_0$ , possède en effet la période  $(2 \cdot 2\pi)$  sur  $C_0$ ). 2° pour *frontières intérieures* les 2 courbes  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  qui correspondent à  $C_1$  et  $C_2$ .

Evidemment  $\gamma_2$  est un cercle de centre  $o$  de rayon  $e^{\lambda_2}$  décrit dans le sens des aiguilles d'une montre. Quant à  $\gamma_1$ , c'est ce que j'ai appelé une *courbe circulaire*, se projetant sur le plan  $\zeta$  suivant un cercle, de centre  $o$ , de rayon  $e^{\lambda_1}$ , composée d'un arc  $\widehat{\beta\alpha}$  que nous appelons *arc direct*, d'ouverture comprise entre  $2\pi$  et  $4\pi$ , décrit dans le sens des aiguilles d'une montre (arc correspondant à l'arc  $\widehat{ba}$  de  $C_1$  sur lequel  $\frac{dU}{dn} > 0$   $\frac{dV}{ds} < 0$ ), suivi d'un arc  $\widehat{\alpha\beta}$  décrit dans le sens trigonométrique et que nous appelons *arc de rebroussement*; on verra ultérieurement que cet arc  $\widehat{\alpha\beta}$ , correspondant à l'arc  $\widehat{ab}$  de  $C_1$  sur lequel  $\frac{dU}{dn} < 0$ ,  $\frac{dV}{ds} > 0$ , est d'ouverture inférieure à  $2\pi$ . La courbe  $\gamma_1$  présente deux points de rebroussement (avec superposition des arcs afférents) aux points  $\alpha = F(a)$ ,  $\beta = F(b)$  (voir J. 1, N° 4).

Entre les deux courbes  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$ , se projettent 2 feuillets de  $\sigma$ , entre  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  un seul feuillet; à l'intérieur de  $\gamma_2$  et à l'extérieur de  $\gamma_0$  il n'y a aucun feuillet de  $\sigma$ ; ceci exprime que l'équation  $F(z) = \zeta$  admet dans  $\mathfrak{A}$  2 racines distinctes si  $e^{\lambda_1} < |\zeta| < 1$ , une seule si  $e^{\lambda_2} < |\zeta| < e^{\lambda_1}$ , et aucune racine si  $|\zeta| > 1$ , ou  $|\zeta| < e^{\lambda_2}$  (voir J. 1, N° 5). Ces feuillets sont simples et sans points de ramification intérieurs à  $\sigma$ . Lorsqu'on décrit  $\gamma_0$  dans le sens positif (correspondant à celui de  $C_0$ ) à partir d'un point du 1° feuillet, on passe du 1° feuillet sur le 2° feuillet après une rotation de  $2\pi$  (c'est-à-dire lorsque  $V$  a augmenté de  $2\pi$ , puis, après une deuxième rotation de  $2\pi$  (c'est-à-dire lorsque  $V$  a augmenté au total de



4 $\pi$ ) on revient au point initial sur le 1<sup>o</sup> feuillet. Ceci implique l'existence d'une ligne de croisement entre le 1<sup>o</sup> et le 2<sup>o</sup> feuillet dont nous examinerons ultérieurement la position. Notons maintenant que le voisinage entier de  $\alpha$  excepté l'arc de rebroussement  $\widehat{\alpha\beta}$  de  $\gamma_1$  appartient à  $\sigma$ : ce voisinage correspond au voisinage, intérieur à  $\mathfrak{A}$ , du point  $\alpha$  lui-même. Même conclusion pour le voisinage de  $\beta$  excepté l'arc de rebroussement  $\widehat{\beta\alpha}$  précédent.

Notons enfin qu'au voisinage de ses frontières  $\sigma$  est: 1<sup>o</sup> par rapport à  $\gamma_0$  du côté des  $U$  ou des  $|\zeta|$  décroissants; 2<sup>o</sup> par rapport à l'arc direct  $\widehat{\beta\alpha}$  de  $\gamma_1$ , correspondant à l'arc  $\widehat{ba}$  de  $C_1$  sur lequel  $\frac{dU}{dn} > 0$ , du côté des  $U$  croissants, c'est-à-dire des  $|\zeta|$  croissants; 3<sup>o</sup> par rapport à l'arc de rebroussement  $\widehat{\alpha\beta}$  de  $\gamma_1$ , correspondant à l'arc  $\widehat{ab}$  de  $C_1$  sur lequel  $\frac{dU}{dn} < 0$ , du côté des  $U$  ou des  $|\zeta|$  décroissants; 4<sup>o</sup> par rapport à  $\gamma_2$  du côté des  $U$  ou des  $|\zeta|$  croissants.

4. — La fonction  $z = \varphi(\zeta)$  inverse de  $\zeta = F(z)$  est une fonction holomorphe et uniforme du point  $\zeta$  qui décrit  $\sigma$ , mais ce n'est pas une fonction uniforme de la variable complexe  $\zeta$  représentant l'affixe de la projection sur le plan  $\zeta$  du point  $\zeta$  porté par  $\sigma$ . Lorsque  $\zeta$  se projette entre  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$ , la fonction  $\varphi(\zeta)$  de la variable  $\zeta$  a 2 déterminations distinctes qui sont les 2 racines de  $F(z) = \zeta$ . Comme les seuls zéros de  $F'$  sont  $\underline{a}$  et  $\underline{b}$ , auxquels correspondent  $\alpha = F(\underline{a})$  et  $\beta = F(\underline{b})$  du plan  $\zeta$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  étant sur  $\gamma_1$ , on voit qu'en tout point de l'anneau  $e^{\lambda_1} < |\zeta| < 1$ , chacune des déterminations précédentes est holomorphe; chacune de ces déterminations figure la valeur de  $\varphi(\zeta)$  sur chacun des 2 feuillets de  $\sigma$  projetés entre  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$ . Lorsque  $\zeta$  partant de  $\zeta_0$  y revient après avoir décrit un tour autour de 0 dans l'anneau précédent, on passe par continuité de l'un à l'autre feuillet, c'est-à-dire de l'une à l'autre des 2 déterminations de  $\varphi(\zeta)$ , et au bout de 2 tours tels que le précédent on retrouve la détermination initiale. Cela résulte de ce que le chemin en question peut se ramener à un segment de rayon allant de  $\zeta_0$  au cercle unité en  $\zeta'_0$ , suivi du cercle unité décrit une fois de  $\zeta'_0$  à  $\zeta'_0$ , suivi enfin du segment de rayon  $\zeta'_0 \zeta_0$ , et l'on a vu qu'un tour sur le cercle unité faisait passer de l'une à l'autre des 2 déterminations de  $\varphi(\zeta)$ .

Les  $C_i$  ayant été supposés analytiques,  $F(z)$  est holomorphe sur les  $C_i$ , donc  $\varphi(\zeta)$ , fonction du point  $\zeta$  de  $\sigma$  est holomorphe sur les frontières  $\gamma_i$  de  $\sigma$  ( $i = 0, 1, 2$ ). Lorsque les  $C_i$  sont des courbes simples de Jordan,  $F(z)$  est continue sur les  $C_i$  et  $z = \varphi(\zeta)$  est continue sur les

$\gamma_i$ . Dans ce qui précède, nous avons vu que  $\varphi(\zeta)$  est holomorphe en  $\zeta$  en tout point de l'anneau  $e^{\lambda_1} < |\zeta| < 1$  et y possède 2 déterminations se permutant par une rotation autour de 0. Un raisonnement analogue montre que, dans l'anneau  $e^{\lambda_2} < |\zeta| < e^{\lambda_1}$ ,  $\varphi(\zeta)$  est holomorphe en chaque point et n'a qu'une détermination, elle est donc uniforme.

5. — Qu'arrive-t-il lorsque  $\zeta$  tend vers un des cercles

$$|\zeta| = e^{\lambda_0}, e^{\lambda_1} \text{ ou } e^{\lambda_2} ?$$

D'abord, si  $\zeta$  tend vers un point  $\zeta_0$  du cercle  $|\zeta| = e^{\lambda_0} = 1$ , chacune des déterminations de  $\varphi(\zeta)$  a une limite et tend vers un point déterminé de  $C_0$ ;  $\zeta_0$  est la projection de 2 points  $\zeta_0'$  et  $\zeta_0''$  de  $\gamma_0$  auxquels correspondent, sur  $C_0$ , 2 points  $z_0'$  et  $z_0''$  (racines de  $F(z) = \zeta_0$ ) qui sont les valeurs limites des 2 déterminations de  $\varphi(\zeta)$  lorsque  $\zeta$  tend vers  $\zeta_0$ .  $\varphi(\zeta)$  est d'ailleurs holomorphe en  $\zeta_0'$  et  $\zeta_0''$ , en sorte que chacune des déterminations de  $\varphi(\zeta)$  reste holomorphe en  $\zeta_0$  et y acquiert une valeur,  $z_0'$  ou  $z_0''$ , située sur  $C_0$  et racine de  $F(z) = \zeta_0$ .

Lorsque  $\zeta$  tend vers un point  $\zeta_0$  de  $|\zeta| = e^{\lambda_2}$  aucune difficulté,  $\varphi(\zeta)$  uniforme a une limite  $z_0$ , racine de  $F(z) = \zeta_0$ , et  $\varphi(\zeta)$  reste holomorphe en  $\zeta_0$ , le point  $z_0$  appartient d'ailleurs à  $C_2$ .

Lorsque  $\zeta$  tend vers un point  $\zeta_0$  de  $|\zeta| = e^{\lambda_1}$  plusieurs cas sont possibles: nous allons préciser et examiner de plus près la structure de  $\gamma_1$ , frontière de  $\sigma$ , se projetant sur  $|\zeta| = e^{\lambda_1}$ .

6. — Faisons décrire à  $z$  l'arc  $\widehat{ba}$  de  $C_1$ , sur lequel  $\frac{dU}{dn} > 0$ ,  $\frac{dV}{ds} < 0$ ,  $\zeta$  décrit l'arc direct  $\widehat{\beta\alpha}$  de  $\gamma_1$  et  $V$  décroît d'une certaine valeur  $V_\beta$  à une valeur  $V_\alpha$  qui sont des arguments des points  $\beta$  et  $\alpha$ . Il est clair que la variation  $V_\alpha - V_\beta$  est  $< -2\pi$ , puisque la variation totale de  $V$  le long de  $\widehat{ba}$  puis de  $\widehat{ab}$ , c'est-à-dire le long de  $C_1$  tout entière est précisément  $(-2\pi)$ . Il existe donc un point et un seul  $\underline{a'}$  de l'arc  $\widehat{ba}$  où  $V$  acquiert la valeur  $V_\alpha + 2\pi$  et à ce point  $\underline{a'}$  correspond sur  $\gamma_1$  un point  $\underline{\alpha'}$  de l'arc direct  $\widehat{\beta\alpha}$  superposé à  $\alpha$ . Lorsque  $\zeta$  de  $\sigma$  se projette entre  $\gamma_1$  et  $\gamma_0$ , au voisinage de la projection de  $\alpha$  et  $\underline{\alpha'}$ , il lui correspond l'un ou l'autre de deux points distincts dont l'un est voisin de  $\underline{a}$  et l'autre de  $\underline{a'}$  et lorsque  $\zeta$  tend, sur  $\sigma$ , vers  $\underline{a}$  ou vers  $\underline{a'}$ , son correspondant de  $\mathfrak{A}$ ,  $z = \varphi(\zeta)$  tend vers  $\underline{a}$  ou vers  $\underline{a'}$ . Il en résulte, l'équation  $F(z) = \zeta$  n'ayant pour  $e^{\lambda_1} < |\zeta| < 1$  que deux solutions dans  $\mathfrak{A}$ , qu'il

n'y aura pas sur l'arc direct  $\widehat{\beta\alpha}$  d'autre point que  $\alpha'$  superposé à  $\alpha$ , c'est-à-dire que l'ouverture de l'arc  $\widehat{\beta\alpha}$  de  $\gamma_1$ , sera comprise entre  $2\pi$  et  $4\pi$  (bornes exclues) et par suite celle de l'arc  $\widehat{\alpha\beta}$  de rebroussement sera entre 0 et  $2\pi$  (bornes exclues).

7. — Supposons donc  $|\zeta_0| = e^{\lambda_1}$ . 1° Si  $\zeta_0$ , sans être en  $\alpha$  ou  $\beta$ , appartient à la projection de l'arc de rebroussement  $\widehat{\alpha\beta}$  il y a 3 points  $\zeta_0', \zeta_0'', \zeta_0'''$  de  $\gamma_1$  qui lui sont superposés: deux,  $\zeta_0'$  et  $\zeta_0''$  appartiennent à l'arc direct  $\widehat{\beta\alpha}$  correspondant à  $\frac{dU}{dn} > 0$ , et l'autre  $\zeta_0'''$  appartient à l'arc de rebroussement  $\widehat{\alpha\beta}$  correspondant à  $\frac{dU}{dn} < 0$ . A ces 3 points correspondent 3 points distincts  $z_0', z_0'', z_0'''$  situés sur  $C_1$ ,  $z_0'$  et  $z_0''$  étant sur l'arc  $\widehat{ba}$ ,  $z_0'''$  sur l'arc  $\widehat{ab}$ . Lorsque  $\zeta$  tend vers  $\zeta_0$  en restant entre  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$ , les 2 déterminations de  $\varphi(\zeta)$  ont pour limites  $z_0'$  et  $z_0''$  car, l'arc direct  $\widehat{\beta\alpha}$  bordant seul  $\sigma$  du côté des  $U$  décroissants, les deux points de  $\sigma$  dont  $\zeta$  est alors la projection ont pour limites les points  $\zeta_0'$  et  $\zeta_0''$  de l'arc  $\widehat{\beta\alpha}$ ; au contraire, l'arc de rebroussement  $\widehat{\alpha\beta}$  bordant  $\sigma$  du côté des  $U$  croissants,  $\zeta_0'''$  sera la limite du point de  $\sigma$  projeté en  $\zeta$  lorsque  $\zeta$  tendra vers  $\zeta_0$  en restant à l'intérieur du cercle  $|\zeta| = e^{\lambda_1}$ ;  $z_0'''$  sera la valeur de  $\varphi(\zeta)$  au point  $\zeta_0'''$  de  $\sigma$ .  $F(z) = \zeta_0$  a donc ici 3 racines  $z_0', z_0'', z_0'''$  situées sur  $C_1$ . Notons, en passant, que les 2 déterminations de  $\varphi(\zeta)$ , lorsque  $e^{\lambda_1} < |\zeta| < 1$  sont holomorphes en  $\zeta_0$  et y prennent les valeurs  $z_0'$  et  $z_0''$ ; supposées prolongées à l'intérieur de  $|\zeta| = e^{\lambda_1}$ , elles y prennent des valeurs distinctes de la détermination unique de  $\varphi(\zeta)$  définie pour  $e^{\lambda_2} < |\zeta| < e^{\lambda_1}$  par  $F(z) = \zeta$ , laquelle, holomorphe en  $\zeta_0$ , a pour limite, lorsque  $\zeta$  tend vers  $\zeta_0$ , la valeur  $z_0'''$  distincte de  $z_0'$  et  $z_0''$  comme on vient de le voir.

2° Lorsque  $\zeta_0$  est en  $\alpha$  ou  $\beta$  deux des 3 points  $\zeta_0', \zeta_0'', \zeta_0'''$  sont confondus, et par conséquent deux des 3 points  $z_0', z_0'', z_0'''$  sont confondus en  $\underline{a}$  ou  $\underline{b}$ , le troisième étant situé sur l'arc  $\widehat{ba}$ .

3° Si  $\zeta_0$  n'appartient pas à la projection de l'arc de rebroussement  $\widehat{\alpha\beta}$ , il est la projection d'un seul point  $\zeta_0'$  de  $\gamma_1$  auquel correspond un seul point  $z_0'$  de l'arc  $\widehat{ba}$  de  $C_1$  ( $\frac{dU}{dn} > 0$ ) il est aussi la projection d'un point  $\zeta_0''$  intérieur à  $\sigma$ . En effet, lorsque  $\zeta$ , projeté entre  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$ , tendra vers  $\zeta_0$ <sup>3)</sup>, les 2 déterminations de  $\varphi(\zeta)$  auront des limites déterminées dont l'une sera l'affixe du point  $z_0'$  précédent pour lequel on a bien

<sup>3)</sup>  $\zeta$  est, par rapport à  $\zeta_0$ , du côté des  $U$  croissants.

$\frac{dU}{dn} > 0$ ; l'autre, ne pouvant être un point de  $C_1$  pour lequel  $\frac{dU}{dn} > 0$ , sera nécessairement un point  $z_0''$  intérieur à  $\mathfrak{A}$  pour lequel  $F(z_0'') = \zeta_0$ . D'ailleurs, en  $\zeta_0$ , les 2 déterminations de  $\varphi(\zeta)$ , prenant respectivement les valeurs  $\zeta_0'$  et  $\zeta_0''$  sont holomorphes et peuvent se prolonger analytiquement autour de  $\zeta_0$ . Si l'on envisage la détermination unique de  $\varphi(\zeta)$ , lorsque  $e^{\lambda_2} < |\zeta| < e^{\lambda_1}$ , cette détermination a aussi une limite lorsque  $\zeta$ , restant inférieur en module à  $e^{\lambda_1}$ , tend vers  $\zeta_0$  et *cette limite ne peut être différente de  $z_0''$*  puisqu'elle est atteinte pour des valeurs de  $|\zeta|$  inférieures à  $e^{\lambda_1}$ , alors que  $z_0'$  ne peut être atteinte que pour des valeurs de  $|\zeta|$  supérieures à  $e^{\lambda_1}$  ( $\sigma$  est, en effet, au voisinage de  $\zeta_0'$  de  $\gamma_1$ , du côté des  $U$  ou des  $|\zeta|$  croissants par rapport à  $\gamma_1$ ). La détermination de  $\varphi(\zeta)$  qui tend vers  $z_0''$  (intérieur à  $\mathfrak{A}$ ) lorsque  $\zeta$  tend vers  $\zeta_0$  *par valeurs supérieures en module est le prolongement analytique de la détermination unique de  $\varphi(\zeta)$  correspondant aux valeurs de  $\zeta$  inférieures en module à  $|\zeta_0|$ .*

En résumé, l'équation  $F(z) = \zeta_0$  a ici 2 racines  $z_0'$  et  $z_0''$  dont la 1<sup>re</sup> est sur l'arc  $\widehat{ba}$  de  $C_1$  où  $\frac{dU}{dn} > 0$ ; la 2<sup>me</sup>,  $z_0''$ , est un point intérieur de  $\mathfrak{A}$ . Sur la surface de Riemann  $\sigma$ , les points  $\zeta_0' = F(z_0')$  et  $\zeta_0'' = F(z_0'')$  sont: l'un,  $\zeta_0'$ , sur la partie de l'arc direct  $\widehat{\beta\alpha}$  de  $\gamma_1$  non superposée à l'arc de rebroussement  $\widehat{\alpha\beta}$ , l'autre,  $\zeta_0''$ , est intérieur à  $\sigma$ .

8. — Nous reviendrons là-dessus dans la suite et, pour poursuivre l'étude de la structure de  $\mathfrak{A}$  et  $\sigma$  nous démontrerons le théorème fondamental suivant:

**Théorème.** *Tout point  $\zeta_0$  intérieur à  $\sigma$  peut être joint à  $\gamma_0$  par une ligne intérieure à  $\sigma$  sur laquelle  $U$  ne décroît jamais. Cette ligne peut, suivant les cas, consister en un simple rayon  $V = C^{te}$  ou en 2 segments de rayon  $V = C_1$ ,  $V = C_2$  unis par un arc de cercle  $U = C^{te}$ .*

En effet, 1<sup>o</sup> si le point  $\zeta_0$  est projeté entre  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$ , le segment de rayon  $\zeta_0 \zeta_0'$  allant de ce point à  $\gamma_0$  répond à la question.  $U = \log |\zeta|$  croît de  $\zeta_0$  à  $\zeta_0'$ .

2<sup>o</sup> Si le point  $\zeta_0$  est projeté sur  $|\zeta| = e^{\lambda_1}$ , comme c'est un point *intérieur* à  $\sigma$  par hypothèse, c'est nécessairement un point du type 3<sup>o</sup> considéré au N<sup>o</sup> 7, dont la projection n'appartient pas à l'arc de rebroussement  $\widehat{\alpha\beta}$ . La fonction  $\varphi(\zeta)$ , holomorphe en  $\zeta_0$  peut être prolongée analytiquement tout le long du rayon  $\zeta_0 \zeta_0'$  vers les  $|\zeta|$  croissants, jusqu'au cercle  $|\zeta| = 1$ : *Ce segment de rayon  $\zeta_0 \zeta_0'$  unit  $\zeta_0$  à  $\gamma_0$  et répond à la question.*

3° Il en est évidemment de même qu'au 2° si  $\zeta_0$ , se projetant entre  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , le rayon  $o\zeta_0$  prolongé ne rencontre pas l'arc de rebroussement  $\widehat{\alpha\beta}$ , alors le segment de rayon allant de  $\zeta_0$  à  $\zeta_0'$  ( $|\zeta_0'| = 1$ ) sur  $\gamma_0$  répond à la question. Tout le long de ce segment  $\varphi(\zeta)$  se prolonge analytiquement, reste holomorphe, et  $U = \log |\zeta|$  croît.

4° Supposons enfin que le rayon  $o\zeta_0$  rencontre l'arc de rebroussement  $\widehat{\alpha\beta}$  en  $\zeta_0''$ .  $\varphi(\zeta)$  pourra évidemment être prolongé analytiquement le long du segment  $\zeta_0 \zeta_0''$ ,  $|\zeta| = e^U$  allant en croissant depuis  $\zeta_0$  jusqu'à  $\zeta_0''$ . L'on aborde la frontière  $\gamma_1$  en  $\zeta_0''$  sur l'arc  $\widehat{\alpha\beta}$  par rapport auquel, on le sait,  $\sigma$  est du côté des  $U$  décroissants. On suit alors l'arc  $\widehat{\alpha\beta}$  depuis  $\zeta_0''$  jusqu'en un des points  $\alpha$  ou  $\beta$ , par exemple jusqu'en  $\beta$ , de manière que  $V$  aille en croissant; enfin, à partir de  $\beta$ , on suit un rayon  $\beta\zeta_0'$  jusqu'à la rencontre avec  $\gamma_0$ <sup>4</sup>).

On peut, si l'on veut rester à l'intérieur de  $\sigma$ , éviter  $\beta$  en arrêtant le segment du rayon  $\zeta_0 \zeta_0''$  un peu avant d'atteindre en  $\zeta_0''$  l'arc  $\widehat{\alpha\beta}$ , puis en suivant un arc de cercle de rayon un peu inférieur à  $e^{\lambda_1}$  jusqu'à un point  $\zeta_0'''$  tel que  $o\zeta_0'''$  prolongé ne rencontre plus l'arc  $\widehat{\alpha\beta}$ , enfin en allant de  $\zeta_0'''$  à  $\zeta_0'$  sur  $\gamma_0$  par un segment de rayon comme en 2°. On a ainsi un chemin formé de 2 segments  $V = C^{te}$ ,  $U$  croissant, réunis par un arc de cercle  $U = C^{te}$ ,  $V$  croissant, et sur lequel  $\zeta$  va de  $\zeta_0$  à  $\gamma_0$ ,  $U = \log |\zeta|$  ne décroissant jamais. Transportant cet énoncé dans le plan  $z$ , on voit que tout point  $z_0$  intérieur à  $\mathfrak{A}$  peut être uni à  $C_0$  par une courbe, formée de 3 arcs analytiques au plus, sur laquelle  $U$  ne décroît pas quand on va de  $z$  à  $C_0$ . Cette courbe peut être: ou bien un arc de courbe  $V(z) = V(z_0)$  analytique, allant de  $z_0$  à  $C_0$ , lorsque sur cet arc  $U$  va toujours en croissant (cas 1° et 2°); ou bien (cas 3°) formée de 2 arcs de courbe  $V(z) = C^{te}$  réunis par un arc de courbe  $U = C^{te}$  lequel peut, à la rigueur, coïncider avec une partie de l'arc  $\widehat{ab}$  de  $C_1$ , [chemin signalé dans la note 4) précédente composé d'un arc  $V(z) = V(z_0)$  jusqu'en  $z_0''$  de l'arc  $\widehat{ab}$ , puis l'arc  $\widehat{z_0''b}$  puis l'arc allant de  $b$  à  $C_0$  de la courbe  $V(z) = V(b)$  et faisant l'angle  $\frac{\pi}{4}$  avec la tangente positive en  $b$  à  $C_1$ ].

9. — Section de  $\sigma$  par le cylindre  $|\zeta| = e^{\lambda_1}$ . Il découpe  $\sigma$  en deux régions, la région  $e^{\lambda_1} < |\zeta| < 1$  et la région  $e^{\lambda_2} < |\zeta| < e^{\lambda_1}$ .

1° Région  $e^{\lambda_1} < |\zeta| < e^{\lambda_0} = 1$ . Anneau  $[\lambda_1, \lambda_0]$ . La région  $e^{\lambda_1} < |\zeta| < 1$

4) Ce premier chemin n'est pas complètement intérieur à  $\sigma$  puisqu'il longe la frontière  $\gamma_1$ , depuis  $\zeta_0''$  jusqu'à  $\beta$ , mais il peut être commode pour la suite.

est une surface de Riemann doublement connexe ouverte, à deux feuillets, bornée d'une part par la courbe  $\gamma_0$ ; d'autre part par une courbe  $\gamma_1'$  composée du cercle  $|\zeta| = e^{\lambda_1}$  parcouru 2 fois de suite dans le sens des aiguilles d'une montre car, on suppose toujours que *les sens de parcours sont positifs par rapport à l'aire délimitée*. Cela résulte des considérations développées au N° 4 sur l'allure holomorphe des 2 déterminations de  $\varphi(\zeta)$  dans l'anneau  $e^{\lambda_1} < |\zeta| < 1$  et leur permutation sur tout cercle concentrique et appartenant à cet anneau. La fonction  $\varphi(\zeta)$ , de la variable  $\zeta$ , cessant d'être holomorphe en  $\alpha$  et  $\beta$  pour y avoir un point critique algébrique simple, on pourra, si on veut, imaginer que lorsqu'on décrit  $\gamma_1'$  on évite  $\alpha$  et  $\beta$  par des demi-cercles infiniment petits de centre  $\alpha$  et  $\beta$  du côté des  $|\zeta| > e^{\lambda_1}$ . Cette courbe  $\gamma_1'$  est la limite de la courbe  $\gamma_\varepsilon$  découpée dans  $\sigma$  par le cylindre  $U = \lambda_1 + \varepsilon$  ou  $|\zeta| = e^{\lambda_1 + \varepsilon}$ , lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro par valeurs positives. Pour cette raison nous l'appelons courbe  $U = \lambda_1 + 0$  de  $\sigma$ . Par rapport à  $\gamma_1'$ , l'anneau  $e^{\lambda_1} < |\zeta| < 1$  de  $\sigma$  que, pour abrégier, nous appelons l'anneau  $[\lambda_1, \lambda_0]$  de  $\sigma$ , est situé du côté des  $|\zeta|$  ou des  $U$  croissants; il en est déjà ainsi, comme on l'a vu au N° 3, de  $\sigma$  par rapport à l'arc direct  $\widehat{\beta\alpha}$  de  $\gamma_1$  il en résulte que l'arc direct  $\widehat{\beta\alpha}$  de  $\gamma_1$ , correspondant à l'arc  $\widehat{ba}$  de  $C_1$ , sur lequel  $\frac{dU}{dn} > 0$ , appartient à  $\gamma_1'$ .  $\gamma_1'$  comprend, outre l'arc précédent  $\widehat{\beta\alpha}$  d'ouverture comprise entre  $2\pi$  et  $4\pi$ , un arc  $\widehat{\alpha\beta}$ , toujours décrit dans le sens des aiguilles d'une montre, et qui, complété par l'arc de rebroussement de  $\gamma_1$ , fournirait une circonférence entière. *Ce second arc  $\widehat{\alpha\beta}$  est composé des points intérieurs à  $\sigma$  du type signalé au N° 7 (3°), points dont la projection est sur  $|\zeta| = e^{\lambda_1}$  mais n'appartient pas à la projection de l'arc de rebroussement. Cet arc  $\widehat{\alpha\beta}$ , intérieur à  $\sigma$ , nous l'appellerons un arc de passage  $\lambda_1$  de  $\sigma$ . C'est en effet cet arc que doit traverser le point  $\zeta$  lorsqu'en restant intérieur à  $\sigma$  il fait acquérir à  $U$  la valeur  $\lambda_1$ .*

*En définitive, la courbe  $U = \lambda_1 + 0$  se compose: a) de l'arc direct  $\widehat{\beta\alpha}$  de la courbe  $\gamma_1$  frontière de  $\sigma$  sur lequel  $\frac{dU}{dv} > 0$  ( $v$  normale intérieure à  $\sigma$ ), ou par rapport auquel  $\sigma$  est du côté des  $U$  croissants; b) de l'arc de passage  $\lambda_1$  de  $\sigma$ , arc intérieur à  $\sigma$  unissant les 2 points de rebroussement  $\alpha$  et  $\beta$  et que nous pouvons dire aussi arc associé de l'arc de rebroussement.*

2° Région  $e^{\lambda_2} < |\zeta| < e^{\lambda_1}$ . Anneau  $[\lambda_2, \lambda_1]$ . C'est un anneau à un seul



feuille<sup>5)</sup> limité d'une part par  $\gamma_2$ , d'autre part par une courbe  $\gamma_1''$  composée ainsi qu'il suit: a) l'arc de passage  $\lambda_1$  de  $\sigma$  par où l'anneau actuel confine à l'anneau  $[\lambda_1, \lambda_0]$  (nous disons alors que les deux anneaux  $[\lambda_2, \lambda_1]$  et  $[\lambda_1, \lambda_0]$  sont adjacents le long de l'arc de passage  $\lambda_1$ ); b) l'arc de rebroussement  $\widehat{\alpha\beta}$  de  $\gamma_1$  puisqu'on sait qu'il borde  $\sigma$  et que, dans son voisinage,  $\sigma$  est du côté des  $U$  décroissants<sup>6)</sup>, c'est-à-dire  $U < \lambda_1$ . L'ensemble  $\gamma_1''$  des 2 arcs associés précédents, constitue un cercle de centre  $o$  de rayon  $e^{\lambda_1}$ . C'est la limite du cercle  $\gamma_{-\varepsilon}$  découpé dans  $\sigma$  par le cylindre  $U = \lambda_1 - \varepsilon$ , lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro par valeurs positives. Pour cette raison la courbe  $\gamma_1''$  sera appelée courbe  $U = \lambda_1 - 0$ . Par rapport à l'anneau  $[\lambda_2, \lambda_1]$  le sens positif de ce cercle  $\gamma_1''$  est le sens trigonométrique ( $V$  croissant); il coïncide bien avec le sens positif que l'orientation de  $\gamma_1$  imprimait à l'arc de rebroussement  $\widehat{\alpha\beta}$ .

**Conclusion.** L'arc de passage  $\lambda_1$  de  $\sigma$  divise  $\sigma$  en 2 régions distinctes:

1° La région  $U > \lambda_1$  ou anneau  $[\lambda_1, \lambda_0]$ , bordée d'une part par  $\gamma_0$ , d'autre part par la courbe  $\gamma_1'$  ou  $U = \lambda_1 + 0$ , composée de l'arc de passage  $\lambda_1$  et de l'arc direct  $\widehat{\beta\alpha}$  de  $\gamma_1$  ( $\frac{dU}{d\nu} > 0$ ).

2° La région  $U < \lambda_1$  ou anneau  $[\lambda_2, \lambda_1]$  bordée, d'une part par  $\gamma_2$ , d'autre part par  $\gamma_1''$  ou  $U = \lambda_1 - 0$  formée par l'arc de passage  $\lambda_1$  associé à l'arc de rebroussement  $\widehat{\alpha\beta}$  de  $\gamma_1$  ( $\frac{dU}{d\nu} < 0$ ).

10. — Section de  $\mathfrak{A}$  par l'arc de passage  $\lambda_1$  de  $\mathfrak{A}$ . Nous appelons arc de passage  $\lambda_1$  de  $\mathfrak{A}$ , l'image dans le plan  $z$  de l'arc de passage  $\lambda_1$  de  $\sigma$ . C'est un arc analytique intérieur à  $\mathfrak{A}$ , unissant les zéros  $a$  et  $b$  de  $F'(z)$ <sup>7)</sup>, sur lequel  $U = \lambda_1$ . De même que l'arc de passage  $\bar{\lambda}_1$  de  $\sigma$  était dit associé de l'arc de rebroussement  $\widehat{\alpha\beta}$ , nous dirons que l'arc de passage  $\lambda_1$  de  $\mathfrak{A}$  est associé de l'arc  $\widehat{ab}$  de  $C_1$  sur lequel  $\frac{dU}{dn} < 0$ .

L'arc de passage  $\lambda_1$  de  $\mathfrak{A}$  divise  $\mathfrak{A}$  en 2 domaines doublement connexes.

1° Le domaine  $\lambda_1 < U < \lambda_0 = 0$  ou anneau  $[\lambda_1, \lambda_0]$  bordé d'une part par  $C_0$ , d'autre part par la courbe  $C_1'$ , ou  $U = \lambda_1 + 0$  (limite de  $U = \lambda_1 + \varepsilon$  pour  $\varepsilon > 0$  tendant vers zéro), composée de l'arc de passage  $\lambda_1$  et de l'arc  $\widehat{ba}$  de  $C_1$  sur lequel  $\frac{dU}{dn} > 0$ .

<sup>5)</sup>  $\varphi(\zeta)$  est en effet une fonction holomorphe et uniforme dans la région considérée.

<sup>6)</sup>  $\frac{dU}{d\nu}$  est  $< 0$  sur l'arc de rebroussement  $\widehat{\alpha\beta}$ .

<sup>7)</sup> Orthogonal en  $\underline{a}$  et  $\underline{b}$  à  $C_1$  lorsque  $C_1$  est, comme on le suppose ici, analytique.

2° Le domaine  $\lambda_2 < U < \lambda_1$  ou anneau  $[\lambda_2, \lambda_1]$  bordé intérieurement par  $C_2$  et extérieurement par la courbe  $C_1''$  ou  $U = \lambda_1 - 0$  (limite de  $U = \lambda_1 - \varepsilon$  pour  $\varepsilon > 0$  tendant vers zéro) composée de l'arc de passage  $\lambda_1$  et de l'arc  $\widehat{ab}$  de  $C_1$  sur lequel  $\frac{dU}{dn} < 0$  (arcs associés).

Lorsque  $z$  décrit  $C_0$  dans le sens positif par rapport à  $[\lambda_1, \lambda_0]$ ,  $V$  croît toujours et sa variation totale est  $(+4\pi)$ ; lorsque  $z$  décrit  $C_1'$  dans le sens positif par rapport à  $[\lambda_1, \lambda_0]$ ,  $V$  décroît toujours et sa variation totale est  $(-4\pi)$ . En tout point de  $C_0$  la dérivée normale  $\frac{dU}{dn_i} < 0$ , ( $n_i$  normale intérieure à l'anneau  $[\lambda_1, \lambda_0]$ ), et en tout point de  $C_1'$  la dérivée normale  $\frac{dU}{dn_i}$  est  $> 0$ .

Lorsque  $z$  décrit  $C_1''$  dans le sens positif par rapport à  $[\lambda_2, \lambda_1]$   $V$  croît toujours et sa variation totale est  $(+2\pi)$ ; lorsque  $z$  décrit  $C_2$  dans le sens positif par rapport à  $[\lambda_2, \lambda_1]$ ,  $V$  décroît toujours et sa variation totale est  $(-2\pi)$ . En tout point de  $C_1''$ , la dérivée normale  $\frac{dU}{dn_i'} < 0$  ( $n_i'$  normale intérieure à l'anneau  $[\lambda_2, \lambda_1]$ ), et en tout point de  $C_2$  la dérivée normale  $\frac{dU}{dn_i'}$  est  $> 0$ .

Notons encore que  $C_1'$  et  $C_1''$  présentent en  $a$  et  $b$  des points anguleux à tangentes rectangulaires et surtout que les valeurs précédentes des variations totales de  $V$  imposent cette conséquence: ni sur l'arc de passage  $\lambda_1$ , ni sur l'arc associé  $\widehat{ab}$  de  $C_1$  la variation totale de  $V$  n'atteint  $2\pi$ , elle reste entre 0 et  $2\pi$ , limites exclues.

A tout point  $z$  de l'anneau  $[\lambda_1, \lambda_0]$  est associé un point  $z' \neq z$  et un seul, intérieur aussi à cet anneau, et tel que  $F(z) = F(z')$ ;  $z'(z)$  et  $z(z')$  sont des fonctions holomorphes en tout point intérieur à l'anneau  $[\lambda_1, \lambda_0]$ ; on reconnaît aussitôt qu'elles sont uniformes en remarquant que l'équation  $F(u) = F(z)$  a dans l'anneau précédent 2 solutions et 2 seulement  $u = z$  et  $u = z'$  en sorte que, si  $z$  revient à sa valeur initiale en décrivant une courbe de l'anneau non réductible à un point,  $z'$  toujours  $\neq z$  devra aussi revenir à sa valeur initiale. Les courbes  $U = \lambda$ ,  $\lambda_1 < \lambda < \lambda_0 = 0$ , sont des courbes fermées analytiques, non réductibles à un point, de l'anneau précédent.  $z$  et  $z'$  associés sont sur une telle courbe et correspondent, sur cette courbe à des valeurs de  $V$  différant de  $2\pi$ . Il en résulte que lorsque  $z$  tend vers  $a$ ,  $z'(z)$  ne tend pas vers  $a$  ainsi qu'on pourrait le croire, mais vers le point  $\underline{a'}$  signalé au N° 6,



situé sur l'arc  $\widehat{ba}$  de  $C_1$  ou  $\frac{dU}{dn} > 0$  et tel qu'en suivant cet arc de  $\underline{a'}$  à  $\underline{a}$ ,  $V$  décroisse de  $2\pi$ . Au contraire, dans l'anneau  $[\lambda_2, \lambda_1]$ ,  $F(z)$  est univalente.

11. — *Structure et reconstruction de  $\sigma$* . Pour reconstruire à priori une surface du type de la surface  $\sigma$  ici étudiée, nous prendrons 2 anneaux :

1° un anneau à 2 feuillets du type  $[\lambda_1, \lambda_0]$  composé de 2 feuillets identiques en forme d'anneau circulaire réunis par une ligne de croisement disposée par exemple suivant un rayon commun, les rayons des cercles frontière étant  $e^{\lambda_1}$  et  $e^{\lambda_0} = 1$ . Le feuillet supérieur sera le 1<sup>er</sup>, le feuillet inférieur le 2°. Sur le feuillet inférieur nous distinguerons un arc  $\widehat{\alpha\beta}$  du cercle frontière intérieure et la ligne de croisement étant arbitraire nous supposerons qu'elle ne rencontre pas cet arc  $\widehat{\alpha\beta}$ . L'arc distingué sera l'arc de passage  $\lambda_1$  de la  $\sigma$  à construire.

2° Un anneau à un feuillet du type  $[\lambda_2, \lambda_1]$ , anneau circulaire de rayons  $e^{\lambda_2}$  et  $e^{\lambda_1}$ , placé sur le même plan que le 2° feuillet de l'anneau précédent et sur lequel on distingue l'arc  $\widehat{\alpha\beta}$  du cercle frontière extérieure qui coïncide avec l'arc  $\widehat{\alpha\beta}$  distingué sur la frontière intérieure de l'anneau précédent.

Nous collons ensemble les 2 anneaux précédents le long des arcs coïncidents  $\alpha\beta$  distingués sur leurs frontières. La surface de Riemann  $\sigma$  obtenue possède tous les caractères reconnus à  $\sigma$  aux Numéros 8, 9, 10. Elle est triplement connexe, bornée extérieurement par le cercle  $|\zeta| = e^{\lambda_0} = 1$  parcouru 2 fois de suite dans le sens trigonométrique (courbe  $\gamma_0$ ); intérieurement a) par le cercle  $|\zeta| = e^{\lambda_2}$  parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre (courbe  $\gamma_2$ ), enfin b) par une courbe fermée  $\gamma_1$  circulaire,  $|\zeta| = e^{\lambda_1}$ , composée 1° d'un arc direct  $\widehat{\beta\alpha} > 2\pi$  obtenu en retranchant sur le 2° feuillet l'arc distingué  $\widehat{\alpha\beta}$  ou arc de passage  $\lambda_1$  du cercle double que forme la frontière intérieure de l'anneau  $[\lambda_1, \lambda_0]$  2° d'un arc  $\widehat{\alpha\beta} < 2\pi$  situé sur le 2° feuillet et obtenu en retranchant l'arc distingué  $\widehat{\alpha\beta}$  du cercle simple qui forme la frontière extérieure de l'anneau  $[\lambda_2, \lambda_1]$ .

Lorsqu'on décrit  $\gamma_1$  à partir de  $\beta$  dans le sens positif par rapport à la  $\sigma$  obtenue on rencontre d'abord l'arc direct  $\widehat{\beta\alpha}$  du 1° précédent décrit dans le sens des aiguilles d'une montre,  $V = \arg \zeta$  décroissant, ensuite l'arc  $\widehat{\alpha\beta}$  du 2° précédent, décrit dans le sens de  $V$  croissants et qui est donc bien par rapport à l'arc  $\widehat{\beta\alpha}$  précédent un arc de rebroussement. La ligne de croisement  $\theta_1 \theta_0$  de l'anneau  $[\lambda_1, \lambda_0]$  aborde donc  $\gamma_1$  en un

point  $\theta_1$  de l'arc direct  $\widehat{\beta\alpha}$  (1°) superposé à un point de l'arc de rebroussement (2°). Ce point  $\theta_1$  peut à priori être quelconque, mais on peut normaliser la construction en le prenant par exemple en  $\alpha$  ou en  $\beta$ . La ligne de croisement s'arrête à ce point et ne se prolonge pas dans l'anneau adjacent  $[\lambda_2, \lambda_1]$ .

Une telle surface  $\sigma$  possède les propriétés caractéristiques nécessaires.

1° elle est morcelée par toute courbe fermée tracée sur elle puisqu'il en est ainsi de ses 2 anneaux constitutifs réunis par l'arc de passage; elle est donc de genre zéro (schlichtartig).

2° Elle est triplement connexe.

3° Ses 2 frontières extrêmes  $\gamma_0$  et  $\gamma_2$  sont sans rebroussement et sa frontière intermédiaire en présente 2: en  $\alpha$  et  $\beta$ .

Les théorèmes généraux sur la représentation conforme des aires de Riemann multiplement connexes (voir les références dans J. I, N° 15) montrent qu'on peut déterminer une fonction holomorphe, uniforme et univalente du point  $\zeta$  qui décrit  $\sigma$ ,  $z = \varphi(\zeta)$ , telle que, lorsque  $\zeta$  décrit  $\sigma$ ,  $z$  décrive une aire plane  $\mathfrak{A}$  triplement connexe limitée par 3 courbes fermées analytiques  $C_0$  (extérieure),  $C_1$  et  $C_2$  intérieures.

Alors  $\zeta = F(z) = e^{U+iV}$ , fonction inverse de  $\varphi(\zeta)$ , fonction holomorphe et uniforme dans  $\mathfrak{A}$ , sera la fonction de M. de la Vallée Poussin<sup>8)</sup> relative à l'aire  $\mathfrak{A}$  puisqu'elle en possède les propriétés caractéristiques de module et d'argument sur les frontières  $C_0, C_1, C_2$ , à savoir  $e^U = |F(z)| = e^{\lambda_0}, e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}$ , respectivement sur  $C_0, C_1, C_2$ ,  $V = \arg F(z)$  admettant les périodes  $(+4\pi), (-2\pi), (-2\pi)$  sur  $C_0, C_1, C_2$  décrits dans le sens positif par rapport à  $\mathfrak{A}$ . On peut même supposer que  $C_0, C_1, C_2$  sont des cercles. Les 2 points distincts  $a$  et  $b$  de  $C_1$  correspondant par  $z = \varphi(\zeta)$  aux points de rebroussement  $\alpha$  et  $\beta$  de  $\gamma$ , seront évidemment des zéros simples de  $F'(z)$ . On a bien, en définitive, reconstitué une  $\sigma$  ayant toutes les propriétés requises et fourni en même temps un  $\mathfrak{A}$  présentant sur la frontière  $C_1$  deux zéros simples de la dérivée  $F'(z)$ .

12. — Image, dans  $\mathfrak{A}$ , de la décomposition de  $\sigma$  en feuillets. Il n'y a aucune difficulté pour l'anneau  $[\lambda_2, \lambda_1]$  de  $\sigma$  qui, appartenant au 2° feuillet de  $\sigma$ , correspond à l'anneau  $[\lambda_2, \lambda_1]$  de  $\mathfrak{A}$ , biunivoquement. Tous les points de la courbe  $C_1''$ , frontière extérieure de  $[\lambda_2, \lambda_1]$ , correspondent à des points du 2° feuillet de  $\sigma$ , pour lesquels  $V = \arg \zeta$  éprouve une variation totale de  $2\pi$ .

L'anneau  $[\lambda_1, \lambda_0]$  de  $\sigma$  est à 2 feuillets, raccordés ensemble le long de la ligne de croisement  $\theta_1 \theta_0$  qui suit le rayon  $V = \arg \theta_1$ . L'image de l'anneau précédent sera l'anneau  $[\lambda_1, \lambda_0]$  de  $\mathfrak{A}$  compris entre  $C_0$  et

<sup>8)</sup> Voir J. I N° 2.

$C_1'$  [ $U = \lambda_1 + 0$ ]. L'image dans  $\mathfrak{A}$  de la ligne de croisement se compose de 2 arcs de courbe analytiques  $V = V_1$  et  $V = V_1 - 2\pi$  orthogonaux à  $C_0$  et à  $C_1$ , le 1<sup>er</sup> respectivement aux points  $t_0$  et  $t_1$ , le second respectivement aux points  $t_0'$  et  $t_1'$ .

Lorsqu'on suit  $C_0$  dans les sens positif par rapport à  $\mathfrak{A}$ , on aura  $V_{t_0} = V_{t_0'} + 2\pi$  et lorsqu'on suit  $C_1'$  dans le sens positif par rapport à  $[\lambda_1, \lambda_0]$  on aura  $V_{t_1} = V_{t_1'} + 2\pi$ . Enfin, le long de l'arc  $t_1 t_0$ ,  $V$  reste constant, de même que le long de l'arc  $t_1' t_0'$ . La portion de courbe  $C_1'$  comprise entre  $t_1$  et  $t_1'$  et contenant l'arc de passage  $\lambda_1$ , est l'image de points de  $\sigma$  du 2<sup>e</sup> feuillet puisque le long de l'arc de passage,  $C_1'$  et  $C_1''$  coïncident. Au contraire l'autre arc de  $C_1'$  entre  $t_1$  et  $t_1'$  à savoir l'arc  $\widehat{t_1' M t_1}$  correspond à des points de  $\gamma_1$ , du 1<sup>er</sup> feuillet. Les points  $t_1$  et  $t_1'$  sont, à cause de la propriété reconnue à  $\theta_1$  sur  $\gamma_1$ , des points de l'arc  $\widehat{ba}$  de  $C_1$ , où  $\frac{dU}{dn} > 0$  auxquels correspond encore un point  $t_1''$  de l'arc  $\widehat{ab}$  où  $\frac{dU}{dn} < 0$  tels que  $F(t_1) = F(t_1') = F(t_1'') = \theta_1$  (points 1<sup>o</sup> du N<sup>o</sup> 7). De  $t_1'$  à  $t_1$  le long de l'arc  $\widehat{t_1' M t_1}$  de  $C_1'$  ou de  $C_1$  (sens positif),  $V$  diminue de  $2\pi$ : de  $t_1$  à  $t_1'$  le long de  $C_1'$  (sens positif),  $V$  diminue de  $2\pi$ : l'arc de passage  $\lambda_1$  est ainsi isolé sur  $C_1'$  par un arc  $\widehat{t_1 t_1'}$  correspondant à une variation ( $-2\pi$ ) de  $V$ , arc image de la portion de frontière de l'anneau  $[\lambda_1, \lambda_0]$  de  $\sigma$  située sur le 2<sup>e</sup> feuillet. La portion de frontière de cet anneau située sur le 1<sup>er</sup> feuillet a pour image l'arc  $\widehat{t_1' M t_1}$  (sens positif) de  $C_1'$  ou  $C_1$ . La partie de l'anneau  $[\lambda_1, \lambda_0]$  de  $\sigma$  située sur le 2<sup>e</sup> feuillet a donc pour image la partie de l'anneau  $[\lambda_1, \lambda_0]$  de  $\mathfrak{A}$  comprise entre les lignes  $t_1 t_0$  et  $t_1' t_0'$  et confinant à l'arc de passage  $\lambda_1$ ; la partie de  $[\lambda_1, \lambda_0]$  de  $\sigma$  située sur le 1<sup>er</sup> feuillet aura pour image la partie de l'anneau  $[\lambda_1, \lambda_0]$  de  $\mathfrak{A}$  comprise entre les lignes  $t_1 t_0$  et  $t_1' t_0'$  et ne confinant pas à l'arc de passage  $\lambda_1$ , mais à l'arc  $\widehat{t_1' M t_1}$  (sens positif) de  $C_1'$  ou de  $C_1$ . Nous pouvons noter encore que, si l'on suit par continuité  $C_1$  dans le sens positif par rapport à  $\mathfrak{A}$ ,  $V$  décroît de  $2\pi$  de  $t_1'$  à  $t_1$ , décroît encore jusqu'à  $a$ , puis croît de  $a$  à  $b$ , enfin décroît de  $b$  à  $t_1'$  en sorte que, au passage par  $t_1''$ , on aura  $V_{t_1''} = V_{t_1} = V_{t_1'} - 2\pi$ .

13. — Prolongement à 2 feuillets de  $\sigma$  dans l'intérieur de ses frontières  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ .

Imaginons d'abord que nous réunissions les points de l'arc de rebroussement  $\widehat{\alpha\beta}$  de  $\gamma_1$  (situés sur le 2<sup>e</sup> feuillet), aux points de l'arc direct

$\widehat{\beta\alpha}$  de  $\gamma_1$  situés sur le 2<sup>o</sup> feuillet et *correspondant respectivement aux mêmes valeurs de  $V$* : ces derniers points constituent 2 arcs  $\widehat{\theta_1\alpha}$  et  $\widehat{\theta_1\beta}$  de longueur  $< 2\pi$  qui, retranchés de l'arc direct  $\widehat{\beta\alpha}$  de  $\gamma_1$ , le réduisent à une circonférence du 1<sup>er</sup> feuillet dont l'image dans  $\mathfrak{A}$  est l'arc  $t_1' M t_1$  de  $C_1$  sur lequel  $\frac{dU}{dn} > 0$ . Adjoignons à  $\sigma$ , le long de cette circonférence, le disque circulaire bordé extérieurement par cette circonférence, ce disque étant adjoint au 1<sup>er</sup> feuillet. Enfin, au 2<sup>o</sup> feuillet de  $\sigma$ , adjoignons le disque circulaire bordé extérieurement par  $\gamma_2$ .

Après ces opérations de prolongement  $\sigma$  est devenue une surface de Riemann  $\sigma_1$  à 2 feuillets, simplement connexe, limitée par la seule courbe  $\gamma_0$ . Au point de vue de l'Analysis situs: la 1<sup>ère</sup> des opérations précédentes conduit dans le plan  $z$  à identifier les arcs  $\underline{at_1}$  et  $\underline{at_1''}$  de  $C_1^*$ , ainsi que les arcs  $\underline{bt_1'}$  et  $\underline{bt_1''}$ , *en identifiant les points de ces arcs respectifs*<sup>9)</sup> qui, par continuité à partir de  $a$  ou de  $b$  donnent la même valeur à  $V$  (et par suite à  $F(z)$ ); après quoi  $C_1$  se réduit à une courbe fermée  $t_1' M t_1$  munie de 2 prolongements:  $\widehat{t_1'a}$  (confondu avec  $t_1''a$ ) et  $\widehat{t_1'b}$  (confondu avec  $t_1''b$ ).

La 2<sup>o</sup> opération consiste topologiquement à adjoindre à  $\mathfrak{A}$  l'aire intérieure à la courbe fermée précédente. La 3<sup>o</sup> opération consiste topologiquement à adjoindre à  $\mathfrak{A}$  l'aire intérieure à  $C_2$ . La surface  $\sigma_1$  est donc homéomorphe à l'intérieur de  $C_0$ .

On peut passer de  $\sigma_1$  à  $\sigma$ .

1<sup>o</sup> en enlevant l'intérieur du cercle  $\gamma_2$  du 2<sup>o</sup> feuillet.

2<sup>o</sup> en enlevant sur le 1<sup>o</sup> feuillet l'intérieur du cercle  $|\zeta| = e^{\lambda_1}$  et fendant le 2<sup>o</sup> feuillet le long de ce cercle depuis  $\theta_1$  jusqu'à  $\alpha$  d'un côté, depuis  $\theta_1$  jusqu'à  $\beta$  de l'autre.

14. — *Représentation conforme canonique de  $\sigma_1$  et  $\sigma$* .  $\sigma_1$  est une surface simplement connexe à 2 feuillets bornée extérieurement par  $\gamma_0$  et possédant en  $\theta_1$  un point de ramification simple. C'est un cas particulier, le plus simple possible, de la surface  $\sigma_1$  envisagée au N<sup>o</sup> 19 de mon précédent mémoire (J. I pages 129 et suivantes). Les prolongements de  $\sigma_1$  à l'extérieur de  $\gamma_0$  pourront se faire, soit comme au N<sup>o</sup> 21, soit comme au N<sup>o</sup> 22 de ce mémoire et tout ce qu'on a dit aux N<sup>os</sup> 23, 24, 25, d'une part, aux numéros 28, 29, 30, s'applique ici.

<sup>9)</sup> On voit qu'alors les voisinages dans  $\mathfrak{A}$  de 2 tels points correspondants se prolongent mutuellement, en sorte que  $F(z)$  ne cesse pas d'être holomorphe au passage par chacun des 2 arcs doubles ouverts obtenus après identification des arcs  $\underline{at_1}$  et  $\underline{at_1''}$  d'une part,  $\underline{bt_1'}$  et  $\underline{bt_1''}$  d'autre part.

A. Avec le 1<sup>er</sup> prolongement (J. I N° 21) il existe un polynome du 2<sup>o</sup> degré<sup>10)</sup>

$$P_0(u) = (u - u_1)(u - u_2)$$

tel que l'équation  $\zeta = P_0(u)$  définisse  $u = \pi_0(\zeta)$ , holomorphe et univalente sur  $\sigma_1$ , et fournisse de  $\sigma_1$  une représentation conforme sur une aire  $D_1$  du plan  $u$  limitée par une cassinienne analytique  $K_0$  d'équation  $|P_0(u)| = 1$ , entourant les 2 zéros  $u_1$  et  $u_2$  de  $P_0(u)$ . Au point  $\theta_1$  correspondra, dans le plan  $u$ , un point unique  $u_0 = \frac{u_1 + u_2}{2}$ , où l'on aura  $P_0'(u_0) = 0$  et ce point sera intérieur à  $D_1$ . Par un déplacement dans le plan  $u$  on peut supposer  $u_0 = 0$ ,  $u_1$  et  $u_2$  réels,  $u_1 > 0$ .

A la courbe  $\gamma_1'$  passant par  $\theta_1$ , correspondrait la cassinienne entière à point double<sup>11)</sup>  $|P_0(u)| = e^{\lambda_1}$ , la boucle droite venant du premier feuillet, la boucle gauche du 2<sup>o</sup> feuillet. Mais  $\gamma_1$  est une courbe fermée tracée sur  $\sigma_1$  et ne coïncidant avec  $\gamma_1'$  que sur la partie fournie par l'arc direct  $\widehat{\beta\alpha}$  de  $\gamma_1$ . Il faudra donc, pour obtenir la courbe  $K_1$  correspondant à  $\gamma_1$  par  $u = \pi_0(\zeta)$ , tronquer la cassinienne  $|P_0(u)| = e^{\lambda_1}$  aux 2 points A et B correspondant à  $\alpha$  et  $\beta$  de  $\gamma_1$  ou de  $\gamma_1'$ , et, d'une part n'en conserver que les 2 arcs  $\widehat{OA}$  et  $\widehat{OB}$  correspondant aux arcs  $\widehat{\theta_1\alpha}$   $\widehat{\theta_1\beta}$  de  $\gamma_1$  situés sur le 2<sup>o</sup> feuillet, d'autre part conserver la boucle droite correspondant à l'arc de  $\gamma_1$  situé sur le 1<sup>o</sup> feuillet. Lorsque  $\gamma_1$  est décrite par  $\zeta$  dans le sens positif par rapport à  $\sigma$ , le point  $u = \pi_0(\zeta)$  décrit la cassinienne tronquée de la manière suivante: si  $\zeta$  part de  $\beta$ , décrit l'arc direct  $\widehat{\beta\alpha}$  puis l'arc de rebroussement  $\widehat{\alpha\beta}$ ,  $u$  part de  $B$ , décrit l'arc tronqué  $\widehat{BO}$ , puis la boucle droite, puis l'arc tronqué  $\widehat{OA}$  de la cassinienne tronquée (cet ensemble  $\widehat{BO}$ , boucle droite,  $\widehat{OA}$ , correspond à l'arc direct  $\widehat{\beta\alpha}$ ), puis l'arc  $\widehat{AO}$  et enfin l'arc  $\widehat{OB}$  (cet ensemble  $\widehat{AOB}$  correspond à l'arc de rebroussement  $\widehat{\alpha\beta}$ ). Nous appellerons  $K_1$ , cette cassinienne tronquée correspondant à  $\gamma_1$ . Enfin, à  $\gamma_2$ , correspondra une cassinienne courbe fermée analytique  $K_2$  d'équation  $|P_0(u)| = e^{\lambda_2}$  intérieure à la boucle gauche de la cassinienne  $|P_0(u)| = e^{\lambda_1}$  et entourant le zéro  $u_2$  intérieur à cette boucle.

<sup>10)</sup> Tous les polynomes en  $u$ , du 2<sup>o</sup> degré, et de 1<sup>er</sup> coefficient égal à 1 en module, ayant cette propriété sont compris dans la formule

$$P(u) = P_0(ue^{i\theta} + b).$$

<sup>11)</sup>  $e^{\lambda_1} = |P_0(0)| = -u_1 u_2 = u_2^2$ .

De même que  $\sigma$  se déduit de  $\sigma_1$ :

1° en enlevant l'intérieur du cercle  $\gamma_2$  du 2° feuillet.

2° en enlevant sur le 1<sup>er</sup> feuillet l'intérieur du cercle  $|\zeta| = e^{\lambda_1}$  et fendant le 2° feuillet le long de ce cercle suivant les arcs  $\widehat{\theta_1 \alpha}$  et  $\widehat{\theta_1 \beta}$ ;

De même  $D$ , décrit par  $u = \pi_0(\zeta)$  lorsque  $\zeta$  décrit  $\sigma$ , se déduit de  $D_1$ :

1° en enlevant l'intérieur de la courbe  $K_2$  précédente.

2° en enlevant l'intérieur de la boucle droite de la cassinienne tronquée  $K_1[|P_0(u)| = e^{\lambda_1}]$  et fendant l'aire obtenue suivant les arcs  $\widehat{OA}$  et  $\widehat{OB}$  de la partie tronquée de cette cassinienne.

On voit que, par  $P_0(u) = F(z)$ , on obtient une fonction  $u = \pi_0[F(z)]$ , holomorphe et univalente dans  $\mathfrak{A}$  et sur ses frontières sauf en  $t_1, t_1', t_1''$ , et qui transforme  $\mathfrak{A}$  dans l'aire  $D$  limitée par les cassiniennes  $K_0, K_1, K_2$ , la cassinienne moyenne  $K_1$  étant tronquée en  $A$  et  $B$  correspondant aux zéros  $\underline{a}$  et  $\underline{b}$  de  $F'(z)$ . L'image de l'arc de passage  $\lambda_1$  serait l'arc  $\widehat{AB}$  enlevé à la boucle gauche de la cassinienne, en sorte que le domaine doublement connexe compris entre  $K_2$  et la boucle gauche de  $K_1$  est l'image du domaine  $\lambda_2 < U < \lambda_1$  ou de l'anneau  $[\lambda_2, \lambda_1]$  du domaine  $\mathfrak{A}$ . Aux points  $t_1, t_1', t_1''$ , du N° 12, correspond le point  $u = 0$  et la fonction  $u = \pi_0[F(z)]$  a, en chacun de ces 3 points, un point critique algébrique simple. En normalisant au N° 11 le choix de  $\theta_1$  en  $\alpha$  ou en  $\beta$ , on voit que l'un des arcs tronqués  $\widehat{OA}$  ou  $\widehat{OB}$  disparaît ipso facto, et le nombre des paramètres essentiels dont dépend l'aire  $D$  est bien réduit à  $3p - 3 = 3$ , car  $p = 2$  (à savoir les nombres réels  $u_2, \lambda_2$  et le nombre réel fixant la position de  $B$  sur la boucle gauche de la cassinienne  $K_1$ ) et ce nombre correspond exactement au nombre des modules de l'aire  $\mathfrak{A}$ .

B. Avec le 2° prolongement il existe<sup>12)</sup> une fraction rationnelle du 2° degré à cercle fondamental

$$R_0(v) = \frac{v - a_1}{1 - \bar{a}_1 v} \cdot \frac{v - a_2}{1 - \bar{a}_2 v}, \quad [ |a_1| < 1, |a_2| < 1 ]$$

telle que l'équation  $\zeta = R_0(v)$  définisse  $v = \rho_0(\zeta)$  holomorphe et univalente sur  $\sigma_1$  et fournisse de  $\sigma_1$  une représentation conforme sur le cercle  $D_1'$  défini par  $|v| < 1$ .

<sup>12)</sup> Toutes les autres sont de la forme  $R(v) = R_0\left(\frac{v-a}{1-\bar{a}v} e^{i\omega}\right)$ ,  $a$  constante complexe de module  $< 1$ ,  $\omega$  constante réelle quelconque.



Aux courbes  $\gamma_2$  et  $\gamma_1$  correspondront, par  $v = \rho_0(\zeta)$ , 2 cassiniennes généralisées  $K_2'$  et  $K_1'$  intérieures à  $D_1'$ , d'équations respectives  $|R_0(v)| = e^{\lambda_2}$ ,  $|R_0(v)| = e^{\lambda_1}$ .  $K_1'$  est une cassinienne tronquée tout à fait analogue à  $K_1$ ; elle possède un point double que, par un déplacement non euclidien convenable appliqué à  $v$ , on peut supposer à l'origine, les 2 zéros  $a_1$  et  $a_2$  étant alors réels et symétriques par rapport à  $O$ , ( $a_1 > 0$ ).  $K_1'$  comprend la boucle droite de la cassinienne (1<sup>o</sup> feuillet de  $\sigma_1$ ) et deux arcs  $\widehat{OA'}$  et  $\widehat{OB'}$  de la boucle gauche obtenus en enlevant de cette boucle l'arc  $\widehat{A'B'}$  correspondant à l'arc de passage  $\lambda_1$  de  $\sigma$  (2<sup>o</sup> feuillet). L'équation de  $K_1'$  est  $|R_0(v)| = e^{\lambda_1} = |R_0(0)| = a_1^2$ .  $K_2'$  est une cassinienne généralisée analytique fermée entourant  $a_2$  et intérieure à la boucle gauche de  $K_1'$ . Enfin à  $\gamma_0$  correspond le cercle fondamental  $|v| = 1$  que nous appelons  $K_0'$ . L'aire  $D'$ , image de  $\sigma$  par  $v = \rho_0(\zeta)$ , et par suite de  $\mathfrak{A}$  par  $v = \rho_0[F(z)]$ , est bornée par  $K_0'$ ,  $K_1'$ ,  $K_2'$ . Lorsqu'on normalise le choix de  $\theta_1$  comme en  $A$ . précédent on réduit à 3 le nombre des paramètres essentiels dont dépend  $D'$ .

## § 2. $F'(z)$ a un zéro double sur $C_1$

15. — Après les explications détaillées qui précèdent il nous suffira d'indiquer rapidement les modifications que présente le cas actuel, *cas limite du précédent* où  $a$  et  $b$  de  $C_1$  sont venus se confondre en  $a$  (par suite  $\alpha$  et  $\beta$  de  $\gamma_1$ , confondus en  $\alpha$ ). L'arc de rebroussement de  $\overline{\gamma_1}$  est ici nul. Les points  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\theta_1$  sont confondus. Rien à changer à ce qui précède en ce qui concerne les anneaux  $[\lambda_1, \lambda_0]$  et  $[\lambda_2, \lambda_1]$  en dehors des conséquences du fait précédent.  $\gamma_1$  se compose donc du cercle  $|\zeta| = e^{\lambda_1}$  du 1<sup>er</sup> feuillet décrit dans le sens des aiguilles d'une montre. Le domaine  $\lambda_2 < U < \lambda_1$  est limité d'une part par  $C_2$ , d'autre part par l'arc de passage  $\lambda_1$  qui est une courbe fermée analytique intérieure à  $\mathfrak{A}$ , émanée du point  $\alpha$  et revenant au point  $\alpha$  [zéro double de  $F'(z)$ ] après avoir entouré  $C_2$ ; en  $\alpha$ , les branches de cette courbe font, avec les 2 demi-tangentes à  $C_2$  des angles de  $60^\circ$ . Cet arc de passage  $\lambda_1$  est ce que devient ici la courbe fermée  $C_1''$ , [ $U = \lambda_0 - 0$ ], car l'arc de  $C_1$  associé à l'arc de passage est ici nul. La courbe  $C_1'$ , [ $U = \lambda_1 + 0$ ] se compose de  $C_1$  et de l'arc de passage  $\lambda_1$ , elle admet un point double en  $\alpha$ . Le prolongement de  $\sigma$  à l'intérieur de  $\gamma_2$  se fait comme précédemment; à l'intérieur de  $\gamma_1$  il est plus simple que dans le § 1, il suffit comme pour  $\gamma_2$ , d'ajouter au 1<sup>er</sup> feuillet de  $\sigma$  le disque circulaire intérieur à  $\gamma_1$ . On obtient une  $\sigma_1$  du type de la  $\sigma_1$  envisagée au § 1,

ayant un point de ramification simple en  $\alpha = F(a)$ . La représentation canonique par  $u = \pi_0(\zeta)$ , fonction inverse de  $\zeta = P_0(u)$ ,  $P_0(u)$  polynome ayant les caractères envisagés au N° 14 (A), fera correspondre à  $\gamma_0$  la *cassinienne fermée*  $K_0$  [ $|P_0(u)| = 1$ ] entourant les 2 zéros  $u_1$  et  $u_2$  de  $P_0$  [ $u_1 > 0$ ,  $u_2 = -u_1$ ]; elle fera correspondre à  $\gamma_1$  la *boucle de droite*  $K_1$  de la *cassinienne*  $|P_0(u)| = e^{\lambda_1} = u_1^2$ , ayant  $O$  pour point double, la boucle de gauche étant l'image de l'arc de passage  $\lambda_1$  de  $\sigma$ ; elle fera correspondre à  $\gamma_2$  l'*ovale de gauche*  $K_2$  de la *cassinienne*  $|P_0(u)| = e^{\lambda_2}$ : cet ovale est intérieur à la boucle gauche de la *cassinienne*  $|P_0(u)| = e^{\lambda_1}$  et il entoure le zéro  $u_2$ . Le domaine canonique  $D$  sur lequel est représenté conformément  $\mathfrak{A}$  par  $u = \pi_0[F(z)]$ , ou  $F(z) = P_0(u)$ , est borné par  $K_0, K_1, K_2$ . La fonction de représentation  $u = \pi_0[F(z)]$ , holomorphe dans  $\mathfrak{A}$  et sur ses contours, sauf en  $\underline{a}$ , présente en  $\underline{a}$  un point critique algébrique simple, au voisinage duquel on a  $u = (z - a)^{\frac{3}{2}} H(z)$ , la fonction  $H(z)$  étant holomorphe et  $\neq 0$  pour  $z = a$  [on avait, en  $\underline{a}$ ,  $\zeta - \alpha = F(z) - \alpha = (z - a)^3 F_1(z)$ , avec  $F_1(a) \neq 0$  et d'autre part, en  $\underline{\alpha}$ ,  $\pi_0(\zeta) = (\zeta - \alpha)^{\frac{1}{2}} \text{Hol}(\zeta)$ , avec  $\text{Hol}(\alpha) \neq 0$ ].

En adoptant le 2° prolongement de  $\sigma_1$ , on aurait, en modifiant les conclusions du N° 14 (B) comme on vient de modifier celles du N° 14 (A), une aire canonique  $D'$  limitée d'une part par le *cercle fondamental*  $K_0'$ ,  $|v| = 1$ ; d'autre part, par la *boucle droite*  $K_1'$  de la *cassinienne généralisée à point double*  $O$  d'équation  $|R_0(v)| = R_0(0) = a_1^2 = e^{\lambda_1}$ , entourant le zéro  $a_1$  de la fraction à cercle fondamental  $R_0$ ; enfin par l'*ovale de gauche*  $K_2'$  de la *cassinienne généralisée* d'équation  $|R_0(v)| = e^{\lambda_2}$ , intérieure à la boucle gauche de la *cassinienne* dont  $K_1'$  est la boucle droite, et entourant le zéro  $a_2$  de  $R_0$ . La fonction  $v = \rho_0[F(z)]$ , qui représente  $\mathfrak{A}$  sur  $D'$ , est holomorphe et univalente dans  $\mathfrak{A}$  et sur ses contours, sauf en  $\underline{a}$ , où elle a un point critique algébrique simple au voisinage duquel on a  $v = (z - a)^{\frac{3}{2}} H(z)$  la fonction  $H(z)$  étant holomorphe et  $\neq 0$  pour  $z = a$ .

(Reçu le 29 janvier 1932)