Sur la théorie des intersections et les intégrales multiples.

Sur la théorie des intersections et les intégrales multiples

par GEORGES DE RHAM, Lausanne

Le but des lignes qui suivent est d'exposer une nouvelle démonstration d'un théorème qui établit un lien entre la théorie topologique des intersections et celle des intégrales multiples [1]). L'idée essentielle, déjà utilisée par M. Hodge dans une question analogue [2]), consiste à faire intervenir le produit topologique de deux variétés identiques à celle qu'on étudie. Pour ne pas devoir exclure les variétés non orientables, on a introduit une notion nouvelle, celle de champ de seconde espèce; grâce à elle, la théorie des intersections s'applique à toute variété, orientable ou non. Tous les théorèmes de topologie auxquels on a dû faire appel sont rappelés au cours de l'exposé [3]).

1. Pour définir les champs (d'intégration) à p dimensions dans l'espace à n dimensions E_n (ou dans une variété quelconque à n dimensions), on définit d'abord les champs élémentaires à p dimensions, le champ le plus général étant ensuite envisagé comme la réunion d'un nombre fini de champs élémentaires. Un champ élémentaire à p dimensions dans E_n est constitué par un point variable de E_n dont les coordonnées sont des fonctions uniformes, continues et dérivables de p paramètres t_1, t_2, ... t_p, dont le point représentatif décrit un polyèdre convexe de l'espace des t. En effectuant sur ces paramètres une substitution linéaire réversible, on obtient un nouveau champ qui est dit égal ou opposé au premier, suivant que le déterminant de la substitution est positif ou négatif. Les champs ainsi définis seront dits de *première espèce*, pour les distinguer des champs de seconde espèce que nous allons introduire maintenant.

Un champ élémentaire de seconde espèce à p dimensions est par définition l'ensemble (c^p, ε) d'un champ élémentaire de première espèce c^p et d'une orientation ε de l'espace E_n contenant c^p; s'il s'agit d'une variété

---

1) Pour une première démonstration, voir ma Thèse: Sur l'Analysis situs des variétés à n dimensions (Journal de math. p. et appl. 1931) § 27. Au chapitre III, on trouvera une définition précise des variétés et des champs, tels qu'on les envisage ici.

2) Journal of the London Math. Soc., October 1930, p. 283.

3) Pour les démonstrations, on pourra consulter: Topology, by *S. Lefschetz* (New-York 1930) ainsi que le Mémoire suivant, du même auteur, Intersections and continuous transformations of complexes and manifolds (Trans. Am. Math. Soc. 1926).

autre que E_n, éventuellement non orientable, ε désignera une orientation d'un voisinage de c^p. Pour compléter cette définition, on convient que, des quatre champs (c^p, ε), $(-c^p, -\varepsilon)$, $(c^p, -\varepsilon)$, $(-c^p, \varepsilon)$, les deux premiers sont égaux entre eux, ainsi que les deux derniers, mais chacun des deux premiers est opposé à chacun des deux derniers. *Un champ quelconque de seconde espèce* est formé par la réunion d'un nombre fini de champs élémentaires de seconde espèce. Si la frontière de c^p est $c_1^{p-1} + c_2^{p-1} + \dots$, *la frontière de* (c^p, ε) *sera par définition* $(c_1^{p-1}, \varepsilon) + (c_2^{p-1}, \varepsilon) + \dots$.

Les champs de seconde espèce donnent lieu à une théorie tout à fait analogue à celle des champs de première espèce. On définit en particulier les homologies entre cycles (ou champs fermés) de seconde espèce, ce qui conduit aux nombres de Betti de seconde espèce, tout comme les homologies entre cycles de première espèce conduisent aux nombres de Betti ordinaires (ou, comme nous dirons, de première espèce).

2. Etant donné deux champs (de première espèce) à p et q dimensions, c^p et c^q, contenus dans un domaine orientable à n dimensions où l'on a choisi une orientation déterminée ε, on sait qu'il existe en général un champ bien déterminé (de première espèce) à $r = p + q - n$ dimensions, c^r, qu'on appelle l'intersection de c^p avec c^q et qu'on désigne par $c^p \cdot c^q$. Si l'on choisit l'orientation opposée, $-\varepsilon$, on obtient comme intersection le champ opposé, $-c^r$; cela revient à dire que le champ de seconde espèce $\bar{c}^r = (c^r, \varepsilon)$ est indépendant de l'orientation choisie et ne dépend que de c^p et c^q. Il paraît alors naturel de choisir $\bar{c}^r$, et non c^r, comme étant par définition l'intersection de c^p avec c^q. D'une manière générale, en désignant par $\bar{c}^p$ et $\bar{c}^q$ les champs de seconde espèce (c^p, ε) et (c^q, ε), *nous poserons:*

$$c^p \cdot c^q = \bar{c}^p \cdot \bar{c}^q = \bar{c}^r \qquad \text{et} \qquad \bar{c}^p \cdot c^q = c^p \cdot \bar{c}^q = c^r .$$

Il est immédiat que, dans chaque cas, l'intersection ainsi définie ne dépend pas de l'orientation choisie ε. On voit aussi que *l'intersection de deux champs de même espèce est un champ de seconde espèce, tandis que l'intersection de deux champs d'espèces différentes est un champ de première espèce.*

La définition ainsi modifiée des intersections présente sur la définition habituelle l'avantage de s'appliquer aussi aux variétés unilatères ou non orientables; en effet, en vertu de la règle de distributivité que vérifie l'opération d'intersection, on peut se borner à définir l'intersection de deux champs élémentaires, et il est loisible de les supposer assez petits pour qu'ils soient contenus dans un même domaine orientable (à moins qu'ils n'aient aucun point commun, auquel cas leur intersection est nulle).

Un champ de première espèce à o dimension est formé, comme on sait, par un nombre fini de points affectés chacun d'un coefficient entier; la somme de ces coefficients est l'*indice* du champ. Etant donnés deux champs d'espèces différentes à p et n-p dimensions, c^p et $\bar{c}^{n-p}$, on désignera par $(c^p \cdot \bar{c}^{n-p})$ l'indice de l'intersection $c^p \cdot \bar{c}^{n-p}$. Un champ de seconde espèce à o dimension n'a pas d'indice déterminé, de sorte que le symbole $(c^p \cdot c^{n-p})$ n'est pas non plus déterminé si c^p et c^{n-p} sont de même espèce; on peut toutefois lui donner un sens si la variété contenant ces champs est orientable, une orientation y ayant été choisie, car il existe alors une correspondance parfaite entre les champs de seconde espèce et ceux de première espèce (ce qui permet de se passer des champs de seconde espèce tant qu'on se borne aux variétés orientables).

3. Rappelons quelques propriétés des intersections. Si c_1 et c_2 sont des cycles, $c_1 \cdot c_2$ est aussi un cycle, et si l'on remplace c_1 et c_2 par d'autres cycles homologues, $c_1' \backsim c_1$ et $c_2' \backsim c_2$, l'intersection reste homologue à elle-même: $c_1' \cdot c_2' \backsim c_1 \cdot c_2$; si en particulier c_1 et c_2 sont d'espèces différentes et si la somme de leurs dimensions est égale à la dimension de la variété qui les contient, on a $(c_1 \cdot c_2) = (c_1' \cdot c_2')$. Rappelons encore *le théorème de dualité de Poincaré:*

Dans une variété close à n dimensions V, le $p^{\text{ième}}$ nombre de Betti de première espèce est égal au $(n-p)^{\text{ième}}$ nombre de Betti de seconde espèce; de plus, si $c_1, c_2, \ldots c_R$ et $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots \bar{c}_R$ sont des systèmes fondamentaux de cycles à p dimensions de première espèce et à $(n-p)$ dimensions de seconde espèce, l'indice $(c \cdot \bar{c})$ des deux cycles $c = \Sigma x_i c_i$ et $\bar{c} = \Sigma y_i \bar{c}_i$ est une forme bilinéaire des x et des y dont le discriminant n'est pas nul.

La démonstration de ce théorème, bien connue lorsque V est orientable, fait intervenir deux subdivisions de V en deux polyèdres réciproques l'un de l'autre; elle s'applique aussi bien lorsque V n'est pas orientable, pourvu qu'on interprète les éléments de l'un des polyèdres comme des champs de première espèce et ceux de l'autre comme des champs de seconde espèce.

Cela posé, soit ω un élément d'intégrale multiple d'ordre p (forme différentielle extérieure) régulière en tout point de V et satisfaisant aux conditions d'intégrabilité ($\omega' = 0$); c'est ce que nous appelons une *forme fermée de degré p.* L'intégrale de ω étendue à un cycle homologue à zéro est nulle; étendue à un cycle non homologue à zéro, c'est une *période.*

Définition. *Nous dirons que le cycle de seconde espèce $\bar{c}$, à $(n-p)$ dimensions, est associé à la forme fermée ω, de degré p, si, quel que soit le cycle c, on a*

$$\int_c \omega = (c \cdot \bar{c}). \tag{1}$$

Il résulte immédiatement du théorème de dualité de Poincaré que le cycle associé à une forme fermée existe toujours et qu'il est bien déterminé à une homologie près. En effet, considérons les R équations linéaires aux R inconnues y_i ($t = 1, 2, \ldots, R$) qu'on obtient en remplaçant, dans (1), $\bar{c}$ par $\Sigma y_i \bar{c}_i$ et c successivement par les R cycles fondamentaux de première espèce à p dimensions; le déterminant de ce système n'étant pas nul d'après le théorème de Poincaré, les y seront déterminés d'une manière et d'une seule. Ensuite, l'égalité (1), ayant lieu lorsque c est un cycle fondamental, aura évidemment encore lieu lorsque c est une combinaison linéaire des cycles fondamentaux, et par suite quel que soit c. Il faut remarquer toutefois qu'en général les y ne seront pas des entiers, de sorte que le cycle associé est d'une nature plus générale que ceux qu'on envisage habituellement; mais l'essentiel est que la théorie des intersections s'applique encore à de tels cycles.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème que nous nous proposons de démontrer.

Théorème. *Si ω_1 et ω_2 sont deux formes fermées, et si $\bar{c}_1$ et $\bar{c}_2$ sont les cycles qui leur sont associés, le cycle associé à la forme fermée $\omega_1 \omega_2$, produit extérieur de ω_1 et ω_2, est l'intersection $\bar{c}_1 \cdot \bar{c}_2$ de $\bar{c}_1$ avec $\bar{c}_2$.*

4. Rappelons tout d'abord quelques propriétés des produits de deux variétés. Si A et B sont deux variétés, un point de $A \times B$ est par définition l'ensemble $P \times Q$ d'un point P de A et d'un point Q de B; si P varie dans le domaine C de A et Q dans le domaine D de B, $P \times Q$ décrit dans $A \times B$ un domaine qu'on désigne par $C \times D$; si $x_1 \ldots x_m$ sont des coordonnées dans C, $y_1 \ldots y_n$ des coordonnées dans D, $x_1 \ldots x_m$ $y_1 \ldots y_n$ forment des coordonnées dans $C \times D$, et ainsi, à des orientations déterminées de C et D correspond une orientation déterminée de

$C \times D$. Si P est fonction de p paramètres $t_1 \dots t_p$ dans le polyèdre Π^p, définissant un champ élémentaire de première espèce c^p, si Q est fonction de q paramètres qu'on peut désigner par $t_{p+1}, \dots t_{p+q}$ dans le polyèdre Π_q, définissant le champ c^q, $P \times Q$ est fonction des $p+q$ paramètres $t_1 \dots t_{p+q}$ dans le polyèdre qui se projette sur Π_p et sur Π_q et définit un champ de première espèce qu'on désigne par $c^p \times c^q$. Si c^p et c^q étaient des champs élémentaires de seconde espèce, $c^p \times c^q$ serait aussi un champ de seconde espèce, déterminé à l'aide de la relation établie entre les orientations de C, D et $C \times D$. Enfin, si c^p et c^q sont des champs quelconques de même espèce, la définition de $c^p \times c^q$ se ramène au cas examiné grâce à la règle de distributivité. Ainsi, *à deux champs de même espèce c^p dans A et c^q dans B correspond dans $A \times B$ un champ bien déterminé, de même espèce, $c^p \times c^q$*. Cette opération jouit de quelques propriétés simples que nous allons rappeler.

a) Si c_1 et c_2 sont des cycles, $c_1 \times c_2$ est aussi un cycle; si $c_1 \backsim c_1'$ et $c_2 \backsim c_2'$, on a $c_1 \times c_2 \backsim c_1' \times c_2'$. Les cycles de ce type spécial $c_1 \times c_2$ suffisent pour former tous les systèmes fondamentaux de cycles de $A \times B$.

b) Supposons les dimensions de A et de B égales toutes deux à n, et soient c_1 et $\bar{c}_1$ deux cycles de première et de seconde espèces dans A, de dimensions p et p', c_2 et $\bar{c}_2$ deux cycles analogues dans B de dimensions q et q', ces dimensions étant telles que $p + p' + q + q' = 2n$. Alors

$$\left.\begin{array}{ll} \text{si } p+p' \neq q+q' \neq n, & (c_1 \times c_2 \cdot \bar{c}_1 \times \bar{c}_2) = 0 \\ \text{si } p+p' = q+q' = n, & (c_1 \times c_2 \cdot \bar{c}_1 \times \bar{c}_2) = (-1)^{(n-p)q} (c_1 \cdot \bar{c}_2)\,(c_2 \cdot \bar{c}_2) \end{array}\right\} \quad (2)$$

c) Supposons maintenant que A et B soient deux exemplaires d'une même variété close à n dimensions V. L'ensemble des points $P \times Q$ de $A \times B$ tels que P et Q correspondent à un même point de V forme dans $A \times B$ une variété M (variété diagonale) qui est encore identique à V; nous désignerons par la même lettre un champ situé dans V et les champs correspondants dans A, B et M. Soient c un champ de première espèce à $p+q$ dimensions, $\bar{c}_1$ et $\bar{c}_2$ deux champs de seconde espèce à $n-p$ et $n-q$ dimensions, dans V; c peut être considéré dans M et constitue ainsi un champ de première espèce dans $A \times B$; alors on a

$$(c \cdot [\bar{c}_1 \times \bar{c}_2]) = (-1)^{q(n-p)} (c \cdot [\bar{c}_1 \cdot \bar{c}_2]). \quad (3)$$

Cette égalité se démontre directement sans aucune difficulté, en utilisant la théorie développée par M. Lefschetz dans son mémoire cité des Transactions.

5. Considérons maintenant deux éléments d'intégrales multiples d'ordres p et q, ω_1 et ω_2, définis respectivement dans les variétés A et B; il leur correspond dans $A \times B$ une intégrale d'ordre $p+q$ dont l'élément sera désigné par $\omega_1 \times \omega_2$. Pour définir cette opération, imaginons que ω_1, exprimé dans le domaine C de A à l'aide des coordonnées $x_1, x_2, \ldots$ se réduise à un monôme $\omega_1 = f(x_1, x_2, \ldots)[dx_{\alpha_1} \ldots dx_{\alpha_p}]$ et soit de même dans le domaine D de B $\omega_2 = g(y_1, y_2, \ldots)[dy_{\beta_1} \ldots dy_{\beta_q}]$, alors on aura par définition, dans le domaine $C \times D$ de $A \times B$:

$$\omega_1 \times \omega_2 = f(x_1, x_2, \ldots)\, g(y_1, y_2, \ldots)\,[dx_{\alpha_1} \ldots dx_{\alpha_p}\; dy_{\beta_1} \ldots dy_{\beta_q}].$$

Si ω_1 et ω_2 ne sont pas des monômes, la définition se ramène au cas examiné grâce à la règle de distributivité.

Cette opération jouit de quelques propriétés très simples. Si c_1 et c_2 sont des champs de première espèce, contenus respectivement dans A et dans B, de dimensions p' et q' telles que $p' + q' = p + q$, on a

$$\left.\begin{aligned} &\int_{c_1 \times c_2} \omega_1 \times \omega_2 = 0 && \text{si } p \neq p' \\ &\int_{c_1 \times c_2} \omega_1 \times \omega_2 = \int_{c_1} \omega_1 \cdot \int_{c_2} \omega_2 && \text{si } p = p' \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Si ω_1 et ω_2 sont des formes fermées, $\omega_1 \times \omega_2$ est aussi une torme fermée. Soient $\bar{c}_1$ et $\bar{c}_2$ les cycles associés à ω_1 et ω_2, contenus respectivement dans A et dans B; nous supposerons ces deux variétés à n dimensions, de sorte que $\bar{c}_1$ et $\bar{c}_2$ ont respectivement $n-p$ et $n-q$ dimensions. Nous allons montrer que le *cycle associé à* $\omega_1 \times \omega_2$ *dans* $A \times B$ *est* $(-1)^{(n-p)q}\, \bar{c}_1 \times \bar{c}_2$, c'est-à-dire que

$$\int_c \omega_1 \times \omega_2 = (-1)^{(n-p)q}\, (c \cdot \bar{c}_1 \times \bar{c}_2) \tag{5}$$

quel que soit le cycle c (de première espèce, à $p+q$ dimensions). Il suffit pour cela de prouver cette égalité lorsque c est pris parmi les cycles d'un système fondamental, cycles qu'on peut supposer de la forme $c_1 \times c_2$, comme nous avons vu, et alors elle est une conséquence immédiate de (2) et (4).

6. La démonstration de notre théorème peut maintenant s'achever sans difficulté. Supposons de nouveau que A et B soient deux exemplaires d'une même variété close à n dimensions V. Deux formes fermées, ω_1 et ω_2, définies dans V, peuvent être considérées aussi dans A, dans B, et dans la variété diagonale M de $A \times B$; de même pour leur produit extérieur $\omega_1 \omega_2$; la forme fermée $\omega_1 \times \omega_2$, définie dans $A \times B$, se réduit précisément, sur la variété diagonale M, à ce produit extérieur $\omega_1 \omega_2$, de sorte que, si c est un cycle de première espèce à $p+q$ dimensions situé dans V, et défini par suite aussi sur M dans $A \times B$, on a

$$\int_c \omega_1 \times \omega_2 = \int_c \omega_1 \omega_2 .$$

Cette égalité, combinée avec (3) et (5), nous donne ($\bar{c}_1$ et $\bar{c}_2$ étant toujours les cycles associés à ω_1 et ω_2)

$$\int_c \omega_1 \omega_2 = (c \cdot [\bar{c}_1 \cdot \bar{c}_2])$$

ce qui exprime précisément notre théorème: $\bar{c}_1 \cdot \bar{c}_2$ est le cycle associé à $\omega_1 \omega_2$.

(Reçu le 31 janvier 1932)