Eine singularitätenfreie Fläche konstanter negativer Krümmung im Hilbertschen Raum.

Eine singularitätenfreie Fläche konstanter negativer Krümmung im Hilbertschen Raum

Von LUDWIG BIEBERBACH, Berlin

$$\dot{s}^2 = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{(1 - r^2)^2}, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad r^2 < 1$$

ist eine quadratische Differentialform von konstanter negativer Krümmung. Der Kreis $r < 1$ mit dieser Maßbestimmung ist, wie man seit *Beltrami* weiß, ein umkehrbar eindeutiges Modell der hyperbolischen ebenen Geometrie. Bekanntlich hat *Hilbert* einer *Klein*schen Vermutung entsprechend bewiesen, daß es im dreidimensionalen Euklidischen Raum keine singularitätenfreie Fläche konstanter negativer Krümmung gibt. Die Frage, ob es in Euklidischen Räumen höherer Dimension singularitätenfreie Flächen konstanter negativer Krümmung gibt, ist noch offen. Hier soll wenigstens für den Euklidischen Raum von unendlich vielen Dimensionen, d. i. der Hilbertsche Raum, eine solche Fläche angegeben werden. Es wird sich dabei zeigen, daß den hyperbolischen Bewegungen Bewegungen im Hilbertschen Raum entsprechen, die unsere Fläche in sich überführen. Durch unsere Betrachtung wird sich auch einiges wenige über die bereits gestreifte Frage betr. Euklidische Räume von endlicher Dimensionszahl ergeben. Den Schluß bildet der Nachweis von *Erhard Schmidt,* daß es in Euklidischen Räumen reguläre Flächen konstanter negativer Krümmung nicht gibt, welche durch eine eingliedrige Gruppe von Bewegungen in sich übergeführt werden.

I. Entwickelt man

$$\frac{1}{(1 - r^2)^2} = 1 + 2r^2 + 3r^4 + \dots,$$

so erhält man

$$\dot{s}^2 = \sum_1^\infty (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\, n\, (x^2 + y^2)^{n-1}.$$

Das einzelne Reihenglied ist eine Differentialform der Krümmung Null. In der Tat ist

$$(\dot{x}^2+\dot{y}^2)\, n\,(x^2+y^2)^{n-1} = \left|\frac{\dot{x}_{2n-1}+i\dot{x}_{2n}}{\sqrt{n}}\right|^2,$$

wenn man

$$(1)\qquad \begin{aligned} x_{2n-1} &= \Re\,\frac{(x+iy)^n}{\sqrt{n}} \\ x_{2n} &= \Im\,\frac{(x+iy)^n}{\sqrt{n}}, \quad n \geqq 1 \end{aligned}$$

setzt. Ferner ist

$$\sum_1^\infty x_\nu^2$$

konvergent. Denn es ist

$$\sum x_\nu^2 = \sum \frac{(x^2+y^2)^n}{n}.$$

Also liegt tatsächlich in (1) eine Fläche konstanter negativer Krümmung im Hilbertschen Raum vor. Sie ist singularitätenfrei. Denn der Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x}, & \frac{\partial x_2}{\partial x}, & \frac{\partial x_3}{\partial x}, & \frac{\partial x_4}{\partial x} \ldots\ldots \\ \frac{\partial x_1}{\partial y}, & \frac{\partial x_2}{\partial y}, & \frac{\partial x_3}{\partial y}, & \frac{\partial x_4}{\partial y} \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

ist stets zwei. Es ist ja schon

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x} & \frac{\partial x_2}{\partial x} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y} & \frac{\partial x_2}{\partial y} \end{vmatrix} = 1.$$

Die Fläche (1) gehört keinem endlichvieldimensionalen Euklidischen Raum an. Denn dann müßte zwischen den Koordinaten der Flächenpunkte mindestens eine Relation

$$a_0 + \sum_\nu a_\nu x_\nu = 0$$

mit konstanten Koeffizienten bestehen. Man setze $x + iy = e^{i\varphi}$. Soll dann

$$a_0 + \sum \frac{(a_{2\nu-1} \cos \nu\varphi + a_{2\nu} \sin \nu\varphi) r^\nu}{\sqrt{\nu}} = 0$$

sein für alle r und alle φ, so folgt $a_\nu = 0$ für alle $\nu \geqq 0$.

II. Jeder Bewegung der hyperbolischen Ebene, d. i. jeder konformen Abbildung des Kreises $r < 1$ auf sich, entspricht eine Biegung der Fläche (1) in sich. *Jede solche automorphe Biegung der Fläche wird durch eine Bewegung des Hilbertschen Raumes dargestellt.*

Setzt man $z = x + iy$, so sind die winkeltreuen Bewegungen der hyperbolischen Ebene durch

$$z_1 = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}, \quad a\bar{a} - b\bar{b} > 0 \tag{2}$$

gegeben. Es sei

$$x_{2n-1} + i x_{2n} = \frac{z^n}{\sqrt{n}}$$

$$y_{2n-1} + i y_{2n} = \frac{z_1^n}{\sqrt{n}}.$$

Nun wird in $|z| < 1$

$$\frac{z_1^n}{\sqrt{n}} = a_n + \sum_k a_{kn} \frac{z^k}{\sqrt{k}}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

Es ist zu zeigen, daß

$$\sum_n a_{kn} \bar{a}_{kn} = 1, \quad \sum_n a_{kn} \bar{a}_{ln} = 0, \quad k \neq l \tag{4}$$

und daß

$$\sum_k a_{kn} \bar{a}_{kn} = 1, \quad \sum_k a_{kn} \bar{a}_{km} = 0, \quad n \neq m. \tag{5}$$

Denn es ist ja nach (3) für $a_n = a'_n + i a''_n$, $a_{kn} = a'_{kn} + i a''_{kn}$.

$$(6)\qquad \begin{aligned} y_{2n-1} &= a'_n + \Sigma\,(a'_{kn}\,x_{2k-1} - a''_{kn}\,x_{2k}) \\ y_{2n} &= a''_n + \Sigma\,(a''_{kn}\,x_{2k-1} + a'_{kn}\,x_{2k}) \end{aligned}$$

(4) und (5) bedeuten daher, daß (6) eine Bewegung darstellt. Die Konvergenz von $\Sigma\,|\,a_n\,|^2$ folgt ja aus $a\bar{a} - b\bar{b} > 0$ unmittelbar.

Wie man leicht sieht, sind die Relationen (4) gleichbedeutend mit

$$(7)\qquad \sum\left(\frac{z_1^n}{\sqrt{n}} - a_n\right)\left(\frac{\bar{z}_1^n}{\sqrt{n}} - \bar{a}_n\right) = \sum \frac{z^k\,\bar{z}^k}{k}\,.$$

Nun ist aber

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{b}{\bar{a}}\right)^n.$$

Also ist (7) für $z_1 = 0$ und für $z = 0$ richtig. Es bleibt noch für $z_1 \neq 0$, $z \neq 0$ zu beweisen. Es ist

$$\sum\left(\frac{z_1^n}{\sqrt{n}} - a_n\right)\left(\frac{\bar{z}_1^n}{\sqrt{n}} - \bar{a}_n\right)$$

$$= \sum \frac{z_1^n\,\bar{z}_1^n}{n} - \sum \frac{1}{n}\left(\frac{b}{\bar{a}}\,\bar{z}_1\right)^n - \sum \frac{1}{n}\left(\frac{\bar{b}}{a}\,z_1\right)^n + \sum \frac{1}{n}\left(\frac{b}{\bar{a}}\cdot\frac{\bar{b}}{a}\right)^n$$

$$= \log \frac{\left(1 - \dfrac{b}{\bar{a}}\,\bar{z}_1\right)\left(1 - \dfrac{\bar{b}}{a}\,z_1\right)}{(1 - z_1\,\bar{z}_1)\left(1 - \dfrac{b}{\bar{a}}\,\dfrac{\bar{b}}{a}\right)}\,.$$

Für $b = 0$ wird dies zu $\log \dfrac{1}{1 - z_1\,\bar{z}_1} = \log \dfrac{1}{1 - z\,\bar{z}}$, da für $b = 0$ sogar $|\,z_1\,| = |\,z\,|$ ist. Damit ist (7) für $b = 0$ bewiesen.

Für $b \neq 0$ aber wird weiter

$$\log \frac{\left(1-\frac{b}{a}\bar{z}_1\right)\left(1-\frac{\bar{b}}{a}z_1\right)}{(1-z_1\bar{z}_1)\left(1-\frac{b}{a}\frac{\bar{b}}{a}\right)}$$

$$= \log \frac{\left(\frac{1}{\bar{z}_1}-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{\bar{b}}-z_1\right)}{\left(\frac{1}{\bar{z}_1}-z_1\right)\left(\frac{a}{\bar{b}}-\frac{b}{a}\right)}$$

$=$ log vom Doppelverhältnis der vier Punkte

$$\frac{1}{\bar{z}_1},\ \frac{a}{\bar{b}},\ \frac{b}{a},\ z_1$$

$=$ log vom Doppelverhältnis der vier Punkte

$$\frac{1}{\bar{z}},\ \infty,\ 0,\ z$$

$$= \log \frac{1}{1-z\bar{z}}.$$

Damit ist (7) und damit (4) bewiesen.

Um auch (5) zu beweisen, multiplizieren wir (3) mit a_{kn} und summieren nach n. Wegen (4) wird dann

$$\frac{z_k}{\sqrt{k}} = A_k + \sum_n a_{kn} \frac{z_1^n}{\sqrt{n}}.$$

Diese Potenzreihen müssen aber mit denjenigen übereinstimmen, die man durch Auflösung von (2) erhält. Wiederholung unserer Schlußweise beweist daher (5).

Um zu zeigen, daß auch diejenigen hyperbolischen Bewegungen, welche die Orientierung ändern, durch Bewegungen des Hilbertschen Raumes dargestellt werden, genügt es, wegen der Gruppeneigenschaft dieser Bewegungen, den Nachweis für die Spiegelung $z_1 = -\bar{z}$ zu erbringen. Dann wird aber

$$y_{2n-1} + i y_{2n} = \frac{z_1^n}{\sqrt{n}} = (-1)^n \frac{\bar{z}^n}{\sqrt{n}} = (-1)^n x_{2n-1} + (-1)^{n+1} i x_{2n}.$$

Also

$$y_{2n-1} = (-1)^n x_{2n-1}, \; y_{2n} = (-1)^{n+1} x_{2n}.$$

Das ist aber eine gewiß eine Bewegung, weil die Relationen (4) und (5) erfüllt sind.

III. Die Fläche (1) ist ein umkehrbar eindeutiges Bild der hyperbolischen Ebene. Verschiedene (x, y) liefern nämlich sogar verschiedene Punkte des Hilbertschen Raumes. Das lehrt schon der Umstand, daß doch $x_1 = x$, $x_2 = y$ ist. Daraus folgt, daß die gefundene Darstellung der Bewegungsgruppe der hyperbolischen Ebene durch Bewegungen des Hilbertschen Raumes eine einstufig isomorphe ist. Dem gegenüber ist es von Interesse, daß es *keine nichttriviale Darstellung der Bewegungsgruppe der hyperbolischen Ebene durch eine Bewegungsgruppe eines endlichdimensionalen Euklidischen Raumes gibt,* selbst dann nicht, wenn man nur verlangt, daß jeder Bewegung der hyperbolischen Ebene im Kleinen genau ein Element der Euklidischen Bewegungsgruppe zugeordnet ist. Die einzige so mögliche Darstellung ist die triviale, bei der die darstellende Euklidische Bewegungsgruppe aus der Identität allein besteht. Der Beweis, den ich hier nicht vorzuführen beabsichtige, beruht darauf, daß je zwei parabolische Operationen der hyperbolischen Bewegungsgruppe durch Operationen der Bewegungsgruppe selbst ähnlich sind und daß sich alle hyperbolischen Bewegungen aus parabolischen zusammensetzen lassen.

Aus diesen Betrachtungen folgt nicht, daß es im n-dimensionalen Euklidischen Raum keine singularitätenfreie Fläche konstanter negativer Krümmung geben kann. Es folgt aber doch, daß es keine solche Fläche geben kann, bei der *jede* automorphe Biegung durch eine Bewegung des umgebenden Raumes dargestellt wird, und zwar weder im kleinen noch im großen.

IV. Zum Schluß möchte ich noch eine Betrachtung von Erhard Schmidt wiedergeben, die wie alles andere hier Vorgeführte aus dem Jahre 1927 stammt. Man kann darnach zeigen, daß es im *n-dimensionalen Euklidischen Raum keine singularitätenfreie Fläche konstanter negativer Krümmung geben kann, die durch eine eingliedrige Gruppe von Euklidischen Bewegungen des ganzen Raumes in sich übergeführt wird.* Bekanntlich ergibt sich jede solche Gruppe aus der Integration eines Systems gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen

$$\dot{x}_i = \sum a_{ik} x_k + a_i, \quad i = 1 \ldots n \tag{8}$$

mit konstanten Koeffizienten a_{ik}, a_i und mit schiefsymmetrischer Matrix der a_{ik}. Als Gruppenparameter, nach dem hier differenziert wird, kann man jeden nehmen, dessen Werte sich bei der Zusammensetzung der entsprechenden Operationen der Gruppe addieren. Nun nehme man an, es gebe eine singularitätenfreie Fläche konstanter negativer Krümmung, die durch eine solche Gruppe in sich übergeführt wird. Man führe auf der Fläche geodätische Koordinaten ein. Und zwar nehme man eine Bahnkurve der Gruppe als $u = 0$, die dazu orthogonalen geodätischen Linien seien $v = \text{const}$, deren orthogonale Trajektorien seien die $u = \text{const}$. Das sind also wieder Bahnkurven der Gruppe. Der Parameter v sei als Bogenlänge auf $u = 0$, der Parameter u als Bogenlänge auf den $v = \text{const}$. gewählt. Ferner erfährt auf jeder Bahnkurve $u = \text{const}$ das Bogenstück zwischen v und $v + \Delta v$ bei Veränderung von v und festem Δv nur eine Bewegung, behält also seine Länge. Daher ist $\frac{ds}{dv}$ auf jeder Kurve $u = \text{const}$ konstant. Daher wird bekanntlich für $K = -1$

$$\dot{s}^2 = \dot{u}^2 + (\operatorname{Cof} u + \alpha \operatorname{Sin} u)^2 \dot{v}^2 \tag{9}$$

wo α konstant, die erste Fundamentalform der Fläche. Die eingeführten Koordinaten sind überall da auf der Fläche brauchbar, wo $\operatorname{Cof} u + \alpha \operatorname{Sin} u \neq 0$ ist. Bei $\alpha \leqq 1$ ist dies für alle u der Fall, bei $\alpha > 1$ gibt es einen Wert $u_0 \neq 0$ für den $\operatorname{Cof} u_0 + \alpha \operatorname{Sin} u_0 = 0$ ist. Dann verwende man (9) für $u < u_0$, wenn $u_0 > 0$ und für $u > u_0$, wenn $u_0 < 0$ ist, so daß also jedesmal $u = 0$ zu den zu betrachtenden u-Werten gehört. Man nehme ein Stück einer Bahnkurve $u = \bar{u}$. Man kann v als Gruppenparameter nehmen. Wegen (8) wird dann darauf

$$\left(\frac{ds}{dv}\right)^2 = \Sigma \dot{x}_i^2 = \Sigma \alpha_{ik} x_i x_k + 2 \Sigma \alpha_i x_i + \alpha_0,$$

wo die α_{ik} und die α_i sich leicht aus den a_{ik} und a_i von (8) ergeben. Sie sind gleichfalls konstant. A^2 sei das Maximum ihrer absoluten Beträge, X das Maximum der $|x_i|$ auf der Bahnkurve. Dann ergibt sich die Abschätzung

$$\left(\frac{ds}{dv}\right)^2 \leqq A^2 (1 + n X)^2.$$

Nun ist offenbar

$$X \leqq X_0 + |\bar{u}|,$$

wo X_0 das Maximum der $|x_i|$ auf dem Stück der Bahnkurve $u = 0$ ist, das zwischen denselben v-Werten liegt, wie das betrachtete Stück von $u = \bar{u}$. Nach (9) ist aber

$$\left(\frac{ds}{dv}\right)^2 = (\mathfrak{Cof}\ \bar{u} + \alpha\ \mathfrak{Sin}\ \bar{u})^2$$

auf dem Bahnkurvenstück. Also wäre

$$\mathfrak{Cof}\ \bar{u} + \alpha\ \mathfrak{Sin}\ \bar{u} \leqq A\,[1 + n\,|X_0 + \bar{u}|]$$

für alle zu betrachtenden $\bar{u}$, zu denen auch solche mit beliebig großem absoluten Betrag gehören. Das ist aber ein offenbarer Unsinn.

(Eingegangen den 20. Februar 1932)