Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 4 (1932)

Artikel: Ueber fastperiodische ebene Bewegungen.
Autor: Bohr, Harald
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-5608

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Ueber fastperiodische ebene Bewegungen

Von HARALD BOHR, Kopenhagen

Inhaltsübersicht.

§ 1. Einleitende Bemerkungen über reinperiodische Bewegungen.
§ 2. Aufstellung der Sätze für fastperiodische Bewegungen.
§ 3. Beweis des Satzes 1.
§ 4. Beziehungen zwischen Verschiebungszahlen und Fourierexponenten.
§ 5. Beweis des Satzes 2.

§ 1. Einleitende Bemerkungen über reinperiodische Bewegungen

Zur Einführung in das in dieser Abhandlung zu behandelnde Problem schicken wir zunächst einige ganz einfache Bemerkungen über reinperiodische ebene Bewegungen voraus.

Es sei $z = f(t) = f_1(t) + i f_2(t)$ eine beliebige, für $-\infty < t < \infty$ definierte, stetige Funktion der reellen Veränderlichen t, welche periodisch ist etwa mit der Periode $p > 0$. Mit E bezeichnen wir die — beschränkte und abgeschlossene — Punktmenge der komplexen Ebene, welche aus allen Punkten der Kurve $z = f(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ besteht. Die Komplementärmenge $C(E)$ ist offen und zerfällt also in (höchstens) abzählbar viele Gebiete, die wir mit $G_0, G_1, \ldots, G_n, \ldots$ bezeichnen, wobei G_0 etwa dasjenige dieser Gebiete angeben soll, welches den unendlich fern gelegenen Teil der Ebene enthält. Die Gebiete $G_1, G_2, \ldots$ sind übrigens alle einfach zusammenhängend (und das Gebiet G_0 wird es natürlich auch sein, wenn wir es auf der Riemann'schen Kugel betrachten).

Es sei nun a ein beliebiger Punkt der Menge $C(E)$, etwa dem Gebiete G_ν angehörig. Wir betrachten die gegebene periodische Bewegung $z = f(t)$ von dem Punkte a aus, indem wir

$$f(t) - a = \varrho_a(t) \cdot e^{i\varphi_a(t)} \tag{1}$$

setzen. Hierbei ist der absolute Betrag $\varrho_a(t) = |f(t) - a|$ natürlich wieder periodisch mit der Periode p, während das durch die Forderung der Stetigkeit in Verbindung etwa mit der normierenden Festsetzung

$-\pi \leqq \varphi_a(0) < \pi$ eindeutig bestimmte Argument $\varphi_a(t)$ in der Gestalt

$$\varphi_a(t) = c_a \cdot t + \psi_a(t) \tag{2}$$

darstellbar ist, wobei die „Säkularkonstante" c_a ein ganzzahliges Multiplum von $\frac{2\pi}{p}$ und $\psi_a(t)$ wiederum eine periodische Funktion der Periode p ist. Die Richtigkeit der Gleichung (2) mit der angegebenen Bedeutung von c_a und $\psi_a(t)$ ergibt sich sofort folgendermaßen: Es ist

$$e^{i\varphi_a(t)} = \frac{f(t) - a}{|f(t) - a|}$$

periodisch mit der Periode p, d. h. es ist $e^{i\varphi_a(t+p)} = e^{i\varphi_a(t)}$ für alle t. Hieraus folgt zunächst, daß für jeden festen Wert von t die Differenz $\varphi_a(t+p) - \varphi_a(t)$ ein ganzes Multiplum von 2π ist, und hieraus weiter, da $\varphi_a(t)$ stetig ist, daß dieses Multiplum für alle t dasselbe ist. Es gibt also eine ganze Zahl n_a, so daß für alle t

$$\varphi_a(t+p) - \varphi_a(t) = n_a \cdot 2\pi$$

d. h.

$$\varphi_a(t+p) - n_a \frac{2\pi}{p}(t+p) = \varphi_a(t) - n_a \frac{2\pi}{p} t\,;$$

dies bedeutet aber, daß die Funktion

$$\varphi_a(t) - n_a \frac{2\pi}{p} t$$

eine periodische Funktion der Periode p ist; nennen wir sie $\psi_a(t)$, so wird also

$$\varphi_a(t) = n_a \frac{2\pi}{p} t + \psi_a(t)$$

wie behauptet.

Wir fügen hinzu, daß der Wert der ganzen Zahl n_a (und damit der Säkularkonstanten c_a) nur von dem Gebiete G_ν abhängt, in welchem der Punkt a gelegen ist, d. h. für zwei beliebige Punkte a_1 und a_2 des-

selben Gebietes G_ν ist $n_{a_1} = n_{a_2}$; denn für alle Punkte a' einer hinreichend kleinen Umgebung von a gilt offenbar die Gleichung $n_{a'} = n_a$, und die beiden genannten Punkte a_1 und a_2 lassen sich durch eine innerhalb G_ν verlaufende stetige Kurve verbinden.

Um die vorhergehenden einfachen Ergebnisse über reinperiodische Bewegungen direkt als Spezialfälle der unten zu beweisenden allgemeinen Sätze über fastperiodische Bewegungen erscheinen zu lassen, müssen wir dem obigen Resultate über die Säkularkonstante c_a, nämlich daß diese ein ganzes Multiplum von $\frac{2\pi}{p}$ ist, eine etwas andere Form geben, und zwar dadurch daß wir die Fourierreihe der Funktion $f(t)$ heranziehen. Bei den fastperiodischen Funktionen ist nämlich von einer „Periode" p keine Rede mehr, dagegen gibt es immer noch den Begriff der Fourierreihe. Nehmen wir an, daß $p > 0$ die kleinst mögliche Periode der periodischen Funktion $f(t)$ bezeichnet (eine solche gibt es ja immer, abgesehen von dem trivialen Fall $f(t) =$ constans), und schreiben wir die Fourierreihe von $f(t)$ in der Gestalt

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in \frac{2\pi}{p} t},$$

können wir wohl nicht behaupten, daß die Säkularkonstante $c_a = n_a \frac{2\pi}{p}$ gerade eine der Fourierexponenten ist, weil ja „zufälligerweise" der entsprechende Koeffizient α_{n_a} gleich Null sein könnte, wohl aber können wir behaupten, daß c_a als linearer homogener Ausdruck mit ganzzahligen Koeffizienten in endlich vielen tatsächlich auftretenden Fourierexponenten $n_q \cdot \frac{2\pi}{p}$ geschrieben werden kann, d. h. daß n_a in der Form

$$n_a = g_1 n_1 + g_2 n_2 + \ldots + g_Q n_Q$$

darstellbar ist. Denn wegen der Primitivität der Periode p haben die Gesamtheit aller Zahlen n mit $\alpha_n \neq 0$ keinen gemeinsamen Teiler, und es lassen sich somit endlich viele dieser Zahlen n, etwa $n_1, n_2, \ldots, n_Q$, herausgreifen, welche teilerfremd sind; durch lineare ganzzahlige Kombination dieser Zahlen n_q kann aber jede ganze Zahl, also speziell unsere Zahl n_a gebildet werden.

§ 2. Aufstellung der Sätze für fastperiodische Bewegungen

Zunächst erinnern wir an die Definition der Fastperiodizität und einige anschließende Begriffe [1]).

Eine für $-\infty < t < \infty$ stetige Funktion $f(t) = f_1(t) + i f_2(t)$ heißt fastperiodisch, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine „relativ dichte" Menge von Verschiebungszahlen τ gibt, d. h. Zahlen $\tau = \tau_f(\varepsilon)$, für welche die Ungleichung

$$|f(t+\tau) - f(t)| \leqq \varepsilon$$

für alle t besteht; hierbei soll eine auf der t-Achse liegende Menge relativ dicht heißen, wenn es eine Länge L gibt, so daß jedes Intervall $\alpha < t < \beta$ dieser Länge L mindestens eine Zahl der Menge enthält.

Aus der Definition ergibt sich leicht (F. I S. 35—36), daß eine fastperiodische Funktion beschränkt und für $-\infty < t < \infty$ gleichmäßig stetig ist.

Jeder fastperiodischen Funktion $f(t)$ ist eine Fourierreihe

$$f(t) \sim \Sigma A_n e^{i\Lambda_n t}$$

mit reellen Exponenten Λ_n und komplexen Koeffizienten A_n ($\neq 0$) zugeordnet (F. I S. 49).

Unter dem Modul M_f der fastperiodischen Funktion $f(t)$ versteht man, nach *Bochner* [2]), den kleinsten Zahlenmodul, welcher die sämtlichen Fourierexponenten Λ_n enthält, also die Zahlenmenge M_f, welche aus allen Zahlen der Form

$$g_1 \Lambda_1 + g_2 \Lambda_2 + \ldots + g_N \Lambda_N$$

mit beliebigem N und beliebigen ganzen Koeffizienten $g_1, \ldots, g_N$ besteht.

Es sei nunmehr $z = f(t)$ eine beliebige fastperiodische Funktion. Mit E bezeichnen wir die — beschränkte, im allgemeinen aber nicht abgeschlossene — Punktmenge der komplexen Ebene, welche aus allen Punkten der Kurve $z = f(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ besteht; ferner bezeichne E^* die abgeschlossene Hülle von E. Die Komplementärmenge $C(E^*)$ ist

---

[1]) *H. Bohr,* Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen I und II, Acta Mathematica Bd. 45, S. 29—127 und Bd. 46, S. 101—214. Diese beiden Abhandlungen werden wir im Folgenden mit F. I und F. II zitieren.

[2]) *S. Bochner,* Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen I, Math. Annalen Bd. 96, S. 119—147.

offen und zerfällt also in (höchstens) abzählbar viele Gebiete G_0, G_1, ..., G_n, ..., die übrigens, ganz wie im reinperiodischen Fall, einfach zusammenhängend sind.

Bei beliebiger fester Wahl eines Punktes a der Komplementärmenge $C(E^*)$ betrachten wir nun die fastperiodische Bewegung $z = f(t)$ von dem Punkte a aus, indem wir

$$f(t) - a = \varrho_a(t) \cdot e^{i\varphi_a(t)}$$

setzen, wobei das Argument $\varphi_a(t)$ stetig gewählt wird.

Unsere Aufgabe ist, die beiden Funktionen $\varrho_a(t)$ und $\varphi_a(t)$ näher zu studieren. Wir formulieren unsere Ergebnisse in den beiden folgenden Sätzen:

Satz 1. *Der absolute Betrag $\varrho_a(t) = |f(t) - a|$ ist (offensichtlich) fastperiodisch. Das Argument $\varphi_a(t)$ läßt sich in der Gestalt*

$$\varphi_a(t) = c_a \cdot t + \psi_a(t)$$

darstellen, wobei c_a eine Konstante ist, und $\psi_a(t)$ fastperiodisch ist.

Bemerkung. Aus dem Satze 1 folgt sofort — wegen der Beschränktheit des fastperiodischen Restgliedes $\psi_a(t)$ — daß

$$c_a = \lim_{t \to \infty} \frac{\varphi_a(t)}{t}$$

ist, und daraus weiter (ganz wie im reinperiodischen Fall), daß der Wert der Konstanten c_a nicht von dem Punkte a sondern nur von dem Gebiete G_ν abhängt, in welchem a gelegen ist.

Satz 2. *Die Säkularkonstante c_a gehört dem Modul M_f der gegebenen fastperiodischen Funktion $f(t)$ an. Ferner sind sowohl der Modul M_{ϱ_a} wie auch der Modul M_{ψ_a} in diesem Modul M_f enthalten.*

Bei den unten folgenden Beweisen dieser beiden Sätze können wir offenbar ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß der außerhalb der Menge E^* gelegene Punkt a gerade der Anfangspunkt o ist; sonst ersetze man nur $f(t)$ durch $f(t) - a$, wobei zu berücksichtigen ist, daß der Modul M_{f-a} gleich dem ursprünglichen Modul M_f ist[3]).

[3]) Nur in dem Falle, wo $f(t)$ konstant ist und gerade den Wert o oder a besitzt, wird der Modul M_f von dem Modul M_{f-a} verschieden sein, indem hier der eine dieser beiden Moduln nur aus der einzigen Zahl o besteht, während der andere sogar leer ist. Von dem trivialen Fall $f(t) =$ constans werden wir aber im Folgenden der Bequemlichkeit halber absehen.

Formuliert für den Fall $a = 0$ ist der Satz 1 schon in einer früheren Note des Verfassers bewiesen [4]). Da wir aber den Gedankengang des Beweises für das Folgende benötigen, werden wir uns erlauben den recht einfachen Beweis kurz zu wiederholen. Dies geschieht in § 3. In § 4 werden wir an einige bekannte Beziehungen zwischen Verschiebungszahlen und Fourierexponenten einer fastperiodischen Funktion erinnern und daraus einige Folgerungen ziehen. Schließlich werden wir in § 5 den Beweis des Satzes 2 erbringen.

§ 3. Beweis des Satzes 1

Es sei $f(t) = \varrho(t)\, e^{i\varphi(t)}$ eine beliebige fastperiodische Funktion, für welche die untere Grenze von $\varrho(t) = |f(t)|$ positiv ist. Dann ist, wie unmittelbar zu beweisen, der Quotient

$$\chi(t) = \frac{f(t)}{|f(t)|} = e^{i\varphi(t)}$$

wiederum fastperiodisch; denn falls $k > 0$ die untere Grenze und K die obere Grenze von $|f(t)|$ bezeichnet, folgt sofort durch eine triviale Abschätzung, daß bei beliebig gegebenem $\varepsilon > 0$ jede Verschiebungszahl $\tau_f(\varepsilon)$ zugleich eine Verschiebungszahl $\tau_\chi(\varepsilon')$ für $\varepsilon' = \frac{2K}{k^2}\,\varepsilon$ darstellt. Um die Richtigkeit des Satzes 1 darzutun, genügt es also folgendes zu beweisen:

Aus der Fastperiodizität von $\chi(t) = e^{i\varphi(t)}$ folgt, daß $\varphi(t)$ in der Form

$$\varphi(t) = c \cdot t + \psi(t)$$

mit konstantem c und fastperiodischem $\psi(t)$ darstellbar ist.

Zum Beweise dieses Satzes gehen wir von der folgenden Bemerkung aus: Besteht für irgendein $\varepsilon < 2$ und irgendwelche Zahlen t und τ die Ungleichung

$$|\chi(t+\tau) - \chi(t)| = |e^{i\varphi(t+\tau)} - e^{i\varphi(t)}| \leqq \varepsilon, \tag{3}$$

dann gibt es eine eindeutig bestimmte ganze Zahl g, für die

$$|\varphi(t+\tau) - \varphi(t) - g \cdot 2\pi| \leqq \varepsilon \cdot \frac{\pi}{2} \tag{4}$$

[4]) *H. Bohr,* Kleinere Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen, I, Kgl. Danske Videnskabernes Selskab, math.-fys. Meddelelser, X, 10.

ist; ferner ist diese Zahl g, wegen der Stetigkeit von $\varphi(t)$, unabhängig von t und τ in jeder solchen zusammenhängenden Punktmenge der $t\tau$-Ebene, auf welcher die Ungleichung (3) gilt. Mit Hilfe dieser Bemerkung führen wir den Beweis in drei Schritten: Zunächst wird die gleichmäßige Stetigkeit der Funktion $\varphi(t)$ aus der der (fastperiodischen) Funktion $\chi(t) = e^{i\varphi(t)}$ gefolgert; sodann mit Hilfe der Existenz beliebig großer Verschiebungszahlen von $\chi(t)$ die Konstante c definiert, und endlich für diesen Wert von c, jetzt erst mit voller Ausnutzung der Fastperiodizität von $\chi(t)$, die Fastperiodizität von $\varphi(t) - ct$ bewiesen.

1. Die gleichmäßige Stetigkeit von $\chi(t)$ besagt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so daß, sobald $|\tau| \leqq \delta$, die Ungleichung (3) für alle t des ganzen Intervalles $-\infty < t < \infty$ besteht. Wir wählen $\varepsilon < 2$; nach dem soeben Gesagten folgt dann aus dieser Ungleichung, ebenfalls für $|\tau| \geqq \delta$ und alle t, die Richtigkeit einer Ungleichung (4) mit einer passenden festen ganzen Zahl g; diese muß aber gleich Null sein, weil für $\tau = 0$ die Ungleichung die Form $|g \cdot 2\pi| \leqq \varepsilon \frac{\pi}{2} < \pi$ annimmt. Für $g = 0$ besagt (4) aber eben die gleichmäßige Stetigkeit von $\varphi(t)$.

Aus der gleichmäßigen Stetigkeit von $\varphi(t)$ ergibt sich sofort die folgende weitere Eigenschaft dieser Funktion: Zu jedem $\tau > 0$ gibt es ein $K = K(\tau) > 0$, so daß, sobald $|k| < \tau$ ist, gleichzeitig für alle t

$$|\varphi(t+k) - \varphi(t)| < K$$

ist.

2. Um den Wert der Konstanten c zu definieren, betrachten wir für irgendein t und irgendein $s > 0$ den Quotienten

$$q(t, s) = \frac{\varphi(t+s) - \varphi(t)}{s};$$

wir werden beweisen, daß $q(t, s)$ für $s \to \infty$ gleichmäßig in t einem bestimmten Grenzwerte c zustrebt. Dazu genügt es zu zeigen, daß für hinreichend großes S der Unterschied zwischen der oberen und der unteren Grenze von $q(t, s)$ im Gebiete $-\infty < t < \infty$, $s > S$ beliebig klein ist.

Sei $\varepsilon < 2$ und $\tau = \tau_\chi(\varepsilon) > 1$ eine (festgewählte) zugehörige Verschiebungszahl der Funktion $\chi(t)$. Für alle t besteht dann die Ungleichung (3), also auch eine Ungleichung (4) mit einer gewissen festen, d. h. von

t unabhängigen, ganzen Zahl g. Sei jetzt $s > \tau$ eine beliebige Zahl; um den Quotienten $q(t, s)$ abzuschätzen, schreiben wir s in der Form $s = n\tau + k$ mit ganzem n und $0 \leqq k < \tau$; dann folgt aus

$$\varphi(t+s) - \varphi(t) = \varphi(t+s) - \varphi(t+n\tau) + \sum_{\nu=1}^{n} \{\varphi(t+\nu\tau) - \varphi(t+(\nu-1)\tau)\}$$

in Verbindung mit der Schlußbemerkung von 1. und der Ungleichung (4) ohne weiteres für alle t

$$|\varphi(t+s) - \varphi(t) - n \cdot g \cdot 2\pi| \leqq K(\tau) + n \cdot \varepsilon \cdot \frac{\pi}{2},$$

also, nach Division mit s, wegen $\frac{n}{s} \leqq \frac{1}{\tau} < 1$,

$$\left| q(t, s) - \frac{g \cdot 2\pi}{\tau + \frac{k}{n}} \right| \leqq \frac{K(\tau)}{s} + \varepsilon \frac{\pi}{2}.$$

Hieraus folgt aber, daß für hinreichend großes S der Unterschied zwischen der oberen und der unteren Grenze von $q(t, s)$ für $-\infty < t < \infty$ und $s > S$ kleiner als z. B. $3 \cdot \varepsilon \cdot \frac{\pi}{2}$ sein wird, womit die aufgestellte Behauptung über $q(t, s)$ bewiesen ist.

3. Mit der gefundenen Konstanten c betrachten wir jetzt die Funktion $\psi(t) = \varphi(t) - ct$. Unsere Aufgabe ist, die Fastperiodizität von $\psi(t)$ zu beweisen. Bemerken wir zunächst, daß es hierfür hinreichend ist, den Fall $c = 0$ zu betrachten, wo $\psi(t) = \varphi(t)$ ist; die Funktion $\psi(t)$ steht nämlich in derselben Beziehung zur fastperiodischen Funktion $e^{i\psi(t)} = e^{i\varphi(t)} \cdot e^{-ict}$ wie $\varphi(t)$ zur Funktion $e^{i\varphi(t)}$, und für $\psi(t)$ ist offenbar der Grenzwert

$$\lim_{s \to \infty} \frac{\psi(t+s) - \psi(t)}{s}$$

gleich Null.

Unter der Annahme $c = 0$ beweisen wir die Fastperiodizität von $\varphi(t)$, indem wir zeigen, daß bei einem beliebig gewählten $\varepsilon < 2$ jede zu ε gehörige Verschiebungszahl der Funktion $\chi(t) = e^{i\varphi(t)}$ zugleich eine zu $\varepsilon \cdot \frac{\pi}{2}$ gehörige Verschiebungszahl von $\varphi(t)$ darstellt. Sei also $\varepsilon < 2$; wie

oben gezeigt, gibt es dann zu jeder Verschiebungszahl $\tau = \tau_\chi(\varepsilon)$, d. h. zu jeder Zahl τ für welche die Ungleichung (3) für alle t besteht, eine von t unabhängige ganze Zahl $g = g_\tau$, so daß die Ungleichung (4) ebenfalls für alle t besteht. Wir haben zu beweisen, daß hierbei immer $g = 0$ sein muß. Wäre dies nicht der Fall, d. h. gäbe es ein τ mit $g \neq 0$, so würde für dieses τ entweder für alle t die Ungleichung

$$\varphi(t + \tau) - \varphi(t) > \pi$$

oder für alle t die Ungleichung

$$\varphi(t + \tau) - \varphi(t) < -\pi$$

gelten, also beidemal für jede natürliche Zahl n die Ungleichung

$$|\varphi(t + n|\tau|) - \varphi(t)| > n\pi$$

also

$$|c| = \lim_{n \to \infty} \frac{|\varphi(t + n|\tau|) - \varphi(t)|}{n|\tau|} \geqq \frac{\pi}{|\tau|} > 0,$$

gegen unsere Annahme.

§ 4. Beziehungen zwischen Verschiebungszahlen und Fourierexponenten

In der Abhandlung F. II wurden (S. 105 bezw. S. 110) die beiden folgenden Sätze bewiesen, welche — unter Heranziehung der Fourierexponenten — eine notwendige bezw. eine hinreichende Bedingung angaben, damit die Zahl τ eine Verschiebungszahl sei.

Satz A. *Es sei $f(t) \sim \Sigma A_n e^{i\Lambda_n t}$ eine fastperiodische Funktion, und es sei eine Anzahl N und eine „Genauigkeit" $\delta < \pi$ beliebig gegeben. Dann gibt es ein $\varepsilon = \varepsilon(N, \delta)$ derart, daß jede Verschiebungszahl $\tau_f(\varepsilon)$ die N diophantischen Ungleichungen*

$$|\Lambda_n \tau| < \delta \pmod{2\pi} \qquad (n = 1, 2, \ldots, N)$$

befriedigt[5])

[5]) Unter der Schreibweise $|a| < b \pmod{c}$ verstehen wir wie üblich, daß eine ganze Zahl g derart existiert, daß $|a - gc| < b$ ist.

Satz B. *Es sei wiederum* $f(t) \sim \Sigma A_n e^{i\Lambda_n t}$ *eine fastperiodische Funktion; diesmal sei aber* $\varepsilon > 0$ *beliebig gegeben. Dann gibt es eine Anzahl* N *und eine Genauigkeit* δ *derart, daß jede Zahl* τ *eine Verschiebungszahl* $\tau_f(\varepsilon)$ *ist, wenn sie nur die* N *diophantischen Ungleichungen*

$$|\Lambda_n \tau| < \delta \pmod{2\pi} \qquad (n = 1, 2, \ldots, N)$$

erfüllt.

Ferner erinnern wir an den folgenden Satz über diophantische Ungleichungen (F. II, S. 113), welcher aus einem allgemeinen Kronecker'schen Satze direkt abgeleitet werden kann.

Satz C. *Es seien* $\Lambda_1, \ldots \Lambda_N$ *beliebige reelle Zahlen, und* μ *eine Zahl, die nicht in der Form* $n_1 \Lambda_1 + \ldots + n_N \Lambda_N$ *mit ganzzahligen* n_ν *darstellbar ist. Dann gibt es bei jedem* $\delta > 0$ *eine Zahl* τ, *welche gleichzeitig die* $N + 1$ *diophantischen Ungleichungen*

$$|\Lambda_n \tau| < \delta \pmod{2\pi} \quad (n = 1, \ldots, N) \text{ und } |\mu\tau - \pi| < \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

erfüllt.

Mit Hilfe dieser drei Sätze können wir sofort, durch eine schon in F. II vom Verfasser, und später auch von *Bochner* (l. c.) angewandte Schlußweise, den folgenden Satz beweisen.

Satz D. *Es seien* $f(t) \sim \Sigma A_n e^{i\Lambda_n t}$ *und* $g(t) \sim \Sigma B_n e^{iM_n t}$ *zwei fastperiodische Funktionen mit den Moduln* M_f *bezw.* M_g. *Damit* M_g *in* M_f *enthalten sei, ist notwendig und hinreichend, daß die Fastperiodizität von* $g(t)$ *im folgenden Sinne von der Fastperiodizität von* $f(t)$ *„majorisiert" wird: Zu jedem* $\varepsilon_1 > 0$ *gibt es ein* $\varepsilon_2 > 0$, *so daß jede Verschiebungszahl* $\tau_f(\varepsilon_2)$ *zugleich eine Verschiebungszahl* $\tau_g(\varepsilon_1)$ *ist.*

Beweis: 1. Zunächst zeigen wir, daß wenn M_g in M_f enthalten ist — also jeder Exponent M_n als linearer homogener Ausdruck in endlich vielen Exponenten Λ_ν mit ganzzahligen Koeffizienten darstellbar ist — so wird $g(t)$ im obigen Sinne von $f(t)$ majorisiert. Zu diesem Zwecke bestimmen wir zunächst zu dem beliebig gegebenen ε_1, nach dem Satze B, ein N_1 und ein δ_1, so daß jede Lösung τ der Ungleichungen

$$(5) \qquad |\tau M_n| < \delta_1 \pmod{2\pi} \qquad (n = 1, \ldots, N_1)$$

eine Verschiebungszahl $\tau_g(\varepsilon_1)$ ist. Danach bestimmen wir, wegen der

Darstellbarkeit der Zahlen M_n durch die Zahlen Λ_n, ein N_2 und ein δ_2, so daß jede Lösung der Ungleichungen

$$(6) \qquad |\tau \Lambda_n| < \delta_2 \pmod{2\pi} \qquad (n = 1, \ldots, N_2)$$

zugleich den obigen N_1 Ungleichungen (5) genügt und also gewiß ein $\tau_g(\varepsilon_1)$ ist. Schließlich bestimmen wir, nach dem Satze A, zu den Zahlen N_2, δ_2 ein ε_2, so daß jede Verschiebungszahl $\tau_f(\varepsilon_2)$ die N_2 Ungleichungen (6) befriedigt. Dann ist offenbar jedes $\tau_f(\varepsilon_2)$ zugleich ein $\tau_g(\varepsilon_1)$.

2. Danach zeigen wir umgekehrt, daß wenn $g(t)$ im obigen Sinne von $f(t)$ majorisiert wird, so muß M_g in M_f enthalten sein. Wir führen den Beweis indirekt, nehmen also an, daß $g(t)$ einen Fourierexponent $M_n = \mu$ besitzt, der nicht linear mit ganzzahligen Koeffizienten durch endlich viele Λ_n darstellbar ist. In Satz A ist speziell enthalten, daß wir ε_1 so wählen können, daß eine Lösung τ der Ungleichung

$$(7) \qquad |\tau\mu - \pi| < \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

gewiß keine Verschiebungszahl $\tau_g(\varepsilon_1)$ sein kann. Zu diesem ε_1 gibt es aber kein entsprechendes ε_2 (womit der Widerspruch erreicht ist). Denn wie klein auch ε_2 gewählt wird, können wir, nach Satz B, die Zahlen N und δ so wählen, daß jede Lösung τ der Ungleichungen

$$(8) \qquad |\tau \Lambda_n| < \delta \pmod{2\pi} \qquad (n = 1, \ldots, N)$$

eine Verschiebungszahl $\tau_f(\varepsilon_2)$ ist. Nach Satz C haben aber die $N+1$ Ungleichungen (7) und (8) eine gemeinsame Lösung, d. h. es gibt ein $\tau_f(\varepsilon_2)$, welches kein $\tau_g(\varepsilon_1)$ ist.

§ 5. Beweis des Satzes 2

Es sei $f(t) \sim \Sigma A_n e^{i\Lambda_n t}$ eine fastperiodische Funktion, für welche die untere Grenze von $|f(t)|$ positiv ist. Wir schreiben $f(t) = \varrho(t) e^{i\varphi(t)}$ mit

$$\varrho(t) = |f(t)| \quad , \quad \varphi(t) = ct + \psi(t)$$

und haben zu beweisen,

1. *daß die beiden Moduln M_ϱ und M_ψ in dem Modul M_f enthalten sind, und*
2. *daß die Säkularkonstante c eine Zahl aus diesem Modul ist.*

Da jede Verschiebungszahl $\tau_f(\varepsilon)$ a fortiori eine Verschiebungszahl $\tau_\rho(\varepsilon)$ ist, folgt sofort aus dem Satze D des § 4, daß M_ρ in M_f enthalten ist.

Ferner folgt aus dem genannten Satze D, daß der Modul M_χ der fastperiodischen Funktion $\chi(t) = e^{i\varphi(t)}$ in dem Modul M_f enthalten ist; denn, wie am Anfang des § 3 erwähnt, gilt es bei beliebigem ε_1, und $\varepsilon_2 = \frac{k^2}{2K}\varepsilon_1$ (wo k und K die untere bezw. obere Grenze von $|f(t)|$ bezeichnet), daß jede Verschiebungszahl $\tau_f(\varepsilon_2)$ zugleich eine Verchiebungszahl $\tau_\chi(\varepsilon_1)$ darstellt, so daß $\chi(t)$ von $f(t)$ majorisiert wird.

Unsere Behauptungen über M_ψ und c sind also a fortiori dargetan, wenn wir zeigen, daß M_ψ und c in M_χ enthalten sind.

In dem speziellen Fall $c = 0$ können wir sofort einsehen, stets durch Heranziehung des Satzes D, daß M_ψ in M_χ enthalten ist; denn am Ende des Beweises in § 3 haben wir ja (für den Fall $c = 0$) schon gezeigt, daß $\psi(t) = \varphi(t)$ von $\chi(t) = e^{i\varphi(t)}$ majorisiert wird; es war ja (für $\varepsilon < \pi$) jede Verschiebungszahl $\tau_\chi(\frac{2}{\pi}\varepsilon)$ zugleich eine Verschiebungszahl $\tau_\varphi(\varepsilon)$.

Ferner ist klar, daß wenn wir für einen Moment die Richtigkeit der Behauptung über c annimmt — also daß c in M_χ enthalten ist — folgt aus der vorangehenden Bemerkung, daß auch in dem allgemeinen Fall $c \neq 0$ der Modul M_ψ in M_χ enthalten ist. Denn es ist ja

$$e^{i\psi(t)} = e^{i\varphi(t)} \cdot e^{-ict} = \chi(t)\, e^{-ict},$$

und wenn schon c in M_χ enthalten ist, kann beim Uebergang von $\chi(t)$ zu $\chi(t)\, e^{-ict}$ (was einfach eine Erniedrigung aller Fourierexponenten von $\chi(t)$ durch die Größe c bedeutet) der Modul offenbar nicht vergrößert werden.

Alles ist also darauf zurückgeführt zu zeigen, *daß die Säkularkonstante c linear homogen mit ganzzahligen Koeffizienten durch endlich viele der Fourierexponenten von $\chi(t) \sim \Sigma\, \alpha_n e^{i\lambda_n t}$ ausgedrückt werden kann.*

Dies geschieht dadurch, daß wir zunächst eine Relation zwischen der Konstanten c und den Verschiebungszahlen τ_χ herleiten (welche die für den reinperiodischen Fall gültige triviale Relation $c = \frac{2\pi}{p} n$ auf den fastperiodischen Fall verallgemeinert), und danach die Beziehungen zwischen Verschiebungszahlen und Fourierexponenten aus § 4 heranziehen.

Die erwähnte Relation besagt: Es sei $\varepsilon < 2$ beliebig gegeben; dann gilt für jede der Verschiebungszahlen $\tau = \tau_\chi(\varepsilon) \neq 0$ eine Gleichung der Form

$$(9) \qquad c = \frac{2\pi}{\tau} n_\tau + \frac{\varepsilon'}{\tau} \text{ mit ganzzahligem } n_\tau \text{ und } |\varepsilon'| \leqq \varepsilon \cdot \frac{\pi}{2};$$

mit anderen Worten: Jede Verschiebungszahl $\tau = \tau_\chi(\varepsilon)$ ist eine Lösung der diophantischen Ungleichung

$$(10) \qquad |\tau c| \leqq \varepsilon \cdot \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

Um diese Relation (9) darzutun, brauchen wir nur auf die Ueberlegungen von § 3 zurückzugreifen. Diese ergeben uns sofort für jedes ganze $m \neq 0$ die Ungleichung

$$|\varphi(m\tau) - \varphi(0) - m \cdot 2\pi n_\tau| \leqq m \cdot \varepsilon \frac{\pi}{2}$$

also

$$\left| \frac{\varphi(m\tau) - \varphi(0)}{m\tau} - \frac{2\pi}{\tau} n_\tau \right| \leqq \frac{\varepsilon \frac{\pi}{2}}{|\tau|},$$

wobei n_τ eine (von m unabhängige) ganze Zahl bedeutet. Lassen wir in dieser Ungleichung m über alle Grenzen wachsen, strebt der Quotient $\frac{\varphi(m\tau) - \varphi(0)}{m\tau}$ gegen den Grenzwert c, und wir erhalten die gewünschte Gleichung (9).

Nunmehr wenden wir die Schlußweise aus § 4 an. Indem wir ε etwa gleich 1 wählen, bestimmen wir nach dem Satze B ein N und ein δ, so daß jede Lösung der diophantischen Ungleichungen

$$(11) \qquad |\tau \lambda_n| < \delta \pmod{2\pi} \qquad (n = 1, \ldots, N)$$

eine Verschiebungszahl $\tau_\chi(\varepsilon)$ ist. Nach dem obigen muß also j e d e Lösung dieser Ungleichungen (11) zugleich die Ungleichung (10) (mit $\varepsilon = 1$) befriedigen, kann also gewiß n i c h t der Ungleichung

$$(12) \qquad |\tau c - \pi| < \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

genügen. Hieraus folgt aber nach dem Satze C des § 4, daß c notwendigerweise eine lineare ganzzahlige Kombination der Größen $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ sein muß; denn sonst gäbe es ja nach dem genannten Satze eine gemeinsame Lösung τ der Ungleichungen (11) und (12). Also ist c in M_χ enthalten, womit der Beweis zu Ende geführt ist.

(Eingegangen den 9. Dezember 1931)