Asymptotische Abschätzung des absoluten Betrages einer Funktion, die die Werte 0 und 1 nicht annimmt.

Autor(en): **Ostrowski, Alexander**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **5 (1933)**

PDF erstellt am: **17.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-6655

Asymptotische Abschätzung des absoluten Betrages einer Funktion, die die Werte 0 und 1 nicht annimmt

Von Alexander Ostrowski, Basel

Es sei $p(z)$ eine Funktion, die für $|z| < 1$ regulär und von 0 und 1 verschieden ist. Dann gilt bekanntlich nach *Schottky* die Ungleichung

(a) $$\underset{|z| \leqq r < 1}{|p(z)|} < \Omega(p_0, r), \quad p_0 = p(0),$$

wo Ω nur von r und p_0, sogar nur *von r und einer Schranke für* $|p_0|$ abhängt. Daraus folgen insbesondere die Abschätzungen

(b) $$|p^{(\nu)}(0)| \leqq L_\nu(p_0), \quad \nu = 1, 2, \ldots,$$

wo auch L_ν nur von einer Schranke für $|p_0|$ abhängen.

Ueber Ω ist durch Hrn. *Landau*[1]) bekannt, daß es sich durch

(α) $$\Omega(p_0, r) \leqq (A\,|p_0| + B)^{\frac{C}{1-r}}$$

abschätzen läßt, mit absoluten positiven Konstanten A, B, C; ferner durch Hrn. *Valiron*, daß sogar

(β) $$\Omega(p_0, r) \leqq (A(|p_0| + 1))^{\frac{1+r}{1-r}}$$

gilt für eine gewisse absolute Konstante A, deren Wert nicht abgeschätzt wurde[2]). Andererseits kann man mit einer elementaren (d. h. in diesem Falle nur algebraische Hilfsfunktionen benutzenden) Methode beweisen: Für $|p_0| \leqq e^d$, $d \geqq 0$ gilt

(γ) $$\Omega(p_0, r) \leqq 1 + e^{-16\, e^{12{,}1 \cdot \frac{1}{1-r} + 2{,}7 \left(\lg\left(\frac{e}{1-r}\right)\right) \frac{1}{1-r}\, e^{\frac{4{,}5}{1-r} d}}},$$

1) Vgl. den von Hrn. *Landau* herrührenden § 6 in der Abhandlung von *Bohr* und *Landau*, Gött. Nachr. 1910, pp. 303—330, übrigens auch die Formel (54) in § 12 der Abhandlung von Hrn. *Landau:* Ueber den Picard'schen Satz. Vierteljahresschr. d. Zürch. Naturf. Ges. 1906.

2) Vgl. *G. Valiron*, Bull. d. Sc. Math., Bd. 51 (1927).

wo also die Größenordnung in $1-r$ schlechter ist, wohl aber die numerischen Schranken verhältnismäßig kleine Werte haben, was beim Gebrauche für kleinere r, z. B. $r = \frac{1}{2}$ von Wichtigkeit ist[3]).

Wir wollen nun mit $S^*(a, r)$ die obere Grenze der absoluten Beträge von $|p(z)|$ für $|z| \leqq r < 1$ für alle Funktionen $p(z)$ mit $|p(0)| = a$ bezeichnen, die für $|z| < 1$ regulär und $\neq 0$, $\neq 1$ sind; ferner mit $S(\alpha, r)$ die obere Grenze von $|p(z)|$ für $|z| \leqq r < 1$ für alle solche Funktionen mit $p(0) = \alpha$; endlich mit $\Phi(\alpha, r)$ die obere Grenze von

$$|\arg p(z) - \arg p(0)|$$

für $|z| \leqq r < 1$ für eine solche Funktion $p(z)$ mit $p(0) = \alpha$ (natürlich bei stetiger Fortsetzung des Arguments). Dann kann man die obigen Abschätzungen (α), (β), (γ) als Abschätzungen von $S^*(a, r)$ und $S(\alpha, r)$ nach oben auffassen. Für $\Phi(\alpha, r)$ ist durch Hrn. *P. Lévy*[4]) bekannt

$$(\delta) \qquad \Phi(\alpha, r) \leqq \frac{c(\alpha)}{1-r}, \quad c(\alpha) > 0.$$

An Abschätzungen nach unten ist bisher nur bekannt (durch Hrn. *P. Lévy*, l. c.)

$$(\varepsilon) \qquad |\lg S(\alpha, r) + i\,\Phi(\alpha, r| \geqq \frac{c_1(\alpha)}{1-r}, \quad c_1(\alpha) > 0.$$

Nun sind für L_ν asymptotisch genaue Schranken bekannt durch den (übrigens elementar, d. h. ohne Benutzung der Modulfunktion beweisbaren) Satz:

Ist für $p_0 = \alpha$, $\varphi_\nu(\alpha)$ die obere Grenze aller $|p^{(\nu)}(0)|$, so gilt für $\alpha \to \infty$ und ebenso für $\alpha \to 0$

$$(\mathrm{b}^*) \qquad \frac{\varphi_\nu(\alpha)}{|\alpha|\,|\lg|\alpha||^\nu} \to \frac{2^\nu}{\nu!}\text{ [5]).}$$

Es sollen nun im folgenden in demselben Sinne asymptotisch genaue Schranken für S^* und S ermittelt werden. Hier handelt es sich aller-

[3]) Vgl. *A. Ostrowski*, Studien über den Schottky'schen Satz, Rektoratsprogramm der Univ. Basel für 1931 (als selbständige Schrift erschienen im Verlag von B. Wepf & Cie., Basel), pp. 96—102.

[4]) Vgl. *P. Lévy*, Bull. Soc. Math. d. France, 1912. Einen anderen Beweis gibt *J. E. Littlewood*, Proc. Lond. Math. Soc. (2), 23 (1924), pp. 490, 509—510.

[5]) Vgl. *A. Ostrowski*, Berliner Sitzungsberichte, 1925, (math.-physik. Klasse) pp. 483-484. Für $\nu = 1$ rührt diese Formel von Hrn. *Landau* her (Vierteljahrsschrift Zürch. Nat. Ges. 51, 1906), dessen Resultat später von *Gronwall*, Paris C. R. 155 (1912), pp. 764—766 und *Bernays*, Zürch. Vierteljahrsschr. 58 (1913), pp. 203—238 auf anderem Wege hergeleitet wurde

dings um Funktionen von zwei Variabeln (a, r) bezw. (α, r). Dementsprechend sind verschiedene Auffassungen des asymptotischen Verhaltens möglich.

Wir werden im ersten Teil dieser Mitteilung (§§ 1—3, Formelnummern 1—20) r fest $(0 < r < 1)$ annehmen und $|p_0| \to \infty$ gehen lassen. Es ergibt sich eine asymptotische Relation für $S^*(a, r)$:

$$(A) \qquad 16\, S^*(|p_0|, r) \sim (16\,|p_0|)^{\frac{1+r}{1-r}}, \; |p_0| \to \infty,$$

und zwar *gleichmäßig* in r. Hieraus folgt insbesondere, daß der *Valiron*'sche Exponent $\frac{1+r}{1-r}$ in (β) sogar in dem Sinne der genaue ist, daß er sich für kein einziges r mit $0 < r < 1$ verkleinern läßt, selbst auf Kosten der Vergrößerung der Zahlenkoeffizienten.

Der Beweis beruht wesentlich auf der Benutzung der elliptischen Modulfunktion. Zur Untersuchung von $p(z)$ ist die Heranziehung von $\lambda(z)$, des *Legendre*'schen Modulquadrates, also einer Modulfunktion 2ter Stufe notwendig. Andererseits hat die absolute Invariante $J(z)$ den Vorteil, daß ihre Entwicklung nach Potenzen von $q = e^{\pi i z}$ *positive* Koeffizienten hat. Wir kombinieren daher die Betrachtung beider Funktionen. Dies bringt mit sich, daß wir zugleich — und sogar zuerst — die analogen Abschätzungen für Funktionen $m(z)$ herleiten, die für $|z| < 1$ regulär, den Wert 0 nur in dreifacher Mehrfachheit, den Wert 1 nur in doppelter Mehrfachheit annehmen. Es ergeben sich ganz analoge Resultate, nur muß die Konstante 16 durch 1728 ersetzt werden[6].

Es ist übrigens von prinzipiellem Interesse, daß die ganze Untersuchung sogar unter Benutzung der absoluten Invariante $J(z)$ allein durchgeführt werden kann, wenn man vom folgenden Satz ausgehen will, der ja aus der Theorie der Modulfunktionen leicht herzuleiten ist, aber auch elementar nicht schwer zu beweisen ist: Es gilt die Relation

$$(c) \qquad m(z) = \frac{4}{27}\,\frac{(p^2(z) - p(z) + 1)^3}{p^2(z)\,(1 - p(z))^2},$$

in dem Sinne, daß wenn rechts ein $p(z)$ eingesetzt wird, links ein $m(z)$ herauskommt und umgekehrt, wenn man die Gleichung bei gegebenem

[6]) Bei *Valiron* und in einer früheren Untersuchung von *Landau* (l. c.) wird zur Abschätzung von $p(z)$ nur die J-Funktion benutzt, sodaß die betreffenden Abschätzungen sich zugleich auf alle $m(z)$ - Funktionen beziehen. Zum Nachweis aber, daß die so gefundenen Abschätzungen für $p(z)$ die „besten" sind, ist prinzipiell die Heranziehung von $\lambda(z)$ nötig.

$m(z)$ nach $p(z)$ auflöst, ergeben sich 6 verschiedene Funktionen $p(z)$, die auseinander mit Hilfe der bekannten Ausdrücke $1-p$, $\frac{1}{p}$, $1-\frac{1}{p}$, $\frac{p}{p-1}$, $\frac{1}{1-p}$ hervorgehen.

Mit Hilfe dieses Satzes kann man erstens das Analogon des *Schottky*'schen Satzes für Funktionen $m(z)$ direkt und elementar aus dem elementar beweisbaren *Schottky*'schen Satz für $p(z)$ folgern, während der direkte elementare Beweis für $m(z)$ mit keiner der bisherigen Methoden geht, wobei man ja $\lg m(z)$ oder $\sqrt[n]{m(z)}$ betrachten müßte. Sodann aber lassen sich auf analogem Wege auch die Fälle quantitativ genau untersuchen, die verschiedenen *Schwarz*'schen Dreiecksfunktionen entsprechen, und insbesondere auch für Scharen meromorpher Funktionen, die Hr. *Montel* daraus gewonnen hat, quantitative Abschätzungen finden. Darauf hoffe ich in späteren Mitteilungen eingehen zu können.

Die Benutzung der (c) entsprechenden Relation zwischen $J(z)$ und $\lambda(z)$ stellt den eigentlichen Gedanken dar, auf dem die Betrachtungen des ersten Teiles dieser Mitteilung beruhen. Im Uebrigen lassen sich diese Ueberlegungen durchführen, ohne daß man auf Einzelheiten der zu $J(z)$ und $\lambda(z)$ gehörenden Modulfiguren eingeht. Ueberdies reicht die Formel (A) für viele Zwecke aus.

Ferner legt (A) die Frage nahe, ob die gleiche Relation auch für $S(\alpha, r)$ mit $\alpha \to \infty$ gültig bleibt. Endlich kann man fragen, ob für feste α der Grenzwert $(1-r)\log S(\alpha, r)$ für $r \to 1$ existiert und bestimmt werden kann. Beide Fragen werden in bejahendem Sinne im zweiten Teil dieser Mitteilung (§§ 4–8, Formelnummern 21—52) beantwortet. Zugleich wird auch die Frage nach dem Verhalten von $S(\alpha, r)$ für $\alpha \to 0$ entschieden. In dieser Beziehung lautet das einzige in der Literatur zu findende Resultat, das (1927 l. c.) von *G. Valiron* gefunden wurde:

$$S(p_0, r) < B^{\frac{1}{1-r}} |p_0|^{\frac{1-r}{1+r}}.$$

Andererseits ließe sich aus der auch hierbei ihre Geschmeidigkeit neu erweisenden *Montel*'schen Theorie der normalen Funktionenfamilien leicht direkt folgern, daß $S(\alpha, r) \to 0$ mit $\alpha \to 0$ gelten muß. Wir finden nun, daß

$$(B) \qquad \frac{S(p_0, r)}{16} \sim \left|\frac{p_0}{16}\right|^{\frac{1-r}{1+r}}$$

gilt für $|p_0|^{1-r} \to 0$ gleichmäßig in p_0 und r, wobei auch das Fehlerglied sich weiter abschätzen läßt. Man kann also in der *Valiron*schen Formel $B^{\frac{1}{1-r}}$ durch eine *absolute Konstante* ersetzen. Was nun das Verhalten von $S(\alpha, r)$ für $\alpha \to \infty$ oder $r \to 1$ anbetrifft, so bezeichnen wir mit $\omega(z)$ denjenigen Zweig der Umkehrfunktion von $\lambda(z)$, dessen Werte im Fundamentalbereiche von $\lambda(z)$ liegen, der zwischen den Halbstrahlen $\mathfrak{J}z > 0$, $\mathfrak{R}z = \pm 1$ und den Halbkreisen $|z \pm \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$, $\mathfrak{J}z > 0$ liegt. Dann lautet unser wesentlichstes Ergebnis, das als Verallgemeinerung von (A) aufzufassen ist:

$$(\Gamma) \qquad S(p_0, r) \sim \frac{1}{16} e^{\pi \mathfrak{J}\omega(p_0)\frac{1+r}{1-r}}, \quad \mathfrak{J}\omega(p_0)\frac{1+r}{1-r} \to \infty,$$

und sogar noch schärfer:

$$(\Gamma^*) \qquad S(p_0, r) - \frac{1}{16} e^{\pi \mathfrak{J}\omega(p_0)\frac{1+r}{1-r}} = o(1), \quad \mathfrak{J}\omega(p_0)\frac{1+r}{1-r} \to \infty.$$

Daraus folgt insbesondere für feste p_0

$$(\Delta) \qquad (1-r)\lg S(p_0, r) \to 2\pi \mathfrak{J}\omega(p_0), \qquad r \uparrow 1.$$

Und für feste r und $p_0 \to \infty$ ergibt sich aus (Γ)

$$(A^*) \qquad 16\, S(p_0, r) \sim (16|p_0|)^{\frac{1+r}{1-r}}, \quad p_0 \to \infty,$$

gleichmäßig in r und $\arg p_0$. Für die genaue Formulierung der zum Teil noch schärferen Ergebnisse vgl. man in § 8 die Formeln I—VI**.

Methodisch ist aber zum zweiten Teil dieser Mitteilung folgendes zu bemerken: Es ist seit der ersten Arbeit von Hrn. *Carathéodory* über den *Picard*'schen Satz bekannt, daß $S(p_0, r)$ gleich dem max $|\lambda(z)|$ für alle Punkte einer gewissen Kreislinie K ist, die ganz in der oberen Halbebene verläuft und den Punkt $\omega(p_0)$ zu ihrem „nicht euklidischen Mittelpunkt" hat. Und die Höhe μ des höchsten Punktes von K über der reellen Axe ist gleich $\mathfrak{J}\omega(p_0)\frac{1+r}{1-r}$. Man würde also ohne weiteres eine Abschätzung von $S(p_0, r)$ erhalten durch das Maximum von $|\lambda(z)|$ auf der Strecke $\mathfrak{J}z = \mu$, $|\mathfrak{R}z| \leq 1$, wenn nicht auch Punkte der unteren

Kreishälfte in der Nähe gewisser Punkte der reellen Axe liegen würden, wo $\lambda(z)$ auch ∞ wird. Man kann nun dem so begegnen, daß man solche Punkte von K, die außerhalb des oben angegebenen Fundamentalbereiches liegen, durch eine Substitution der zu $\lambda(z)$ gehörenden Gruppe in den Fundamentalbereich bringt. Dann muß man aber die Höhe der „reduzierten" Punkte über der x-Axe kennen und insbesondere mit μ vergleichen können. Die Frage läßt sich so wenden, daß man sämtliche Kreise betrachtet, in die K durch die hier zulässigen Modulsubstitutionen übergeführt wird, und nach dem Maximum der zugehörigen Höhen μ' fragt. Und die Wendung, die damit der Frage gegeben wird, findet nun ihre Rechtfertigung im Resultat, daß *alle sich so ergebenden Höhen die Höhe des höchsten Punktes von K nicht überschreiten können*, sofern der nichteuklidische Mittelpunkt von K im obigen Fundamentalbereich liegt. Mit dieser Tatsache (Hilfssatz B in § 4), deren Beweis nachträglich sehr leicht zu führen ist, ist die Hauptschwierigkeit überwunden, die wohl bisher einer genauen Durchrechnung der asymptotischen Werte von S im Wege stand[7]). Eine ähnliche Tatsache (Hilfssatz A § 4) gilt übrigens auch für die gesamte Modulgruppe, die zur Funktion $J(z)$ gehört. Es dürften sich damit auch analoge Abschätzungen für die Funktion $m(z)$ herleiten lassen. Obgleich man, was die Form dieser Abschätzung anbetrifft, einige neue und interessante Momente erwarten dürfte, bin ich dieser Frage nicht mehr nachgegangen. Ich hoffe, daß darüber demnächst eine Mitteilung von anderer Seite erfolgen wird.

Daß aber die Betrachtung der Strecke $\mathfrak{J} z = \mu$ auf den asymptotisch genauen Wert von $S(p_0, r)$ führt, ist dem glücklichen Umstand zu verdanken, daß das asymptotische Verhalten von $\lambda(z)$ für $\mathfrak{J} z \uparrow \infty$ in der hier in betracht kommenden Näherung unabhängig vom Realteil von z ist.

Analoge sehr genaue Abschätzungen lassen sich auch für $\Phi(p_0, r)$ — die Argumentschranke von $p(z)$ — aufstellen. Man findet für $r \uparrow 1$

$$(\Delta_1) \qquad (1 - r)\, \Phi(p_0, r) \to \pi \max\left(\mathfrak{J}\, \omega(p_0),\ \mathfrak{J} \frac{-1}{\omega(p_0)}\right),$$

7) Ein Versuch einer ähnlichen Reduktion des Problems findet sich am Schlusse der bekannten Arbeit von *G. Pick* (Ueber eine Eigenschaft der konformen Abbildung kreisförmiger Bereiche, Math. Ann. Bd. 77 (1916), pp. 1—6), in der zum ersten Mal die „nichteuklidische" Auffassung des Schwarzschen Lemmas herausgearbeitet wurde. Doch sind die bezüglichen Angaben von Hrn. *Pick* nicht stichhaltig, da die Bemerkung auf p. 5 unten: „weil $|\lambda(z)|$ auf Parallelen zur Axe der imaginären Zahlen nach oben zunimmt", sicher unzutreffend ist, wenn das betreffende Stück jener Parallelen aus dem Fundamentalbereich austritt und in die Nähe von Unendlichkeitsstellen von $\lambda(z)$ auf der reellen Axe kommt.

und noch schärfer

$$(\Delta_2) \qquad \left|\Phi(p_0, r) - \frac{2\pi r}{1-r^2} \max\left(\mathfrak{J}\,\omega(p_0), \mathfrak{J}\frac{-1}{\omega(p_0)}\right)\right| \leqq 11.$$

Zum Beweis dieser Abschätzungen haben wir indessen sehr ausführlich auf die geometrische Struktur der Modulfigur eingehen müssen. Und da eine Darstellung dieser Entwicklungen im Rahmen der vorliegenden Mitteilung keine Abkürzung der gesamten Darstellung bedeuten würde, soll der Beweis von (Δ_1) und (Δ_2) an einer anderen Stelle (in der Math. Zeitschrift, unter dem Titel: *Asymptotische Abschätzung der Argumentvariation einer Funktion, die die Werte 0 und 1 nicht annimmt)* erscheinen.

§ 1. Funktionen $J(z)$ und $\lambda(z)$

Wir gehen von der elliptischen Modulfunktion $J(z)$ aus, von der wir folgende bekannte und leicht herleitbare Eigenschaften voraussetzen:

Die Funktion $J(z)$ ist in der oberen Halbebene $\mathfrak{J}\,z > 0$ definiert, durchweg regulär und genügt insbesondere der Relation

$$(1) \qquad J(z) = J\left(-\frac{1}{z}\right).$$

Setzt man $e^{\pi i z} = q$, so gilt für $J(z)$ die bekannte Darstellung

$$(2) \qquad J(z) = \frac{1}{q^2}\left(\frac{1}{12} + 20\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\right)^3 \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^{-24},$$

deren rechte Seite mit q^2 multipliziert eine für $|q| < 1$ konvergente Potenzreihe mit *positiven* Koeffizienten und dem Anfangsgliede $\frac{1}{12^3}$ darstellt, also insbesondere monoton in q^2 ist. Es folgt daher für $|q| \downarrow 0$, $\mathfrak{J}\,z \uparrow \infty$, $P \uparrow \infty$:

$$(3) \qquad 12^3 q^2 J(z) \to 1, \quad 12^3 e^{-2\pi P} J(iP) \downarrow 1.$$

Für rein imaginäre ω ist $J(\omega)$ positiv. Es gilt wegen der Positivität der Koeffizienten von (2)

$$(4) \qquad |J(z)| \leqq J(i\,\mathfrak{J}\,z).$$

Endlich sei noch erwähnt, daß $J(z)$ alle endlichen Werte im „Fundamentalbereich“

$$(5)\qquad |z|>1,\ -\frac{1}{2}<\Re z\leqq\frac{1}{2}\ \text{und}\ |z|=1,\ 0\leqq\Re z\leqq\frac{1}{2}$$

annimmt, und zwar jeden von 0 und 1 verschiedenen Wert genau einmal, den Wert 0 im „Eckpunkte" $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, der an drei verschiedene Aequivalenzbereiche anstößt, als eine dreifache Nullstelle, und den Wert 1 im „Eckpunkte" i, der zwei verschiedenen Aequivalenzbereichen angehört, als eine Doppelwurzel von $J(z)-1$. Insbesondere konvergiert die einzige im Bereich (5) liegende Wurzel der Gleichung

$$(5a)\qquad J(z)=w,\ w\neq 0,\ w\neq 1,$$

mit ins Unendliche wachsendem $|w|$ gegen ∞ (und dann gilt natürlich auch $\Im z\to\infty$) und umgekehrt. Beachtet man, daß $J(z)$ auf der imaginären Achse von i bis $i\cdot\infty$ jeden Wert $\geqq 1$ nur einmal annimmt, und auf der Strecke von i bis 0 dieselben Werte von neuem annimmt, so folgt, daß wenn man längs der imaginären Achse von $i\cdot\infty$ nach dem Nullpunkt geht, die reellen Werte von $J(z)$ zuerst monoton bis 1 abnehmen und sodann wieder bis ∞ anwachsen. Daraus folgt:

Ist $a>b\geqq 1$ bzw. $0<a<b\leqq 1$, so gilt

$$(5b)\qquad J(ib)<J(ia).$$

Neben der Modulfunktion $J(z)$ müssen wir noch eine sogenannte „Modulfunktion 2-ter Stufe" $\lambda(z)$ betrachten, die man am einfachsten erhält, wenn man das Innere des Gebietes ($\mathfrak{H}$ in der Fig. des § 4):

$$(6)\qquad 0<\Re z<1,\ |z-\tfrac{1}{2}|>\tfrac{1}{2}$$

auf die obere λ-Halbebene $\Im\lambda>0$ so konform abbildet, daß die Randpunkte 0, 1, ∞ sich selbst entsprechen, und sodann die Abbildungsfunktion durch fortgesetzte Spiegelung analytisch fortsetzt. Diese Funktion hängt mit $J(z)$ durch die folgende Relation zusammen:

$$(7)\qquad J(z)=\frac{4}{27}\,\frac{(\lambda^2-\lambda+1)^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2}\,.$$

Aus (7) folgt für ins Unendliche wachsende Werte von $\lambda(z)$ bzw. (für $|\lambda|\geqq 2$) für ins Unendliche wachsende Werte von $J(z)$:

(8) $$J(z) \sim \frac{4}{27}\lambda^2(z), \quad \lambda(z) \sim \frac{3\sqrt{3}}{2}\sqrt{J(z)}\,,$$

wo natürlich eine passende Bestimmung der Wurzel zu nehmen ist[8]).

Es sei endlich an die Formel erinnert:

(8a) $$\lambda\left(\frac{-1}{z}\right) = \frac{1}{\lambda(z)}.$$

§ 2. Abschätzung von $m(z)$

Für die Anwendungen der Funktionen $J(z)$ und $\lambda(z)$ auf Probleme aus dem *Picard*schen Ideenkreis sind nun die beiden Tatsachen fundamental, die wir so formulieren können:

1. *Dafür, daß $p(z)$ eine für $|z| < 1$ reguläre und dort die Werte 0 und 1 nicht annehmende Funktion ist, ist notwendig und hinreichend, daß die Darstellung gilt:*

(9) $$p(z) = \lambda(C(z)),$$

wo $C(z)$ eine für $|z| < 1$ reguläre Funktion ist, deren Imaginärteil für $|z| < 1$ stets positiv ist.

Hat $p(0) = p_0$ nicht negativen Imaginärteil, so kann und soll $C(z)$ so gewählt werden, daß $C(0) = c_0$ im Bereiche (6) liegt.

2. *Dafür, daß $m(z)$ für $|z| < 1$ regulär ist und dort in jedem Punkte 1 nur in gerader, 0 nur in durch 3 teilbarer Mehrfachheit annimmt, ist notwendig und hinreichend, daß die Darstellung gilt:*

(10) $$m(z) = J(C(z)),$$

wo $C(z)$ eine für $|z| < 1$ reguläre Funktion mit $\Im\, C(z) > 0$ ist. Insbesondere kann und soll $C(z)$ so gewählt werden, daß $C(0) = c_0$ im Bereich (5) liegt.

Für die Herleitung des *Schottky*schen Satzes ist weiter die folgende Tatsache wichtig, die zur Untersuchung der „*Picard*schen Probleme“ zum ersten Male von *Borel* und sodann von *Carathéodory* herangezogen und vom letzteren auf einem besonders einfachen Wege — mit Hilfe des *Schwarz*schen Lemmas — bewiesen worden ist:

---

[8]) In der Literatur wird die λ-Funktion oft so definiert, daß sie für $\omega = 0, 1, \infty$ die Werte $1, \infty, 0$ annimmt. Diese λ-Funktion ergibt sich aus der obigen durch die Transformation $\lambda^* = \frac{1}{1-\lambda}$ und genügt gleichfalls der Relation (7).

Ist für $|z| < 1$ durchweg $\mathfrak{J}\, C(z) > 0$, so gilt, $\omega = C(0)$ gesetzt,

$$(11) \qquad \mathfrak{J}\,\omega \frac{1-|z|}{1+|z|} \leqq \mathfrak{J}\, C(z) \leqq \mathfrak{J}\,\omega \frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

Hier gilt für die Funktion

$$(12) \qquad C^*(z) = iP \frac{1+z}{1-z}, \quad P > 0,$$

offenbar das Gleichheitszeichen für reelle $z > 0$.

Genauer liegen die Werte von $C(z)$ innerhalb des Kreises $K_{\omega, |z|}$

$$(11\text{a}) \qquad \left| C(z) - \mathfrak{R}\,\omega - \mathfrak{J}\,\omega \frac{1+|z|^2}{1-|z|^2} \right| \leqq \mathfrak{J}\,\omega \frac{2|z|}{1-|z|^2}$$

mit dem Mittelpunkt $\mathfrak{R}\,\omega + \mathfrak{J}\,\omega \dfrac{1+r^2}{1-r^2}$ und dem Radius $\mathfrak{J}\,\omega \dfrac{2r}{1-r^2}$, $|z| = r$ gesetzt. Und für die Funktion

$$(12\text{a}) \qquad C^{**}(z) = x + iy \frac{1+z}{1-z}, \quad y > 0, \quad C^{**}(0) = \omega = x + iy$$

erfüllen die Werte von $C^{**}(z)$ für $|z| \leqq r$ den Kreis $K_{\omega, r}$ vollständig.

Nun folgt aus (10) und (4)

$$|m(z)| \leqq J(i\,\mathfrak{J}\, C(z)).$$

Ist hier $\mathfrak{J}\, C(z) \geqq 1$, so folgt aus (5b) und (11) wegen des monotonen Anwachsens von $J(iu)$ für u zwischen 1 und ∞:

$$|m(z)| \leqq J\left(i\,\mathfrak{J}\, c_0 \frac{1+|z|}{1-|z|}\right).$$

Ist aber $\mathfrak{J}\, C(z) < 1$, so folgt nach (5b) und (11) wegen des monotonen Abnehmens von $J(iu)$ für u zwischen 0 und 1 unter Benutzung von (1):

$$|m(z)| \leqq J\left(i\,\mathfrak{J}\, c_0 \frac{1-|z|}{1+|z|}\right) = J\left(i \frac{1}{\mathfrak{J}\, c_0} \frac{1+|z|}{1-|z|}\right).$$

Da aber jetzt wegen (11) $\mathfrak{J} c_0 \frac{1-|z|}{1+|z|} < 1$ ist, muß $\frac{1}{\mathfrak{J} c_0} \frac{1+|z|}{1-|z|} > 1$ sein, so daß für $\mathfrak{J} c_0 \geqq 1$, wegen des Monotoniecharakters von $J(iu)$, $J\left(i \frac{1}{\mathfrak{J} c_0} \frac{1+|z|}{1-|z|}\right)$ nicht verkleinert wird, wenn $\frac{1}{\mathfrak{J} c_0}$ durch $\mathfrak{J} c_0$ ersetzt wird. Daher folgt, daß jedenfalls für $\mathfrak{J} c_0 \geqq 1$

(13) $$|m(z)| \leqq J\left(i \mathfrak{J} c_0 \frac{1+|z|}{1-|z|}\right), \quad \mathfrak{J} c_0 \geqq 1,$$

gilt. Wird aber insbesondere nach (12)

(13a) $$m^*(z) = J(C^*(z)) = J\left(i P \frac{1+z}{1-z}\right)$$

gesetzt, so gilt für $z = r > 0$:

(13b) $$m^*(r) = J\left(i P \frac{1+r}{1-r}\right), \quad 0 < r < 1.$$

Nach (3) folgt nun aus (13):

(14) $$|m(z)| \leqq \frac{1+\varepsilon_1}{12^3} e^{2\pi \mathfrak{J} c_0 \frac{1+|z|}{1-|z|}}, \quad \mathfrak{J} c_0 \geqq 1,$$

wo $\varepsilon_1 \downarrow 0$ für $\mathfrak{J} c_0 \uparrow \infty$ gilt. Für $m^*(r)$ folgt aber aus der zweiten Relation (3)

(14a) $$m^*(r) > \frac{1}{12^3} e^{2\pi P \frac{1+r}{1-r}}, \quad 0 < r < 1.$$

Wie hängt nun $\mathfrak{J} c_0$ mit $m_0 = m(0)$ zusammen? Aus (10) folgt insbesondere

$$m_0 = J(c_0).$$

Da hier c_0 im Bereiche (5) liegt, folgt aus dem oben über die Gleichung (5a) Gesagten, daß für $|m_0| \to \infty$ auch $\mathfrak{J} c_0 \to \infty$ gilt. Daher liefert dann (3):

$$12^3 e^{2\pi i c_0} m_0 \rightarrow 1,$$

$$12^3 e^{-2\pi \Im c_0} |m_0| \geqq \frac{1}{1+\varepsilon_2},$$

wo $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(|m_0|) \downarrow 0$ für $|m_0| \uparrow \infty$ ist. Daraus folgt

$$e^{2\pi \Im c_0} \leqq (1+\varepsilon_2)\, 12^3 |m_0|,$$

und daher nach (14):

(15) $$\left|12^3 m(z)\right|_{|z|\leqq r<1} \leqq \left((1+\varepsilon_3)\, 12^3 |m_0|\right)^{\frac{1+r}{1-r}}, \quad \varepsilon_3 \downarrow 0 \text{ für } |m_0| \uparrow \infty.$$

Man kann (15) auch so schreiben:

(16) $$|m(z)|_{|z|\leqq r<1} \leqq 12^{6\frac{r}{1-r}} \left((1+\varepsilon)\,|m_0|\right)^{\frac{1+r}{1-r}}.$$

Andererseits ist aber nach dem Obigen

$$m_0^* = m^*(0) = J(C^*(0)) = J(iP)$$

eine monotone Funktion von $P \geqq 1$, die für $1 \leqq P < \infty$ alle positiven Werte von $J(i) = 1$ bis ∞ durchläuft. Daher gilt für $m_0^* \uparrow \infty$:

$$12^3 m_0^* e^{-2\pi P} \downarrow 1,$$

$$e^{2\pi P} = (1-\varepsilon)\, 12^3 m_0^*, \quad \varepsilon \downarrow 0 \text{ für } m_0^* \uparrow \infty.$$

Dann liefert (14a):

(16a) $$12^3 m^*(r) > \left((1-\varepsilon)\, 12^3 m_0^*\right)^{\frac{1+r}{1-r}}, \quad \varepsilon \downarrow 0 \text{ für } m_0^* \uparrow \infty.$$

§ 3. Abschätzung von $p(z)$

Wir betrachten nun $p(z)$ für absolut große $p(0) = p_0$, und zwar zuerst mit $\Im p_0 \geqq 0$, und machen Gebrauch von der Relation (9), betrachten aber zugleich für das $C(z)$ aus (9) die Funktion $m(z) = J(C(z))$. Es gilt dann nach (15):

$$\left|12^3 m(z)\right|_{|z| \leqq r < 1} \leqq \left|(1+\varepsilon)\, 12^3 m(0)\right|^{\frac{1+r}{1-r}}, \quad \varepsilon = \varepsilon(|m(0)|) \downarrow 0 \text{ mit } |m(0)| \uparrow \infty.$$

Für $p_0 = \lambda(c_0) \longrightarrow \infty$ folgt nun aus (8) für $m(0) = m_0$:

$$m_0 \sim \frac{4}{27} p_0^2, \quad p_0 \to \infty,$$

so daß die obige Abschätzung in

$$\left|12^3 m(z)\right|_{|z| \leqq r < 1} \leqq \left|(1+\varepsilon)\, 2^8 p_0^2\right|^{\frac{1+r}{1-r}}, \quad \varepsilon \downarrow 0 \text{ mit } |p_0| \uparrow \infty \tag{17}$$

übergeht.

Aus $m(z) = J(C(z))$, $p(z) = \lambda(C(z))$ folgt weiter nach (8), sobald $p(z)| \geqq 2$ ist:

$$\left|2^8 p^2(z)\right|_{|z| \leqq r < 1} \leqq \left|(1+\varepsilon_1)\, 2^8 p_0^2\right|^{\frac{1+r}{1-r}}. \tag{18}$$

Sobald aber $|p_0| > 2$ ist, gilt diese Relation auch für $|p(z)| \leqq 2$, wenn man $\varepsilon_1(p_0)$ langsam genug gegen 0 abnehmen läßt, so daß wir nun ganz allgemein schließen können:

$$\left|16 p(z)\right|_{|z| \leqq r < 1} \leqq \left|(1+\varepsilon)\, 16 p_0\right|^{\frac{1+r}{1-r}}, \quad \varepsilon \downarrow 0 \text{ mit } |p_0| \uparrow \infty. \tag{19}$$

Andererseits betrachten wir für die Funktion $C^*(z)$ aus (12)

$$p^*(z) = \lambda(C^*(z)) = \lambda\left(iP\frac{1+z}{1-z}\right).$$

Für positive r liegt nun der Wert von $p^*(r) = \lambda\left(iP\dfrac{1+r}{1-r}\right)$, wegen der Symmetrie der konformen Abbildung, auf der Geraden $\Re z = \frac{1}{2}$ und wandert auf dieser Geraden mit P monoton ins Unendliche. Daher folgt aus (16a) wegen (8)

$$|2^8 p^{*2}(r)| \geqq |(1-\varepsilon)\, 2^8 p^{*2}(0)|^{\frac{1+r}{1-r}}, \quad \varepsilon \downarrow 0 \text{ mit } P \uparrow \infty,$$

oder

$$|16 p^*(r)| \geqq |(1-\varepsilon)\, 16 p^*(0)|^{\frac{1+r}{1-r}}, \quad \varepsilon \downarrow 0 \text{ mit } P \uparrow \infty. \tag{20}$$

Ist aber $\Im p_0 < 0$, so läßt sich die ganze Deduktion auf die Potenzreihe um den Nullpunkt mit konjugiert komplexen Koeffizienten anwenden, so daß dann (19) für diese Potenzreihe gilt und daher auch für $p(z)$.

Die Relation (16a) zeigt nun, daß in einer Abschätzung vom Typus

$$|m(z)| \leqq |(1+\varepsilon) A_r m(0)|^{\varphi(r)}, \quad \varepsilon = \varepsilon(|m(0)|) \downarrow 0 \text{ mit } |m(0)| \uparrow \infty.$$

für kein einziges r, $0 < r < 1$, für $\varphi(r)$ eine kleinere Zahl als $\frac{1+r}{1-r}$ gesetzt werden kann, noch für $\varphi(r) = \frac{1+r}{1-r}$ ein kleineres A_r als 12^3.

Betrachtet man allgemein eine Abschätzung vom Typus

$$|A_r m(z)| \leqq |(1+\varepsilon) B_r m(0)|^{\varphi(r)}, \quad \varepsilon \downarrow 0, \quad |m(0)| \uparrow \infty,$$

so kann in ihr $\varphi(r)$ für kein einziges r durch eine kleinere Zahl als $\frac{1+r}{1-r}$ ersetzt werden, wie A_r und B_r auch gewählt werden mögen. Soll aber diese Abschätzung für $\varphi(r) = \frac{1+r}{1-r}$ für unendlich viele $r_\nu \uparrow 1$ gelten und hängen A_r, B_r von r nicht ab, so muß $B_r \geqq 12^3$ sein.

In demselben Sinne ist unsere Abschätzung (19) für $p(z)$ die beste, wenn in den obigen Formulierungen 12^3 durch 16 ersetzt wird.

§ 4. Ueber die Aequivalenz von Kreisen in der Modulfigur

Wir betrachten für $\omega = x + iy$, $y > 0$ und $0 < r < 1$ den Kreis $\mathfrak{K}_{\omega, r}$ um den Mittelpunkt e_0 mit dem Radius R, wo

$$(21) \qquad e_0 = x + iy\frac{1+r^2}{1-r^2}, \quad R = y\frac{2r}{1-r^2}$$

ist. Dann gilt für den Abstand σ von $\mathfrak{K}_{\omega, r}$ von der x-Axe und die Höhe μ des höchsten Punktes von $\mathfrak{K}_{\omega, r}$ über der x-Axe

$$(22) \qquad \sigma = y\frac{1-r}{1+r}, \quad \mu = y\frac{1+r}{1-r}, \quad \sigma\mu = (\mathfrak{J}\, e_0)^2 - R^2 = y^2.$$

Den Punkt ω nennen wir den *Pseudomittelpunkt*, die Zahl r den *Pseudoradius* von $\mathfrak{K}_{\omega, r}$[9]). Nun gilt für jedes reelle δ

$$(23) \quad |e_0 - \delta|^2 - R^2 = |\omega - \delta|^2 = (x-\delta)^2 + y^2, \quad \frac{1-r}{1+r} = \frac{\sigma}{y} = \frac{\mathfrak{J}\, e_0 - R}{y},$$

so daß durch e_0 und R auch ω und r *eindeutig* bestimmt sind. Ist uns umgekehrt ein ganz in der oberen Halbebene verlaufender Kreis $\mathfrak{K}$ mit dem Mittelpunkt e_0 und dem Radius R gegeben, so kann man aus (21) und (23) solche Zahlen $x = \mathfrak{R}\, e_0$, $y > 0$ und $r\,(0 < r < 1)$ bestimmen, daß $\mathfrak{K} \equiv \mathfrak{K}_{\omega, r}$ wird.

Was geschieht nun mit $\mathfrak{K}_{\omega, r}$, wenn auf die z-Ebene eine Substitution

$$(24) \qquad w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \text{ reell}, \quad ad - bc = \Delta > 0$$

ausgeübt wird?

Man kann (24) so schreiben:

$$(25) \quad w = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c^2\left(z+\dfrac{d}{c}\right)} = \alpha - \frac{\Delta}{c^2(z-\delta)}, \quad \alpha = \frac{a}{c}, \quad \delta = -\frac{d}{c}.$$

Ist $e_0 - \delta = \varepsilon\,|e_0 - \delta|$, $|\varepsilon| = 1$, so schneidet der von δ nach e_0 gehende, Halbstrahl die Kreislinie $\mathfrak{K}$ in den Punkten $\delta + e_{1,2} = \delta + \varepsilon(|e_0 - \delta| \pm R)$ denen vermöge (25) die beiden Punkte (vgl. (23))

---

[9]) In der im Inneren der oberen Halbebene geltenden nichteuklidischen Maßbestimmung ist ω der nichteuklidische Mittelpunkt von $\mathfrak{K}$, der nichteuklidische Radius von $\mathfrak{K}$ ist aber $\lg\frac{1+r}{1-r}$. Der Kreis $\mathfrak{K}_{\omega, r}$ geht aus dem Kreise um den Ursprung mit dem Radius r hervor, wenn man das Innere des Einheitskreises so auf die obere Halbebene konform abbildet, daß der Ursprung in den Punkt ω übergeht.

$$(26)\qquad e^*_{1,2} = \alpha - \frac{\Delta}{c^2}\,\bar{\varepsilon}\,\frac{|e_0-\delta| \mp R}{|e_0-\delta|^2-R^2} = \alpha - \frac{\Delta}{c^2}\,\bar{\varepsilon}\,\frac{|e_0-\delta| \mp R}{|\omega-\delta|^2}$$

entsprechen. In den beiden Punkten (26) wird aber die aus $\mathfrak{K}$ durch (25) hervorgehende Kreislinie $\mathfrak{K}^*$ von der Geraden geschnitten, in die der Strahl von δ nach e_0 übergeht (da δ in den unendlich fernen Punkt transformiert wird), und die als Orthogonalsehne von $\mathfrak{K}^*$ durch den Mittelpunkt e_0^* von $\mathfrak{K}^*$ hindurch geht. Daher ergibt sich für den Mittelpunkt e_0^* und den Radius R^* von $\mathfrak{K}^*$

$$e_0^* = \frac{e_1^*+e_2^*}{2} = \alpha - \frac{\Delta}{c^2}\,\frac{\overline{e_0-\delta}}{|\omega-\delta|^2},\quad R^* = \frac{|e_1^*-e_0^*|}{2} = \frac{|\Delta|}{c^2}\,\frac{R}{|\omega-\delta|^2},$$

$$\mathfrak{R}\,e_0^* = \alpha - \frac{\Delta}{c^2}\,\frac{x-\delta}{|\omega-\delta|^2} = \alpha - \frac{\Delta}{c^2}\,\mathfrak{R}\,\frac{1}{\omega-\delta} = \mathfrak{R}\left(\alpha - \frac{\Delta}{c^2}\,\frac{1}{\omega-\delta}\right),$$

$$\mathfrak{J}\,e_0^* = \frac{\Delta}{c^2}\,\frac{\mathfrak{J}\,e_0}{|\omega-\delta|^2} = \frac{\Delta}{c^2}\,\frac{1+r^2}{1-r^2}\,\frac{y}{|\omega-\delta|^2} = \frac{1+r^2}{1-r^2}\,\mathfrak{J}\left(\alpha - \frac{\Delta}{c^2}\,\frac{1}{\omega-\delta}\right),$$

$$R^* = \frac{2r}{1-r^2}\,\frac{\Delta}{c^2}\,\frac{y}{|\omega-\delta|^2} = \frac{2r}{1-r^2}\,\mathfrak{J}\left(\alpha - \frac{\Delta}{c^2}\,\frac{1}{\omega-\delta}\right).$$

Setzt man also

$$\omega^* = \frac{a\,\omega+b}{c\,\omega+d} = \alpha - \frac{\Delta}{c^2(\omega-\delta)},$$

so ist

$$\mathfrak{R}\,e_0^* = \mathfrak{R}\,\omega^*,\quad \mathfrak{J}\,e_0^* = \frac{1+r^2}{1-r^2}\,\mathfrak{J}\,\omega^*,\quad R^* = \frac{2r}{1-r^2}\,\mathfrak{J}\,\omega^*,$$

so daß $\mathfrak{K}^*$ den gleichen Pseudoradius hat wie $\mathfrak{K}$ und den Pseudomittelpunkt ω^*, der aus ω durch (24) hervorgeht[10]).

Es sei nun G eine Gruppe von linearen Substitutionen $w = \dfrac{a\,z+b}{c\,z+d}$ mit $ad-bc>0$ und reellen a, b, c, d. $\mathfrak{K}$ sei ein ganz in der oberen Halbebene $\mathfrak{J}\,z>0$ liegender Kreis mit dem Pseudomittelpunkt ω und der Ordinate des höchsten Punktes μ. Man betrachte nun alle aus $\mathfrak{K}$

[10]) Die damit bewiesene Tatsache folgt offensichtlich unmittelbar daraus, daß (24) eine Bewegung in unserer „nichteuklidischen Ebene“ ist, durch die der nichteuklidische Radius invariant bleibt, der Mittelpunkt aber kovariant transformiert wird.

vermöge der Substitutionen von G hervorgehenden Kreise und insbesondere die Ordinaten ihrer höchsten Punkte. Ist dann die obere Grenze M dieser Ordinaten zu bestimmen, so beachte man, daß, da alle diese Kreise den gleichen Pseudoradius haben, jene Ordinate wegen des Ausdrucks (22) für μ um so größer wird, je größer die Ordinate des Pseudomittelpunktes ist. Ist also die obere Grenze von $\mathfrak{J}\,\frac{a\,\omega + b}{c\,\omega + d}$ für alle Substitutionen von G gleich η, so gilt

$$M = \mu \frac{\eta}{\mathfrak{J}\,\omega}\,. \tag{26a}$$

Ist nun z. B. *erstens* die Gruppe G die Gesamtheit aller ganzzahligen Substitutionen mit der Determinante 1, so ist bekannt, daß es unter den Transformierten einer Zahl ω mit $\mathfrak{J}\,\omega > 0$ stets eine und nur eine gibt, die im Bereich (5) liegt, und zwar hat dieses „reduzierte" ω nach *Hurwitz* die *maximale* Ordinate [11]). Daraus folgt:

Hilfssatz A. Ist $\mathfrak{K}$ *ein Kreis, der ganz innerhalb der obern Halbebene liegt, und liegt sein Pseudomittelpunkt im Bereich* (5), *ist ferner die Ordinate des höchsten Punktes von* $\mathfrak{K}$ *gleich* μ, *so sind die Ordinaten aller Transformierten sämtlicher Punkte von* $\mathfrak{K}$ *vermöge der Substitutionen von* G *höchstens gleich* μ.

Es sei *zweitens* Γ die sogenannte „Hauptkongruenzgruppe" zweiter Stufe, d. h. die Gesamtheit aller Substitutionen

$$w = \frac{a\,z + b}{c\,z + d} \tag{27}$$

mit ganzen a, b, c, d und $ad - bc = 1$,

$$a \equiv d \equiv 1 \pmod 2),\quad b \equiv c \equiv 0 \pmod 2).$$

Zu dieser Gruppe gehört die oben benutzte $\lambda(z)$-Funktion als Invariante (d. h. es gilt $\lambda\left(\frac{a\,z + b}{c\,z + d}\right) = \lambda(z)$ für alle Substitutionen von Γ), sowie die in der Figur a. p. 72 ausschnittweise dargestellte Modulfigur. Diese Figur entsteht aus dem *Hauptdreieck* $\mathfrak{H}$, $0 < \mathfrak{R}\,z < 1$, $|z - \tfrac{1}{2}| > \tfrac{1}{2}$ durch fortgesetzte Spiegelung an den drei Seiten und besteht aus lauter nullwinkligen Dreiecken, die die obere Halbebene einfach und lückenlos überdecken. $\lambda(z)$ bildet $\mathfrak{H}$ auf die obere λ-Halbebene $\mathfrak{J}\,\lambda > 0$ ab, jedes

---

[11]) *Hurwitz*, Dissertation, Math. Werke, Bd. I, p. 6.

der an $\mathfrak{H}$ angrenzenden Dreiecke wird auf die untere λ-Halbebene $\mathfrak{J}\,\lambda < 0$ abgebildet und so fort. Insbesondere wird das in der Figur mit $\mathfrak{H}'$ bezeichnete Dreieck auf die untere λ-Halbebene abgebildet.

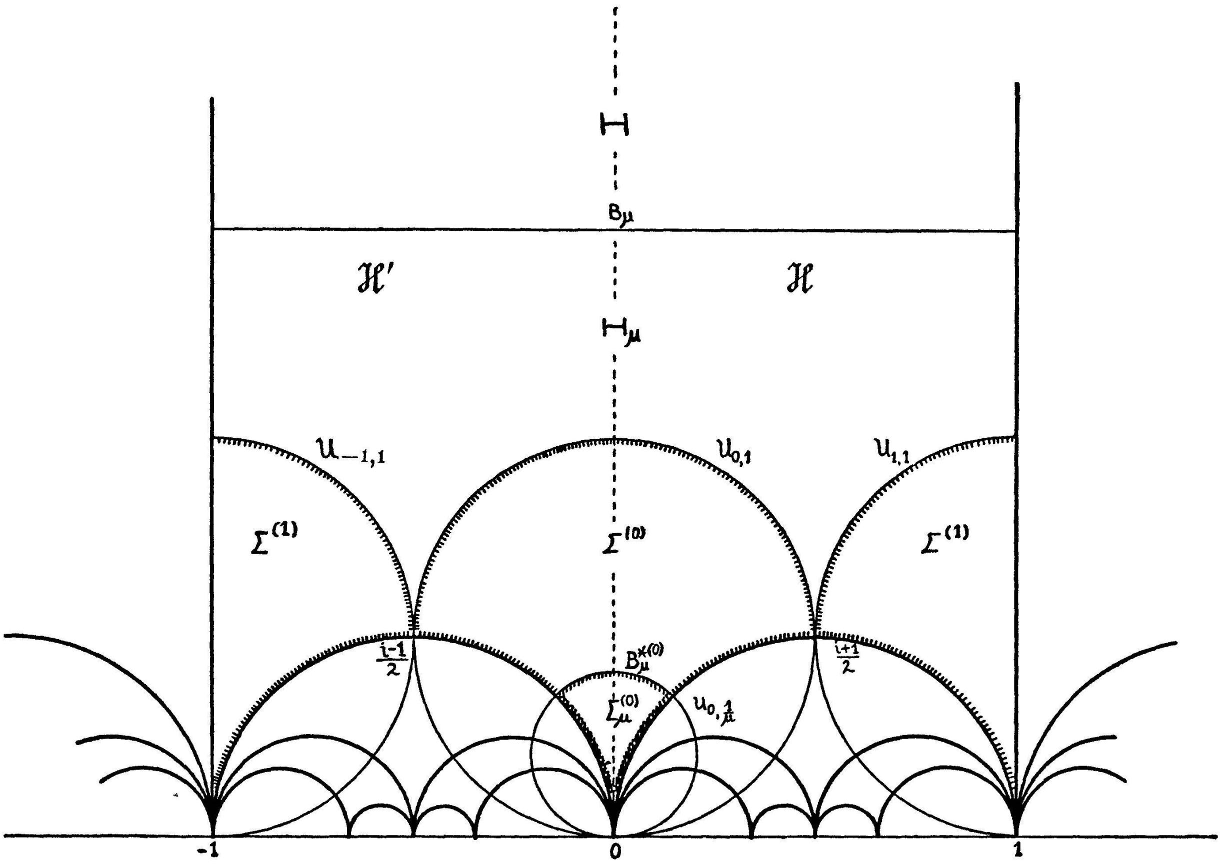

Fig. 1.

Durch jede Substitution von Γ wird nun unsere ganze Modulfigur in sich übergeführt, jedes Dreieck D der Figur geht durch eine eindeutig bestimmte Substitution von Γ entweder in $\mathfrak{H}$ oder in $\mathfrak{H}'$ über. Ist (27) diese Substitution, so wird dabei offenbar $z = -\dfrac{d}{c}$ in den unendlich fernen Punkt von $\mathfrak{H}$ (oder $\mathfrak{H}'$) übergeführt. — Fügt man die Kreisbogendreiecke $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ aneinander, läßt aber dann die Strecke $\mathfrak{R}\,z = -1$, sowie den Halbkreis $|z + \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ bis auf $z = 0$ fort, so ergibt sich ein sogenannter Fundamentalbereich H der Gruppe Γ, so daß jeder Punkt z mit $\mathfrak{J}\,z > 0$ einem und nur einem Punkt aus H vermöge Γ äquivalent ist. Ist nun ω ein Punkt aus H und geht daraus vermöge einer Substitution (27) von Γ ein Punkt ω^* hervor, so gilt, wie eine kurze Rechnung zeigt,

$$\mathfrak{J}\,\omega^* = \frac{\mathfrak{J}\,\omega}{|c\,\omega + d|^2}. \tag{28}$$

Nun ist aber für jeden Punkt ω aus H $|c\omega + d| \geqq 1$ für $c \equiv 0$, $d \equiv 1 \pmod 2$. Denn es genügt beim Beweis $\mathfrak{R}\,\omega \geqq 0$ anzunehmen, da man sonst ω, c durch $-\bar{\omega}$, $-c$ ersetzen kann. Für $\mathfrak{R}\,\omega \geqq 0$ ist nun

$$|c\omega + d|^2 = \left(c(\omega - \tfrac{1}{2}) + \frac{c}{2} + d\right)\left(c\,\overline{(\omega - \tfrac{1}{2})} + \frac{c}{2} + d\right) =$$

$$= c^2\,|\omega - \tfrac{1}{2}|^2 + 2c\left(\frac{c}{2} + d\right)(\mathfrak{R}\,\omega - \tfrac{1}{2}) + \left(\frac{c}{2} + d\right)^2,$$

wegen $|\omega - \frac{1}{2}| \geqq \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} \leqq \mathfrak{R}\,\omega - \frac{1}{2} \leqq \frac{1}{2}$ ist dies aber

$$\geqq \frac{c^2}{4} \pm c\left(\frac{c}{2} + d\right) + \left(\frac{c}{2} + d\right)^2 = \left(d + \frac{c}{2} \pm \frac{c}{2}\right)^2 \geqq 1,$$

da c gerade, d ungerade ist. Daher folgt aus (28) $\mathfrak{J}\,\omega^* \leqq \mathfrak{J}\,\omega$, so daß auch für die Gruppe Γ (und den Fundamentalbereich H) ein Analogon der *Hurwitz*schen Eigenschaft gilt. Nun können wir aus dem Obigen schließen:

Hilfssatz B. Ist $\mathfrak{K}$ ein ganz in $\mathfrak{J}\,z > 0$ verlaufender Kreis mit dem Pseudomittelpunkt aus H und der Ordinate des höchsten Punktes μ, so sind die Ordinaten aller Transformierten der Punkte von $\mathfrak{K}$ vermöge der Substitutionen von Γ höchstens gleich μ.

§ 5. Die parabolischen Umgebungen von rationalen Punkten in der Modulfigur

Als eine parabolische s-Umgebung ($s > 0$) des unendlich fernen Punktes bezeichnen wir die Halbebene $\mathfrak{J}\,z > s$. Diese Umgebung ist invariant gegenüber den linearen Substitutionen der ganzen Modulgruppe, die den unendlich fernen Punkt in sich überführen und also die Gestalt haben $w = z + b$, b ganz.

Führt eine Substitution von G:

$$w = \frac{az + b}{cz + d} = \alpha - \frac{1}{c^2(z - \delta)}, \tag{29}$$

a, b, c, d ganz, $ad - bc = 1$, $\alpha = \dfrac{a}{c}$, $\delta = -\dfrac{a}{c}$, $z = \infty$ in $w = \alpha = \dfrac{a}{c}$ über, so geht die Halbebene $\mathfrak{J}\,z > s$ in das Innere einer Kreislinie $U_{\alpha,s}$ über, die die reelle Axe im Punkte α berührt. Man erhält den

Durchmesser dieses Kreises, wenn man für die Punkte $z = x + is$, $-\infty < x < \infty$, die entsprechenden Punkte $w = \alpha - \frac{1}{c^2(x + is - \delta)}$ von $U_{\alpha, s}$ bildet und die größte Distanz eines solchen Punktes von α:

$$\max |w - \alpha| = \max \frac{1}{c^2 |x + is - \delta|} \tag{30}$$

bestimmt. (30) ist offenbar gleich

$$\frac{1}{sc^2}$$

und hängt nur von c ab, dagegen nicht von der speziellen Substitution (29), die $z = \infty$ in $w = \alpha$ überführt. Wir bezeichnen das Innere des in α berührenden Kreises $U_{\alpha, s}$ mit dem Durchmesser $\frac{1}{sc^2}$ als die parabolische s-Umgebung von α (größeren Werten von s entspricht also eine „kleinere" Umgebung)[12]. Führt allgemein eine Substitution $(S)\, w = \frac{az + b}{cz + d}$ einen reellen rationalen Punkt α in einen andern α' über, so wird durch sie

[12]) An den Begriff dieser parabolischen Umgebungen knüpft das folgende Analogon des Hilfssatzes B in § 4 an:

Ist $U = U_{0, a}$ ein die reelle Axe im 0-Punkt berührender Kreis mit dem Durchmesser $\frac{1}{a}$ und berührt U einen in $\mathfrak{J} z > 0$ verlaufenden Kreis K mit dem Pseudomittelpunkt ω aus H von außen, so dringt keiner der Kreise, die aus K durch Substitutionen von Γ hervorgehen, in das Innere von U ein. Beweis: Wir bezeichnen allgemein den Kreis, der aus einem Kreis $\mathfrak{K}$ durch $w = \frac{pz + q}{sz + r}$ entsteht, durch $\frac{p\mathfrak{K} + q}{s\mathfrak{K} + r}$. Nach Voraussetzung liegt der Kreis $P = \frac{-1}{K}$ im Bereich $\mathfrak{J} z \leqq a$. Ist $w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ eine Substitution von Γ, so ist zu beweisen, daß $\frac{\alpha K + \beta}{\gamma K + \delta}$ nicht in U eindringt, d. h., daß $\frac{-\gamma K - \delta}{\alpha K + \beta}$ im Bereich $\mathfrak{J} z \leqq a$ liegt.

Nun ist aber

$$\frac{-\gamma K - \delta}{\alpha K + \beta} = \frac{\frac{\gamma}{P} - \delta}{\frac{-\alpha}{P} + \beta} = \frac{\delta P - \gamma}{-\beta P + \alpha},$$

und da $w = \frac{\delta z - \gamma}{-\beta z + \alpha}$ zu Γ gehört und $\frac{-1}{\omega}$ mit ω in H liegt, folgt dies aus dem Hilfssatz B.

auch $U_{\alpha, s}$ in $U_{\alpha', s}$ übergeführt, und zwar für jedes $s > 0$. Denn man kann S „auf Umwege über den unendlich fernen Punkt" ausführen. *Die Gesamtheit der parabolischen s-Umgebungen aller reellen rationalen Punkte geht also durch jede ganzzahlige lineare Substitution von der Determinante 1 in sich über.* Wir zeigen nun ferner, daß für $s = 1$ *die s-Umgebungen von zwei verschiedenen rationalen Punkten* $\alpha = \frac{a}{c}, \beta = \frac{b}{d}$, $(a, c) = (b, d) = 1$, *keine Punkte gemeinsam haben können*[13]). Dann können erst recht für $s > 1$ die parabolischen s-Umgebungen von verschiedenen rationalen Punkten keine Punkte gemeinsam haben.

Es genügt zu zeigen, daß die Mittelpunktsdistanz von $U_{\alpha, 1}$ und $U_{\beta, 1}$ nicht kleiner ist als die Summe der Radien, d. h.:

$$(\alpha - \beta)^2 + \left(\frac{1}{2c^2} - \frac{1}{2d^2}\right)^2 \geqq \left(\frac{1}{2c^2} + \frac{1}{2d^2}\right)^2,$$

$$(\alpha - \beta)^2 = \left(\frac{ad - bc}{cd}\right)^2 \geqq \frac{1}{c^2 d^2},$$

was wegen $ad - bc \neq 0$ $(\alpha \neq \beta)$ sicher richtig ist.

Wir betrachten nun den Durchschnitt $\Sigma^{(0)}$ von H und $U_{0,1}$. Ferner sei die Vereinigungsmenge der Durchschnitte von $U_{\pm 1, 1}$ mit H (vgl. Fig.) mit $\Sigma^{(1)}$ bezeichnet.

Es möge nun ein Kreis $K = \mathfrak{K}_{\omega, r}$ den Pseudomittelpunkt ω in $\Sigma^{(0)}$ haben, und die Höhe des höchsten Punktes von K sei gleich μ. Wir wollen nun das größte $s = \frac{1}{\mu^*}$, d. h., die kleinste parabolische s-Umgebung $U_{0,s}$ von 0 bestimmen, für die das Innere von K ganz im Inneren von $U_{0,s}$ liegt. Dann muß die Radiendifferenz $\geqq$ der Mittelpunktsdistanz der beiden Kreise sein, d. h., da der Radius von $\mathfrak{K}_{\omega, r}$ nach (21) gleich $R = y \frac{2r}{1 - r^2}$ ist,

---

[13]) Die Konfiguration der parabolischen s-Umgebungen dürfte zuerst für $s = \frac{\sqrt{3}}{2}$ bei *Humbert* (J. d. m. p. e. a., (7) 2 (1916), pp. 84 ff.) auftreten. Für beliebige s wurde sie anscheinend zum ersten Mal von *L. R. Ford* (Proc. Ed. M. S., Bd. 35 (1916—17), pp. 40 ff.) angegeben, von beiden Autoren im Zusammenhang mit der Theorie der Kettenbrüche. Anschließend an eine kurze Mitteilung von *A. Speiser* (Verh. d. Schweiz. Nat. Ges. (1923), pp. 113—114) wurde sie ferner in der Zürcher Dissertation von *J. Züllig* (Ueber eine geometrische Deutung unendlicher Kettenbrüche und ihre Approximation durch rationale Zahlen, Zürich, Orell Füssli, 1928) behandelt. Die Invarianz dieser Konfiguration für $s = 1$ ist implizite in den Betrachtungen von *R. Picard*, (Untersuchung einer Untergruppe der unimodularen Picard'schen Gruppe, Basel, Dissertation, 1927) sowie in den älteren Untersuchungen von *v. Dick* (Leipz. Ber. (1883), pp. 61 ff.) und *R. Fricke* (*Fricke-Klein*, Automorphe Funktionen, Bd. 1 (1897), p. 431) enthalten. Verallgemeinerungen auf höhere Räume finden sich in den Arbeiten von *L. R. Ford* (Trans. A. M. S., Bd. 27 (1925), pp. 146 ff.) und *A. Speiser* (Journal f. r. u. a. M., Bd. 167 (1932), pp. 88 ff.).

$$\left(\frac{1}{2s} - y\frac{2r}{1-r^2}\right)^2 \geqq x^2 + \left(\frac{1}{2s} - y\frac{1+r^2}{1-r^2}\right)^2,$$

$$x^2 \leqq \left(\frac{1}{2s} - y\frac{2r}{1-r^2} + \frac{1}{2s} - y\frac{1+r^2}{1-r^2}\right)\left(y\frac{1+r^2}{1-r^2} - y\frac{2r}{1-r^2}\right)$$

$$x^2 \leqq \left(\frac{1}{s} - y\frac{1+r}{1-r}\right) y \frac{1-r}{1+r}, \quad x^2 \leqq \left(\frac{1}{s} - \mu\right)\sigma,$$

$$\frac{x^2}{\sigma} = \mu\frac{x^2}{y^2} \leqq \frac{1}{s} - \mu, \quad \frac{1}{s} \geqq \mu\left(\frac{x^2+y^2}{y^2}\right) = \mu\frac{|\omega|^2}{(\mathfrak{J}\omega)^2} = \frac{\mu}{\mathfrak{J}\omega\,\mathfrak{J}\frac{-1}{\omega}}.$$

Daher ist

$$\mu^* = \frac{\mu}{\mathfrak{J}\omega\,\mathfrak{J}\frac{-1}{\omega}} = \mu\frac{x^2+y^2}{y^2} \leqq 2\mu, \quad \frac{1}{\mu^*} = \mathfrak{J}\frac{-1}{\omega}\,\frac{1-r}{1+r}, \tag{31}$$

da ω in $\Sigma^{(0)}$ liegt und daher $\frac{x^2}{y^2} \leqq 1$, $\frac{x^2+y^2}{y^2} \leqq 2$ ist. So ist μ^* für $\mu \leqq \frac{1}{2}$ sicher nicht größer als 1, so daß insbesondere für $\mu \leqq \frac{1}{2}$ *das Innere von K ganz in der parabolischen 1-Umgebung $U_{0,1}$ von $z = 0$ liegt, d. h. im Kreis* $\left|z - \frac{i}{2}\right| < \frac{1}{2}$.

Daraus folgt aber nun, daß *wenn ein beliebiger Punkt des Kreises K durch eine Substitution S von Γ in H gebracht wird, er im Bereich $\Sigma^{(0)}$ liegen muß.* (Die Alternative wäre, da ja seine Ordinate jedenfalls nicht größer als $\frac{1}{2}$ ist, daß er in die Nähe der Spitzen ± 1 (d. h. in den Bereich $\Sigma^{(1)}$) transformiert würde.)

Es genügt zu zeigen, daß S für $\omega \prec \Sigma^{(0)}$ den Nullpunkt und daher auch $U_{0,1}$ invariant läßt, da ja dann K in $U_{0,1}$ bleibt. Transformiert nun S den Nullpunkt in einen Punkt $\alpha \neq 0$, so kann α auch nicht ± 1 oder ∞ sein, da ja diese Punkte vermöge Γ nicht mit 0 äquivalent sind. Dann geht $U_{0,1}$ in $U_{\alpha,1}$ über, und $U_{\alpha,1}$ hat keinen Punkt mit $U_{0,1}$ noch mit $U_{\pm 1,1}$ gemeinsam, also auch nicht mit dem ganzen Gebiet H. Da aber K ganz in $U_{0,1}$ liegt, muß das Bild von K ganz in $U_{\alpha,1}$ liegen, hat also auch keine Punkte mit H gemeinsam, entgegen der Voraussetzung. Daraus folgt insbesondere, daß ein solcher Kreis K, ebenso wie $U_{0,1}$

nur solche Dreiecke der Modulfigur durchsetzen kann, die eine Spitze im o-Punkt haben. [14])

Die gleiche Ueberlegung zeigt, daß wenn ein Kreis $K_{\omega,r}$ mit $\omega \prec \Sigma^{(0)}$ ganz in einer parabolischen s-Umgebung $U_{0,s}$ ($s \geqq 1$) des Nullpunktes verläuft, jeder Transformierte eines Punktes von K vermöge einer Substitution von Γ, der in H liegt, dann innerhalb $U_{0,s}$, also innerhalb des Durchschnitts von $U_{0,s}$ und H liegt.

§ 6. Abschätzung von $S(p_0, r)$ durch Ω_μ und ω_μ

Ist nun wieder $p(z)$ für $|z| < 1$ regulär und $\neq 0$, $\neq 1$, so daß (9) gilt, so ist für $|z| \leqq r < 1$

$$|p(z)| \leqq \max |\lambda(z)| \text{ für } z \prec K_{\omega,r}, \tag{32}$$

wo $K_{\omega,r}$ der Kreis mit dem Pseudomittelpunkt ω und dem Pseudoradius r ist. Dabei ist ω eine solche Zahl aus H, daß $p_0 = \lambda(\omega)$ ist. Bezeichnet man also den Zweig der Umkehrung von $\lambda(z)$, dessen Werte in H liegen, mit $\omega(\lambda)$, so ist $\omega = \omega(p_0)$. — (32) folgt daraus, daß wegen (11 a) die Werte von $C(z)$ für $|z| \leqq r$ stets im $K_{\omega,r}$ liegen.

Wir bezeichnen nun mit B_μ für $\mu \geqq \frac{1}{2}$ die in H enthaltene Strecke der Geraden $\Im z = \mu$. Ferner bezeichnen wir mit $B_\mu^{*(0)}$ für $\mu < 1$ den in $\Sigma^{(0)}$ enthaltenen Teilbogen des in o berührenden Kreises mit dem Durchmesser μ:

$$\left| z - \frac{i\mu}{2} \right| = \frac{\mu}{2},$$

d. h. des Begrenzungskreises von $U_{0,\frac{1}{\mu}}$. Diese Strecken und Bögen sind in der Figur eingezeichnet.

Wir bestimmen nun die Maxima und Minima von $|\lambda(z)|$ auf B_μ ($\mu \geqq \frac{1}{2}$) und $B_\mu^{*(0)}$ ($\mu < 1$) und bezeichnen sie resp. mit

$$\Omega_\mu,\ \omega_\mu;\ \Omega_\mu^{*(0)},\ \omega_\mu^{*(0)}. \tag{33}$$

---

[14]) Genauer gilt folgendes: Der Kreis um den Punkt i mit dem Radius 1, also der Randkreis von $U_{0,\frac{1}{2}}$, durchsetzt sämtliche Dreiecke mit der Spitze im Nullpunkt und berührt jedesmal ihre dritten, nicht an o anstoßenden Halbkreise, so daß er der größte im Nullpunkt berührende Kreis ist, der nur in die Dreiecke mit der Spitze im Nullpunkt eindringt. Aus dieser Eigenschaft folgt übrigens unmittelbar, daß dieser Kreis bei jeder Modulsubstitution, die den Nullpunkt in sich überführt, unverändert bleibt. Dies würde für unsere Zwecke bereits ausreichen, so daß bei Benutzung dieses Kreises anstatt $U_{0,1}$ unsere Betrachtungen über parabolische Umgebungen unnötig wären. Doch liefert dieser Kreis eine relativ unsymmetrische Abgrenzung der Spitze o gegen die Spitzen ± 1.

Wir bezeichnen ferner den Teil von H mit $\mathfrak{J}\, z \leqq \mu$ $(\mu \geqq \frac{1}{2})$ mit H_μ und den Durchschnitt von $\Sigma^{(0)}$ mit $U_{0,\frac{1}{\mu}}$ mit $\Sigma_\mu^{(0)}$ (vgl. Fig.).

Ist nun μ die größte Ordinate der Punkte von $K_{\omega, r}$, also nach § 4

$$\mu = \mathfrak{J}\, \omega \frac{1+r}{1-r} = \mathfrak{J}\, \omega\, (p_0) \frac{1+r}{1-r},$$

so gilt sicher:

$$(34) \qquad |\lambda(z)| \leqq \Omega_\mu \quad \text{für } z \prec H_\mu,\ \mu \geqq \frac{1}{2};$$

$$(35) \qquad |\lambda(z)| \leqq \Omega_\mu^{*(0)} \quad \text{für } z \prec \Sigma_\mu^{(0)},\ \mu < 1.$$

Denn da die Randteile von H_μ, die zum Rand von H gehören, durch $\lambda(z)$ auf ein Stück der positiven reellen Axe (doppelt überdeckt) abgebildet werden, wird auf ihnen der größte Wert von $|\lambda(z)|$ in einem der beiden Schnittpunkte mit der Geraden $\mathfrak{J}\, z = \mu$ erreicht. Und das Analoge gilt für $\Sigma_\mu^{(0)}$.

Liegt nun ferner ein Punkt von $K_{\omega, r}$ nicht in H, so wird er durch eine Substitution von Γ, die den Wert von $\lambda(z)$ unverändert läßt, in H übergeführt und liegt alsdann nach §§ 4 und 5 in H_μ für $\mu \geqq \frac{1}{2}$. Falls ferner $\mu^* < 1$ ist, liegt ein solcher Punkt in $\Sigma_{\mu^*}^{*(0)}$, wenn ω in $\Sigma^{(0)}$ liegt, wo μ^* nach (31) gleich $\dfrac{\mu}{\mathfrak{J}\, \omega\, \mathfrak{J}\frac{-1}{\omega}} \leqq 2\mu$ ist. Daher ist $|\lambda(z)|$ für alle Punkte von $K_{\omega, r}$ resp. höchstens gleich $\left(\mu^* = \dfrac{\mu}{\mathfrak{J}\, \omega\, \mathfrak{J}\frac{-1}{\omega}}\right)$:

$$\Omega_\mu,\ \Omega_{\mu^*}^{*(0)}.$$

Andererseits hat $K_{\omega, r}$ sicher wenigstens einen Punkt mit B_μ bzw. $B_{\mu^*}^{*(0)}$ gemeinsam, und da nach § 2 die Werte der entsprechend gebildeten Funktion (12 a)

$$(36) \qquad C^{**}(z) = \mathfrak{R}\, \omega + i\, \mathfrak{J}\, \omega \frac{1+z}{1-z}, \quad \omega = \omega(p_0)$$

für $|z| \leqq r$ *den ganzen Kreis* $K_{\omega, r}$ erfüllen, ist $S(p_0, r)$ sicher wenigstens gleich dem entsprechenden Minimum ω_μ, bzw. $\omega_{\mu^*}^{*(0)}$. Daher ergibt sich

$$(37)\qquad \omega_\mu \leqq S(p_0, r) \leqq \Omega_\mu \quad \text{für } \mu = \mathfrak{J}\,\omega(p_0)\frac{1+r}{1-r} \geqq \frac{1}{2},$$

$$(38)\qquad \omega^{*(0)}_{\mu^*} \leqq S(p_0, r) \leqq \Omega^{*(0)}_{\mu^*} \quad \text{für } \mu = \mathfrak{J}\,\omega(p_0)\frac{1+r}{1-r} < \frac{1}{2},$$

$$\mu^* = \frac{\mu}{\mathfrak{J}\,\omega(p_0)\,\mathfrak{J}\frac{-1}{\omega(p_0)}}.$$

Um hieraus weitere Folgerungen zu ziehen, leiten wir zunächst asymptotische Abschätzungen von $|\lambda(z)|$ in der Nähe der Spitzen von H her.

§ 7. Asymptotische Abschätzungen von $J(z)$ und $\lambda(z)$

Wir setzen $q = e^{\pi i z}$ und gehen von der Formel (2) für $\omega = z$ aus, deren erste Glieder für $q \to 0$, d. h. $\mathfrak{J} z \uparrow \infty$ liefern:

$$39)\quad 12^3 q^2 J(z) = (1 + 720 q^2 + \ldots)(1 + 24 q^2 + \ldots) = 1 + 744 q^2 + O(q^4).$$

Hieraus folgt

$$(40)\quad 1 - 744\,|q^2| + O(|q|^4) \leqq |12^3 q^2 J(z)| \leqq 1 + 744\,|q|^2 + O(|q|^4),$$

$$(41)\qquad \left|\,|J(z)| - \frac{1}{12^3 |q|^2}\right| \leqq \frac{31}{72} + O(q^2),\ q \to 0,$$

$$(42)\qquad \left|\,|J(z)| - \frac{e^{2\pi \mathfrak{J} z}}{12^3}\right| \leqq \frac{31}{72} + O(e^{-2\pi \mathfrak{J} z}),\ \mathfrak{J} z \uparrow \infty.$$

Andererseits setzen wir in der Formel (7)

$$2\lambda - 1 = \mu,\ \mu^2 - 1 = 4\lambda(\lambda - 1) = \nu,$$

und erhalten

$$27\,J(z) = \frac{(\nu + 4)^3}{\nu^2} = \nu + 12 + \frac{48}{\nu} + \frac{64}{\nu^2} = \nu + O(1),$$

da $\lambda \to \infty$ für $\mathfrak{J} z \uparrow \infty$ gilt. Daraus und aus (41) folgt weiter

$$\mu^2 = 27\,J(z) + O(1) = \frac{1}{64\,q^2} + O(1) = \left(\frac{1}{8q}\right)^2 (1 + O(q^2)),$$

daher

$$\mu = \pm \frac{1}{8q}(1 + O(q^2)).$$

Da aber q für rein imaginäre z positiv ist und λ, daher auch μ Punkte der imaginären Axe auf Punkte der *negativen* reellen Axe abbildet, gilt hier das Minuszeichen und wir erhalten

$$2\lambda - 1 = \frac{-1}{8q}(1 + O(q^2)),\ 2\lambda = \frac{-1}{8q}(1 - 8q + O(q^2)),$$

$$|16q\lambda| = |1 - 8q + O(q^2)|,$$

$$1 - 8|q| + O(q^2) \leqq |16q\lambda| \leqq 1 + 8|q| + O(q^2),$$

$$\left| |\lambda| - \frac{1}{16|q|} \right| \leqq \tfrac{1}{2} + O(q),$$

(43) $$\left| |\lambda(z)| - \frac{1}{16} e^{\pi \mathfrak{J} z} \right| \leqq \tfrac{1}{2} + O(e^{-\pi \mathfrak{J} z}),\ \mathfrak{J} z \uparrow \infty.$$

Lassen wir aber z gegen 0 innerhalb H konvergieren, so benutze man die Formel

$$\lambda\left(-\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\lambda(z)}.$$

Dann gilt nach (43)

(44) $$\left| \frac{1}{|\lambda(z)|} - \frac{1}{16} e^{\pi \mathfrak{J} \frac{-1}{z}} \right| \leqq \tfrac{1}{2} + O(e^{-\pi \mathfrak{J} \frac{-1}{z}}),\ z \to 0.$$

Beachten wir aber, daß in $'H$ für $z = x + iy$ $(x \pm \frac{1}{2})^2 + y^2 \geqq \frac{1}{4}$ ist, d. h. $|x| \leqq x^2 + y^2$ und für $z \to 0$ daher $x = O(y^2)$, so gilt

$$\mathfrak{J}\frac{-1}{z} = \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{y} - \frac{x^2}{y^3} + \frac{x^4}{y^5} + \ldots = \frac{1}{v} + O(y),$$

und daher $e^{\pi \mathfrak{J} \frac{-1}{z}} = e^{\frac{\pi}{\mathfrak{J} z}}(1 + o(\mathfrak{J} z))$,

$$(45) \qquad \frac{1}{|\lambda|} \sim \frac{e^{\frac{\pi}{\Im z}}}{16}, \quad z \to 0, \quad z \prec H,$$

$$-\lg|\lambda| = \frac{\pi}{\Im z} - \lg 16 + o(1), \quad \frac{\pi}{\Im z} = \lg 16 + \lg \frac{1}{|\lambda|} + o(1),$$

(45*)

$$\Im z = \frac{-\pi}{\lg|\lambda|}\left(1 + \frac{\lg 16}{\lg|\lambda|} + o\left(\frac{1}{\lg|\lambda|}\right)\right) = \frac{-\pi}{\lg|\lambda|} - \frac{\pi \lg 16}{(\lg|\lambda|)^2} + o\left(\frac{1}{\lg|\lambda|^2}\right).$$

§ 8. Abschätzungen von $S(p_0, r)$ durch $\omega(p_0)$ und p_0

Das für uns Wesentliche an den in § 7 erhaltenen Abschätzungen ist, daß sie in der dort angegebenen Näherung nur von $\Im z$ bezw. $\Im \frac{-1}{z}$ abhängen, sodaß wir Ω und ω im Wesentlichen in gleicher Weise abschätzen, woraus, wegen (37), (38), die gleiche Abschätzung auch für $S(p_0, r)$ folgt.

Es sei zuerst $\mu \geqq \frac{1}{2}$. Dann liefert (43) eine Abschätzung für alle Werte von $|\lambda(z)|$ auf B_μ, die also auch auf $S(p_0, r)$ anwendbar ist und ergibt

$$\text{(I)}\ S(p_0, r) = \frac{1}{16} e^{\pi\mu} + \frac{\theta}{2} + O(e^{-\pi\mu}), \quad |\theta| \leqq 1, \quad \mu = \Im\,\omega(p_0)\frac{1+r}{1-r} \geqq \tfrac{1}{2},$$

wo O sich auf den Grenzübergang $\mu \uparrow \infty$ bezieht, und (I) im Übrigen gleichmäßig in p_0 und r gilt. Hieraus folgt weiter

$$(46) \qquad S(p_0, r) = \frac{1}{16} e^{\pi\mu}(1 + 8\,\theta\, e^{-\pi\mu} + O(e^{-2\pi\mu})),$$

$$\text{(II)} \qquad \lg(16\, S(p_0, r)) = \pi\mu + 8\,\theta\, e^{-\pi\mu} + O(e^{-2\pi\mu}),$$

sodaß nicht nur $\lg(16\, S(p_0, r)) - \pi\mu \to 0$, sondern sogar $e^{\pi\mu}(\lg(16 S(p_0, r)) - \pi\mu)$ beschränkt für $\frac{1}{2} \leqq \mu \to \infty$ bleibt. Für die in diesen Abschätzungen vorkommende Größe $e^{\pi\mu} = (e^{\pi \Im \omega})^{\frac{1+r}{1-r}}$ erhalten wir für $p_0 \to \infty$ aus (43)

$$|p_0| = |\lambda(\omega(p_0))| = \frac{1}{16} e^{\pi \Im \omega} + \frac{\theta}{2} + O(e^{-\pi \Im \omega}),$$

$$\left.\begin{aligned}
&(47)\qquad e^{\pi \mathfrak{J}\omega} = 16\,|p_0| + 8\,\theta + O\left(\frac{1}{p_0}\right),\\
&(48)\qquad e^{\pi \mathfrak{J}\omega} = 16\,|p_0|\left(1 + \frac{\theta}{2}\,\frac{1}{|p_0|} + O\left(\frac{1}{p_0^2}\right)\right),\\
&(49)\qquad \pi \mathfrak{J}\omega = \lg(16|p_0|) + \frac{\theta}{2}\,\frac{1}{|p_0|} + O\left(\frac{1}{p_0^2}\right),
\end{aligned}\right\}\ p_0 \to \infty,\ |\theta| \leqq 1.$$

Konvergiert also insbesondere p_0 gegen ∞, so ergibt sich aus (46) und (48)

$$S(p_0, r) = \frac{1}{16}\left|16 p_0\right|^{\frac{1+r}{1-r}}\left\{1 + \frac{\theta}{2\,|p_0|} + O\left(\frac{1}{p_0^2}\right)\right\}^{\frac{1+r}{1-r}}\left(1 + O\left(p_0^{-\frac{1+r}{1-r}}\right)\right).$$

Hieraus folgt aber für *alle* p_0

$$\text{(I*)}\qquad 16\,S(p_0, r) = (16\,|p_0| + \theta\,c)^{\frac{1+r}{1-r}},\quad |\theta| \leqq 1,\quad c = \text{const.},$$

und insbesondere für $r \geqq \frac{1}{3}$, $\frac{1+r}{1-r} \geqq 2$ und $p_0 \to \infty$

$$\text{(I**)}\qquad 16\,S(p_0, r) = \left(16\,|p_0| + 8\,\theta + O\left(\frac{1}{p_0}\right)\right)^{\frac{1+r}{1-r}},\quad |\theta| \leqq 1,\quad 1 > r \geqq \tfrac{1}{3}.$$

Durch Logarithmieren von (I*) und (I**) ergibt sich

$$\text{(II*)}\qquad \lg(16\,S(p_0, r)) = \frac{1+r}{1-r}\left(\lg|16 p_0| + O\left(\frac{1}{p_0}\right)\right),\quad p_0 \to \infty,$$

$$\text{(II**)}\qquad \lg(16\,S(p_0, r)) = \frac{1+r}{1-r}\left(\lg|16 p_0| + \frac{\theta}{|2 p_0|} + O\left(\frac{1}{p_0^2}\right)\right),$$

$$r \geqq \tfrac{1}{3},\ |\theta| \leqq 1,\ p_0 \to \infty.$$

Es sei nun $\mu < \frac{1}{2}$ oder allgemeiner $\mu^* < 1$. Konvergiert μ gegen 0, so muß dann offenbar $\mathfrak{J}\,\omega \to 0$ gelten, sodaß $\omega \to 0$ oder $\omega \to 1$ gilt. Es möge nun $\omega \to 0$ und daher $p_0 \to 0$ gelten. Dann liefert (38) recht scharfe Ergebnisse, wenngleich in ihnen auch der Realteil von $\omega\,(p_0)$

eine Rolle spielt. Denn die Werte von $|\lambda(z)|$ auf dem Kreisbogen $B_{\mu^*}^{*(0)}$ ($\mu^* < 1$) werden von $\frac{1}{|\lambda(z)|} = \left|\lambda\left(-\frac{1}{z}\right)\right|$ auf der Strecke $B_{\frac{1}{\mu^*}}$ angenommen. Dort gilt aber wegen (43)

$$|\lambda(z)| = \frac{1}{16}\, e^{\frac{\pi}{\mu^*}} + \frac{\theta}{2} + O\left(e^{-\frac{\pi}{\mu^*}}\right), \quad |\theta| \leqq 1, \ \mu^* \to 0,$$

und daher

$$\text{(50)} \quad S(p_0, r) = 16\, e^{-\frac{\pi}{\mu^*}}\left(1 + 8\,\theta\, e^{-\frac{\pi}{\mu^*}} + O\left(e^{-\frac{2\pi}{\mu^*}}\right)\right),$$

$$|\theta| \leqq 1, \quad \mu^* = \frac{1}{\mathfrak{J}\frac{-1}{\omega(p_0)}}\,\frac{1+r}{1-r} \to 0, \ p_0 \to 0.$$

$$\text{(III)} \quad S(p_0, r) = 16\, e^{-\frac{\pi}{\mu^*}} + 128\,\theta\, e^{-\frac{2\pi}{\mu^*}} + O\left(e^{-\frac{3\pi}{\mu^*}}\right),$$

$$|\theta| \leqq 1, \quad \mu^* = \frac{1}{\mathfrak{J}\frac{-1}{\omega(p_0)}}\,\frac{1+r}{1-r} \to 0, \ p_0 \to 0.$$

Man überzeugt sich leicht, daß die Bedingung $\mu^* \to 0$ mit $\frac{\mathfrak{J}\,\omega}{1-r} \to 0$ äquivalent ist; dies ist aber, wegen (45*), äquivalent mit $|p_0|^{1-r} \to 0$.

Logarithmiert man nun (50), so ergibt sich

$$\text{(IV)} \quad \lg \frac{S(p_0, r)}{16} = -\frac{\pi}{\mu^*} + 8\,\theta\, e^{-\frac{\pi}{\mu^*}} + O\left(e^{-\frac{2\pi}{\mu^*}}\right),$$

$$|\theta| \leqq 1, \quad \mu^* = \frac{1}{\mathfrak{J}\frac{-1}{\omega(p_0)}}\,\frac{1+r}{1-r} \to 0, \ p_0 \to 0.$$

Der Zusammenhang mit p_0 ergibt sich jetzt aus (31):

$$e^{-\frac{\pi}{\mu^*}} = \left(e^{-\pi\,\mathfrak{J}\frac{-1}{\omega}}\right)^{\frac{1-r}{1+r}}, \quad p_0 = \lambda(\omega(p_0)) = \frac{1}{\lambda\left(\frac{-1}{\omega(p_0)}\right)},$$

wenn man beachtet, daß wegen (43) für $p_0 \to 0$

$$\frac{1}{|p_0|} = \left|\lambda\left(\frac{-1}{\omega(p_0)}\right)\right| = \frac{1}{16} e^{\pi \Im \frac{-1}{\omega(p_0)}} + \frac{\theta}{2} + O\left(e^{-\pi \Im \frac{-1}{\omega(p_0)}}\right) =$$

$$= \frac{1}{16} e^{\pi \Im \frac{-1}{\omega(p_0)}} \left(1 + 8\,\theta\, e^{-\pi \Im \frac{-1}{\omega(p_0)}} + O\left(e^{-2\pi \Im \frac{-1}{\omega(p_0)}}\right)\right),$$

$$e^{-\pi \Im \frac{-1}{\omega(p_0)}} = \frac{|p_0|}{16}\left(1 + \frac{\theta}{2}\,|p_0| + O(p_0^2)\right)$$

gilt. Denn dann folgt aus (50)

$$S(p_0, r) = 16 \left|\frac{p_0}{16}\right|^{\frac{1-r}{1+r}} \left\{1 + \frac{\theta}{2}\,|p_0| + O(p_0^2)\right\}^{\frac{1-r}{1+r}}$$

$$\left\{1 + 8\,\theta_1 \left|\frac{p_0}{16}\right|^{\frac{1-r}{1+r}} + O\left((1-r)\,p_0\,|p_0|^{\frac{1-r}{1+r}}\right) + O\left(|p_0|^{2\frac{1-r}{1+r}}\right)\right\},$$

(51) $$\frac{S(p_0, r)}{16} = \left|\frac{p_0}{16}\right|^{\frac{1-r}{1+r}} \left(1 + \frac{\theta}{2}\,\frac{1-r}{1+r}\,|p_0| + 8\,\theta_1 \left|\frac{p_0}{16}\right|^{\frac{1-r}{1+r}} + O\left(|p_0|^{2\frac{1-r}{1+r}}\right)\right).$$

Hieraus folgt dann erstens für alle r

(III*) $$\frac{S(p_0, r)}{16} = \left|\frac{p_0}{16}\right|^{\frac{1-r}{1+r}} + O\left(\left|\frac{p_0}{16}\right|^{2\frac{1-r}{1+r}}\right), \quad |p_0|^{1-r} \to 0.$$

Für $r \geqq \frac{1}{3}$, $\frac{1-r}{1+r} \leqq \frac{1}{2}$ aber gilt zweitens

(III**) $$\frac{S(p_0, r)}{16} = \left|\frac{p_0}{16}\right|^{\frac{1-r}{1+r}} + 8\,\theta \left|\frac{p_0}{16}\right|^{2\frac{1-r}{1+r}} + O\left(\left|\frac{p_0}{16}\right|^{3\frac{1-r}{1+r}}\right),$$

wo $|p_0|^{1-r} \to 0$, $|\theta| \leqq 1$ ist.

Durch Logarithmieren ergibt sich aus diesen Formeln aber

$$\text{(IV*)}\quad \lg\frac{S(p_0, r)}{16} = \frac{1-r}{1+r}\lg\left|\frac{p_0}{16}\right| + O\left(|p_0|^{\frac{1-r}{1+r}}\right),\ |p_0|^{1-r} \to 0,$$

$$\text{(IV**)}\quad \lg\frac{S(p_0, r)}{16} = \frac{1-r}{1+r}\lg\left|\frac{p_0}{16}\right| + 8\,\theta\left|\frac{p_0}{16}\right|^{\frac{1-r}{1+r}} + O\left(|p_0|^{2\frac{1-r}{1+r}}\right),$$

$$r \geqq \tfrac{1}{3},\ |p_0|^{1-r} \to 0,\ |\theta| \leqq 1.$$

Konvergiert für $\mu^* < 1$ aber p_0 gegen 1, so hat man nur die Formeln III — IV** auf $1 - p(z)$ anzuwenden und erhält Abschätzungen für $|1 - p(z)|$.

Ist im Falle der Formel (I) ($\mu \to \infty$) $p_0 \to \infty$ für festes r, oder allgemeiner für $|p_0|^{1-r} \to \infty$, so läßt sich diese Formel mit Hilfe von (III) durch die Angabe einer (asymptotisch genauen) *unteren Grenze* von $|p(z)|$ für $|z| \leqq r$ ergänzen. Denn für $|p_0|^{1-r} \to \infty$ lassen sich auf $q(z) = \dfrac{-1}{p(z)}$ wegen $|q(0)|^{1-r} \to 0$ (III), sowie (III*), (III**) anwenden und es ergibt sich für $|z| \leqq r$ wegen $\mu^* = \dfrac{1}{\mathfrak{J}\,\frac{-1}{\omega(q(0))}} \cdot \dfrac{1+r}{1-r} = \dfrac{1}{\mathfrak{J}\,\omega(p(0))} \cdot \dfrac{1+r}{1-r} = \dfrac{1}{\sigma}$,

$$\left|\frac{1}{p(z)}\right| \leqq 16\,e^{-\pi\sigma} + 128\,\theta\,e^{-2\pi\sigma} + O(e^{-3\pi\sigma}),\ |\theta| \leqq 1,$$

$$\left|\frac{1}{16p(z)}\right| \leqq \left|\frac{1}{16p_0}\right|^{\frac{1-r}{1+r}} + O\left(\left|\frac{1}{p_0}\right|^{2\frac{1-r}{1+r}}\right),$$

$$\left|\frac{1}{16p(z)}\right| \leqq \left|\frac{1}{16p_0}\right|^{\frac{1-r}{1+r}} + 8\,\theta\left|\frac{1}{16p_0}\right|^{2\frac{1-r}{1+r}} + O\left(\left|\frac{1}{p_0}\right|^{3\frac{1-r}{1+r}}\right),\ r \geqq \frac{1}{3},$$

und daraus folgt in Verbindung mit (I), (I*), (I**) mit $\mu = \mathfrak{J}\,\omega(p_0)\frac{1+r}{1-r} >$ $> \sigma = \mathfrak{J}\,\omega(p_0)\frac{1-r}{1+r} \to \infty$.

$$\text{(V)}\quad e^{\pi\sigma} + 8\,\theta + O(e^{-\pi\sigma}) \leqq \underset{|z| \leqq r}{|16p(z)|} \leqq e^{\pi\mu} + 8\,\theta_1 + O(e^{-\pi\mu}),\ |\theta| \leqq 1,\ |\theta_1| \leqq 1,$$

$$\text{(V*)}\quad (16\,|p_0| - c)^{\frac{1-r}{1+r}} \leqq \underset{|z| \leqq r}{|16\,p(z)|} \leqq (16\,|p_0| + c)^{\frac{1+r}{1-r}},\ 0 \leqq c < \infty,$$

$$(\mathrm{V}^{**})\ |16p_0|^{\frac{1-r}{1+r}}+8\theta+O\left(\left|\frac{1}{p_0}\right|^{\frac{1-r}{1+r}}\right)\leqq \underset{|z|\leqq r}{|16p(z)|}\leqq\left(16|p_0|+8\theta_1+O\left(\frac{1}{p_0}\right)\right)^{\frac{1+r}{1-r}},$$

$$|\theta|\leqq 1,\ |\theta_1|\leqq 1,\ r\geqq\frac{1}{3}.$$

Andererseits folgen aus den linken Hälften dieser Formeln umgekehrt (III) (III*) (III**). Es ist noch von Interesse zu bemerken, daß die linke Hälfte der Formel (V*) (und damit auch (III*)) in etwas schwächerer Fassung aus (I*) direkt mit Hilfe eines Gedankens von Hrn. *Valiron* hergeleitet werden kann. *Valiron* bemerkt nämlich[15]), daß eine lineare Abbildung des Einheitskreises in sich, die ein z mit $|z|=r$ in den Nullpunkt bringt, den Nullpunkt in einen Punkt z_1 überführt mit $|z_1|=r$. In einer Relation zwischen $f(0)$ und $f(z)$, in der ein z mit $|z|=r$ vorkommt, darf man daher z mit 0 vertauschen, sofern die Bedingungen für die Gültigkeit der Relation gegenüber einer linearen Transformation des Einheitskreises in sich invariant sind. Danach folgt aus (I*)

$$|16p(0)|\leqq(16|p(z)|+c)^{\frac{1+r}{1-r}},\ |c|<\infty,$$

$$16|p(z)|\geqq(16|p_0|)^{\frac{1-r}{1+r}}+O(1). \tag{52}$$

Dies ist aber nur insofern schwächer als die linke Hälfte von (V*), als die linke Seite von (V*) gleich $16|p_0|^{\frac{1-r}{1+r}}+O\left(\frac{1}{|p_0|^{\frac{2r}{1-r}}}\right)$ ist.

Aehnliches gilt auch für (I**). Denn aus $|p_0|^{\frac{1-r}{}}\to\infty$ folgt ja, da mit (I**) auch (I*) gilt, nach (52) $p(z)\to\infty$, so daß in (I**) $p(0)$ mit $p(z)$ vertauscht werden kann und man eine Abschätzung von $p(z)$ nach unten erhält, die sogar etwas schärfer als die linke Hälfte von (V**) ist.

Durch ganz analoge Betrachtungen oder durch Benutzung von (V), (V*), (V**) für $\frac{-1}{p(z)}$ ergänzt man auch die Formeln (III), (III*), (III**) (wenn $\sigma^*=\frac{1}{\mathfrak{J}\frac{-1}{\omega(p_0)}}\ \frac{1-r}{1+r}$ gesetzt wird) zu

[15]) Vgl. die a. p. 55 zitierte Abhandlung.

$$\text{VI}\quad e^{-\frac{\pi}{\sigma^*}} + 8\theta\, e^{-\frac{2\pi}{\sigma^*}} + O\left(e^{-\frac{3\pi}{\sigma^*}}\right) \leqq \left|\frac{p(z)}{16}\right|_{|z|=r} \leqq e^{-\frac{\pi}{\mu^*}} + 8\theta_1 e^{-\frac{2\pi}{\mu^*}} + O\left(e^{-\frac{3\pi}{\mu^*}}\right),$$

$$\text{VI}^*\quad \left(\frac{|p_0|}{16} + O(p_0^2)\right)^{\frac{1+r}{1-r}} \leqq \left|\frac{p(z)}{16}\right| \leqq \left(\frac{|p_0|}{16} + O(p_0^2)\right)^{\frac{1-r}{1+r}},$$

$$\text{VI}^{**}\quad \left(\frac{|p_0|}{16} + \frac{\theta_1}{32}|p|^2 + O(p_0^3)\right)^{\frac{1+r}{1-r}} \leqq \left|\frac{p(z)}{16}\right| \leqq \left|\frac{p_0}{16}\right|^{\frac{1-r}{1+r}} +$$

$$+ 8\theta\left|\frac{p_0}{16}\right|^{2\frac{1-r}{1+r}} + O\left(|p_0|^{3\frac{1-r}{1+r}}\right), \quad r \geqq \frac{1}{3}.$$

Diese Formeln gelten unter der Voraussetzung $\sigma^* \to 0$, d. h., wegen (45*), $|p_0|^{1-r} \to 0$. Dabei ist $|\theta| \leqq 1$, $|\theta_1| \leqq 1$.

(Eingegangen den 14. März 1932)