Sur l'axiomatique de la théorie des ensembles et sur la logique des relations.

Autor(en): **Gonseth, F.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **5 (1933)**

PDF erstellt am: **17.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-6658

Sur l'axiomatique de la théorie des ensembles et sur la logique des relations

par F. GONSETH, Zurich

1. Remarques sur la méthode axiomatique

Nous allons commencer par soumettre à quelques critiques la méthode dite « axiomatique » par laquelle, suivant l'exemple de M. Zermelo, on a cherché à mettre la théorie des ensembles à l'abri des antinomies bien connues.

Depuis le mémoire de M. Zermelo et les objections présentées par Poincaré, la situation est loin de s'être définitivement éclaircie et l'unanimité ne s'est point faite sur le sens et la portée de la méthode elle-même. Nous allons en reprendre les traits essentiels. La première chose à faire est de renoncer à la définition de Cantor :

Un ensemble est la réunion en un tout de certains objets perçus ou pensés, les éléments de l'ensemble. Cette définition s'est révélée trop large et ouvre la voie aux paradoxes que l'on connaît. Il faut renoncer également à toute autre définition explicite de ce qu'il faut entendre par ensemble, par élément, par la relation d'inclusion d'un élément x dans un ensemble y (la relation $x \varepsilon y$), etc. Ces notions et relations ne doivent prendre — dit-on — que le sens que comportent les axiomes et les définitions qui s'y rapportent, axiomes et définitions qui sont à énoncer explicitement.

On va donc commencer par imaginer certaines *choses* que l'on appellera *ensembles* et qu'on désignera par les lettres $a, b, c \ldots$; on imaginera ensuite entre ces choses trois *relations*

1. la relation $a \varepsilon b$ (a est élément de b)
2. la relation $a < b$ (a est sous-ensemble de b)

et 3. la relation $a = b$ (a est identique à b).

Ces relations n'ont aucun sens par elles-mêmes. Toute leur signification doit être contenue dans les définitions et axiomes que voici :

Déf. 1. Si tout x qui est à a dans la relation 1 est aussi à b dans la même relation, a et b sont alors dans la relation 2.

Déf. 2. Si a et b sont aussi bien dans la relation $a < b$ que dans la relation $b < a$, alors a et b sont dans la relation 3.

Axiome 1. Si $a = b$ et si a est élément de A, b est aussi élément de A.

Axiome 2. Les éléments de deux ensembles A et B (différents) forment à eux seuls les éléments d'un nouvel ensemble C.

Axiome 3. Si A est un ensemble, les éléments de ses éléments forment un ensemble.

Axiome 4. Tous les sous-ensembles d'un ensemble forment à eux seuls les éléments d'un nouvel ensemble.

Axiome 5. Les éléments d'un ensemble qui possèdent un attribut bien déterminé (definit) *forment un sous-ensemble du premier.*

Axiome 6. On peut former un ensemble en choisissant un unique élément dans chaque élément de tout ensemble.

Le système de M. Zermelo comprend enfin un septième axiome qui permet d'affirmer l'existence d'un ensemble infini.

Axiome 7. Il existe un ensemble N tel que

1. *si l'ensemble nul (c.-à-d. qui n'a aucun élément) existe, c'est un élément de N ;*
2. *si m est un élément de N, celui-ci contient aussi* $\{m\}$ *(c.-à-d. l'ensemble dont m est l'unique élément).*

La première question que soulève ce système d'axiomes, c'est naturellement de savoir s'il détermine véritablement les objets de pensée (les ensembles) qu'il vise. On se souvient de l'objection de Poincaré[1]: ... « Quelqu'un qui ne sait pas ce que c'est qu'une *Menge* ne le saura pas davantage lorsqu'il aura appris qu'elle est représentée par le symbole ε, puisqu'il ne sait pas ce que c'est que ε » ... Les axiomes peuvent-ils à eux-seuls remplacer la connaissance intuitive et préalable des êtres mathématiques dont ils fixent les lois d'existence ? C'est là le point sur lequel il nous paraît nécessaire de nous arrêter un instant.

Pour justifier la méthode de M. Zermelo, on la met parfois en parallèle avec la méthode axiomatique usuelle en géométrie. Or il y a tout d'abord une différence essentielle entre le système d'axiomes que nous discutons et celui qui est à la base de la géométrie dite élémentaire. Cette différence est justement mise en lumière par la remarque de Poincaré que nous venons de rappeler. Dans la construction de la géométrie élémentaire, les êtres mathématiques soumis aux axiomes sont des *abstractions suggérées par le monde physique.* L'axiomatique fixe simplement les modalités de cette abstraction, fixe dans la sphère du rationnel les règles d'existence de ces objets abstraits. Dire — avec M. Weyl[2]) — « que la méthode axiomatique consiste simplement à rassembler *tous* les concepts et les faits fondamentaux, à partir desquels tous les autres concepts et

---

1) *H. Poincaré.* Dernières pensées, p. 124.
2) *H. Weyl:* Philosophie der Mathematik.

tous les autres faits d'une science peuvent être ou définis ou déduits, » c'est supposer que les concepts fondamentaux ont déjà pris naissance et qu'on sait déjà quelles sortes de relations on peut établir entre eux : c'est supposer que le *travail de la constitution des abstraits est déjà terminé.* Or sur ce point, l'axiomatique de M. Zermelo prend soin de spécifier qu'elle a coupé les ponts qui pourraient la relier avec la notion, intuitivement fondée, de *collection.* Le concept d'ensemble qu'elle vise n'y doit point être envisagé comme un abstrait suggéré par tel ou tel autre concept de la sphère intuitive : au contraire ce sont les axiomes à eux-seuls qui doivent lui créer, de toutes pièces, une signification et l'appeler à l'existence mathématique. Sans vouloir encore en tirer de conclusion quant à la légitimité de la méthode de M. Zermelo, il nous faut constater la présence d'un *hiatus essentiel* qui ne permet pas *de la justifier par comparaison ou identification avec l'axiomatique dite élémentaire.*

En revanche, il peut sembler à première vue le parallélisme s'établit de lui-même et de façon parfaite avec l'axiomatique *au second degré,* où toutes les notions sont repoussées dans le domaine de la logique des relations. L'essentiel de cette méthode est déjà dans les toutes premières lignes des « Grundlagen der Geometrie » de Hilbert.

« Nous imaginons trois catégories d'objets : nous nommons *points* les objets de la première catégorie, etc . . . »

« Nous imaginons qu'entre les points, les droites et les plans, il existe certaines relations que nous désignerons par les termes : « être sur », « entre », « parallèle », « congruent », « continu ». La description de ces relations, description exacte et suffisante pour les buts de la géométrie se fait par le moyen des « axiomes de la géométrie ».

Les objets géométriques doivent ainsi être vidés de leur contenu intuitif — pour employer une expression consacrée — et n'avoir d'autres propriétés que celles que les relations, purement abstraites, à établir entre eux vont leur conférer.

Les axiomes [3]) qui fixeront le sens de la locution « être sur » ou si l'on préfère de la « relation d'incidence » seront alors, par exemple, les suivants :

Axiome 1. On peut toujours imaginer pour deux objets de catégories différentes, une relation J (*,*) (la relation d'incidence).

Axiome 2. Pour ces deux objets, ou bien cette relation *est,* ou bien elle *n'est pas.*

Axiome 3. Cette relation est symétrique, etc, etc . . .

---

[3]) *M. Geiger.* Systematische Axiomatik der euklidischen Geometrie.

En face de cette axiomatisation sur le plan du *logique pur,* on peut prendre deux attitudes. La première est toute naturelle : elle consiste à regarder les « objets » et les « relations » soumis à l'axiomatisation comme de nouveaux abstraits suggérés par les notions et les relations géométriques du degré élémentaire : comme des *abstraits au second degré.* Au moment où nous établissons les axiomes, nous pouvons alors regarder à nouveau le processus de la constitution des notions abstraites comme terminé. De ce point de vue, cette axiomatisation est parfaitement semblable à l'axiomatisation élémentaire, elle répond complètement à la définition de M. Weyl : nous la regardons comme légitime. Il va sans dire que cette première attitude ne peut pas être adoptée dans la méthode de M. Zermelo, le lien avec l'intuitif étant expressément rompu.

La seconde attitude est moins clairement définie. Elle consiste essentiellement à admettre que le système des axiomes fournit en quelque sorte une *détermination implicite* des notions qui y figurent. Nous ne voulons pas discuter à cet endroit si, une fois qu'on a supposé les liens avec l'intuitif complètement dénoués, une détermination de ce genre reste possible. Nous voulons nous borner à remarquer que, dans le cas qui nous occupe, il faut en tous cas admettre que la notion de relation logique soit préalablement en notre possession. Il ne peut être question que cette notion soit elle aussi « définie implicitement », les axiomes caractérisant tout au plus les trois relations fondamentales et non la notion même de relation.

C'est là une grave objection, car la notion de relation, dans sa plénitude intuitive, donne lieu aux mêmes antinomies *(mutatis mutandis)* que la notion d'ensemble selon Cantor. Il faudrait donc que, par une axiomatisation adéquate, cette notion elle-même eût reçu sa justification. Or on sait bien que la Logique théorique n'y parvient que de façon insuffisante.

En résumé, ces critiques cherchent à mettre en lumière les deux faits suivants :

1. La méthode axiomatique de M. Zermelo diffère sur un point essentiel de la méthode axiomatique qui s'est constituée à partir de l'axiomatique élémentaire de la géométrie ; celui de la constitution préalable et par *abstraction,* des notions fondamentales.

2. Dans la mesure où elle prétend se rendre indépendante des notions intuitives, la théorie de M. Zermelo fait appel à la notion de *relation.* Or celle-ci, dans la plénitude de son sens, est antinomique, et les axiomes ne fournissent pas le moyen de la circonscrire.

Les points sur lesquels nous venons d'insister ne sont pas les seuls où les axiomes précédents prêtent à la critique. On a déjà souvent fait observer que le 5 e fait intervenir la notion d'*attribut bien déterminé (definit)* qui aurait elle-même besoin d'être axiomatiquement fondée. Nous ne voulons pas revenir non plus sur la discussion que l'axiome 6 (du choix) a soulevé. En revanche, nous appuyons spécialement sur les critiques que nous venons de formuler, parce qu'elles s'appliquent également aux systèmes axiomatiques dérivés de celui de M. Zermelo (où par exemple on cherche à parer au point faible signalé à l'axiome 5 e).

La position axiomatique de ces systèmes est d'ailleurs telle, qu'elle ne permet pas de porter une clarté suffisante sur la question-même en vue de laquelle ils ont été inventés : celle des antinomies. Il est vrai que les antinomies connues peuvent être évitées, mais la méthode ne permet pas d'apercevoir ce qu'on pourrait appeler la cause ou la racine des paradoxes, et, à cause du « nuage axiomatique » dans lequel la notion d'ensemble reste enveloppée, la possibilité d'autres paradoxes reste ouverte, sans qu'on puisse prévoir si la méthode restera efficace.

Le but de ce travail est d'esquisser une autre axiomatisation des notions de la théorie des ensembles. Cette nouvelle méthode permet — nous semble-t-il — d'éviter les différents écueils que nous venons de signaler. En particulier elle fera voir que la racine commune des antinomies doit être aperçue dans le fait très simple que voici :

Les éléments des ensembles selon Cantor sont susceptibles de posséder par eux-mêmes des attributs intrinsèques, avant même d'être envisagés comme éléments d'un ensemble — attributs qui ne se limitent pas à caractériser l'existence individuelle d'un élément dans l'ensemble.

Des attributs de ce genre sont par exemple « d'être une paire de bas » ou « d'être un ensemble qui ne se contient pas lui-même comme élément » ou même plus simplement « d'être un ensemble ».

2. Les objets et les relations de la logique pure

« L'*attitude axiomatique* » dans laquelle nous allons nous placer est celle que nous avons décrite tout à l'heure en l'opposant à la méthode de M. Zermelo ; l'axiomatisation y comprend les deux phases suivantes :

a) Constitution des notions fondamentales, celles-ci étant à abstraire de certaines autres notions (telles que celles d'objet, de collection, de nombre, etc) qui doivent être considérées comme étant préalablement en notre possession.

b) Enumération des axiomes.

Il faut une analyse assez attentive pour distinguer la première phase dans l'axiomatisation « élémentaire » de la géométrie. Il n'en reste pas moins vrai que c'est elle qui donne sa signification véritable à toute construction axiomatique. Ceci se manifeste spécialement dans le fait que le processus de l'abstraction ne peut être que suggéré, mais jamais « verbalement défini ». C'est ainsi que les droites imparfaitement réalisées dans le monde physique ont suggéré aux premiers géomètres la notion géométrique de droite, la notion de lieu précis, celle de point mathématique. Le passage de la notion intuitive à la notion géométrique est le phénomène mathématique par excellence, mais il reste plus ou moins sous-entendu.

De la même façon nous allons nous efforcer de faire entendre ce que doivent être les objets et les relations de la *logique pure.*

Toute construction mathématique peut être mise sous la forme d'un réseau de relations entre certains êtres géométriques ou arithmétiques. Si l'on abstrait de ces relations et des objets mathématiques qu'elles relient tout ce qui a trait à la grandeur, à la forme, etc, il en reste ce qu'on pourrait appeler le *contenu de pure logique.* Les *objets de la logique pure (éléments logiques)* ne sont alors susceptibles que des propriétés suivantes :

Ils sont ou identiques ou différents (sans qu'il y ait lieu de préciser en quoi ils diffèrent).

Ils n'ont, par ailleurs, pas d'autre rôle que de figurer dans les *relations logiques,* ou mieux encore que de servir de point d'attache aux *liaisons logiques.* (La différence entre les deux expressions précédentes sera précisée tout à l'heure.)

Il est bien entendu que, de tout objet dont on parle, on suppose qu'il est individuellement reconnaissable, et qu'il peut être représenté par un symbole qui lui soit particulier.

Les *liaisons logiques* n'ont à leur tour que les propriétés suivantes :

Deux liaisons logiques sont ou identiques ou différentes (sans qu'il y ait lieu de préciser *en quoi* elles diffèrent).

Par ailleurs, elles n'ont d'autre rôle que de relier les objets logiques dont nous avons parlé.

Une liaison logique s'établit entre deux ou plus de deux éléments. Supposons par exemple qu'elle soit établie entre les deux éléments logiques a et b et désignons-la par le symbole (a, b). Dans ce symbole, les lettres a et b ne désignent pas deux éléments plus ou moins quelconques (comme ce serait le cas dans la relation arithmétique $a < b$ par exemple).

Il faut au contraire les envisager comme les signes reconnaissables de deux éléments individualisés. La liaison logique (a, b) ne s'établit alors qu'entre ces deux éléments. Si, au contraire, il peut y avoir un sens à dire qu'il existe entre un a et un b, variables au sein de certaines collections, *toujours une même liaison logique,* nous dirons que le symbole (a, b) représente une *relation logique.* Mais le procédé qui permettra de reconnaître quand deux liaisons logiques peuvent être dites identiques ou équivalentes doit encore être expliqué.

Ainsi par exemple, la relation

$F(a, b)$ d'un fils a quelconque à son père b, n'est naturellement pas une relation logique, mais une relation de parenté. De même, ni la relation $G(x, y) \equiv x < y$ entre un nombre x quelconque et tout nombre plus grand y, ni la relation d'incidence $J(a, b)$ d'une droite a quelconque à tout point b de cette droite, ne sont des relations logiques. De même encore ni la liaison « entre Zébédée et son fils », ou bien « entre les nombres 3 et 4 », ou bien « entre l'axe des X et l'origine » ne sont des liaisons logiques. Mais on parvient aux notions de la logique pure à partir des précédentes en faisant abstraction de tout ce qui est parenté, grandeur ou position. Il sera commode de dire que les notions plus ou moins intuitives à partir desquelles une relation logique peut être atteinte par abstraction sont des *réalisations* de la relation logique. Ainsi par exemple, les nombres entiers réalisent certains éléments logiques, et la relation d'un nombre quelconque x à celui qui le suit $x+1$ réalise une certaine relation logique. De même, on peut imaginer que la succession de 4 à 3 réalise une liaison logique, dont les éléments sont réalisés par les nombres 3 et 4. Nous avons insisté sur ces exemples très simples pour bien opposer le domaine des notions abstraites et les domaines où celles-ci se réalisent. S'il est parfaitement possible de concevoir les objets abstraits et les notions que nous avons en vue, qu'il soit bien clair aussi qu'il est impossible de les réaliser dans leur perfection : toute réalisation *in concreto* est du genre que nous venons de dire. Ceci n'est en aucune façon une faiblesse de notre théorie. C'est au contraire un caractère qui se retrouve dans toute constitution d'abstrait ; un caractère qui est bien visible aussi dans l'axiomatique élémentaire. Le fait qu'il est impossible de réaliser in concreto un cercle parfait, ou une droite « absolument rectiligne » n'a jamais été un obstacle à l'érection de la géométrie en science rationnelle. De la manière même dont les notions de la logique pure trouveront une réalisation dans celles de la géométrie ou de l'arithmétique (et d'ailleurs aussi dans les notions intuitives), la notion de droite trouve une réalisation dans la « trajectoire d'un rayon lumineux » ou dans le « trait tracé à la règle ».

Le but véritable de la *méthode axiomatique,* c'est de dégager les notions abstraites de la « matière » de leurs réalisations ; le but de tout *système d'axiomes* de fixer les règles selon lesquelles l'abstrait doit être traité.

Le but des lignes qui vont suivre est donc de *dégager de leurs réalisations les notions de la logique pure, ou mieux encore de construire axiomatiquement la notion même de « Logique pure ». Il se présentera que cette façon de faire écartera tout naturellement les difficultés relatives aux antinomies.*

L'esprit dans lequel notre tentative axiomatique va être entreprise étant ainsi fixé, il nous a paru inutile de spécifier chaque fois par la suite ce qui est axiome et ce qui est définition.

3. Notions fondamentales. Principes et axiomes

Passons à la construction du système axiomatique où les notions fondamentales telles que

élément ou objet logique, liaison logique, compatibilité et incompatibilité de deux ou de plusieurs liaisons, relation logique, structure logique, etc.

sont mises en relation les unes avec les autres.

Nous dirons d'une liaison établie entre deux ou plusieurs éléments qu'elle touche ceux-ci, ou qu'elle les recouvre, ou qu'elle les relie, etc.

Entre deux (ou plusieurs) éléments logiques on peut imaginer un nombre quelconque de liaisons logiques, toutes différentes entre elles. (Deux liaisons sont ou identiques ou différentes, sans qu'il y ait jamais lieu de préciser par quoi elles peuvent ne pas être identiques.)

Il est naturellement très facile d'indiquer des *réalisations* intuitives ou mathématiques qui justifient cet axiome. Par exemple : On peut former autant de groupes différents de trois objets que l'on veut, où entrent deux objets donnés. La présence simultanée de ces deux objets dans un même groupe est une liaison. (Naturellement pas une liaison *logique.*) Ou bien aussi : On peut tracer entre deux points d'un plan autant de chemins différents que l'on veut ; etc., etc.

Deux liaisons sont ou compatibles ou incompatibles (qu'elles soient ou non établies entre les mêmes éléments).

Trois liaisons sont également soit compatibles, soit incompatibles. Elles sont en particulier incompatibles si deux d'entre elles le sont. Elles pourront l'être aussi, bien que compatibles deux à deux.

En général : *Des liaisons en nombre quelconque sont incompatibles si c'est le cas pour une partie d'entre elles.*

Décréter l'incompatibilité de deux liaisons, c'est donc décréter l'incompatibilité pour toutes les combinaisons où ces deux liaisons seraient présentes. C'est là-dessus que se basera tout à l'heure le principe du libre choix des incomptatibilités.

A propos de la compatibilité ou de l'incompatibilité de deux liaisons, il y a une remarque essentielle à faire.

A priori, il n'y a aucune incompatibilité entre deux liaisons différentes, tant qu'on n'a encore rien décrété, si ce n'est qu'elles ne sont pas identiques. L'incompatibilité ne peut provenir que d'une mise en rapport de ces liaisons. Tant qu'elles n'existent que de façon purement individuelle et chacune pour soi, toute possibilité de contradiction est exclue. C'est de la même façon que deux idées ne peuvent jamais entrer en opposition, tant qu'elles restent étrangères l'une à l'autre et ne sont pas associées.

Dans la pratique du raisonnement, certaines affirmations d'incompatibilité prendront une forme positive. Si, par exemple, on sait que n liaisons sont incompatibles, et que n—1 d'entre elles existent, on en *déduira* que la n^e n'existe pas.

Passons à la notion *d'ensemble*. Elle se présentera pour nous sous la forme de l'*ensemble lié :* c'est une collection d'éléments logiques entre lesquels on a établi un certain nombre de liaisons. Pour bien marquer la différence avec la notion habituelle d'ensemble, un ensemble lié sera appelé aussi une *structure logique.*

La construction de ces structures se fera selon les prescriptions de certains principes très simples, qu'il faut considérer comme venant compléter les règles de la logique ordinaire et du nombre, valables dans le fini.

A. *Principe de libre extension. Une structure étant donnée, on peut toujours imaginer un nouvel élément différent de tous les éléments déjà existants.*

Ce principe ne fait que formuler ce qu'on appelle aussi la liberté des constructions mentales.

B. *Principe de libre liaison. Entre deux ou plusieurs éléments, on peut toujours imaginer une nouvelle liaison différente des liaisons déjà existantes.*

La justification de ce principe est dans la remarque que nous avons faite plus haut sur la compatibilité des liaisons qui restent sans rapports entre elles. Tant que nous n'aurons pas introduit la possibilité d'identifier deux liaisons dans une structure, toute tentative d'établir une contradiction dérivée de l'existence de certaines liaisons est évidemment sans objet.

Nous appellerons *structures libres,* celles pour lesquelles on n'invoque que les deux principes précédents. Remarquons que les éléments (et les liaisons) d'une structure libre ne sont pas nécessairement en « quantité dénombrable » : les structures dénombrables, continues, etc, s'obtiendront par spécialisation (c'est-à-dire par adjonction d'axiomes) à partir des structures libres.

On pourrait appeler *homogène* une structure où aucun élément ne jouit d'une position ou d'une propriété privilégiée : Une structure de ce genre est par exemple celle où il y a, entre deux éléments quelconques, exactement deux liaisons.

Il y a une certaine *dualité* entre les deux notions d'élément logique et de liaison logique : On pourrait considérer les liaisons comme des éléments ; la propriété de deux ou de plusieurs liaisons de toucher un élément commun serait alors considérée comme établissant une liaison entre ces liaisons-éléments. En tenant compte de cette dualité, on pourrait considérer le principe A comme réciproque de B sous la forme plus précise, mais moins simple que voici :

On peut toujours imaginer que deux ou plusieurs liaisons viennent se nouer sur un nouvel élément différent de tous les éléments déjà existants.

C. *Principe du libre choix des incompatibilités. On peut librement exiger l'incompatibilité de deux ou de plusieurs liaisons choisies à volonté dans une structure.*

La justification de ce principe est dans la remarque que nous avons faite concernant les « conséquences » d'une incompatibilité.

Un cas spécial de ce principe est le suivant :

On peut librement supprimer d'une structure toutes les liaisons que l'on veut

qui suggère un principe analogue par dualité :

On peut librement supprimer d'une structure tous les éléments que l'on veut (et les liaisons qui les touchent).

Nous sommes ainsi conduit à la notion de *structure partielle.* On obtient une *structure partielle* par suppression de liaisons et d'éléments.

Il faut naturellement se garder de croire qu'une structure partielle est moins « ample » que la structure originelle. Mais il y a une remarque plus subtile à faire. Il ne faut pas croire que, si l'on a supprimé un élément, cet élément ne se retrouve pas dans la structure partielle. Ceci n'est pas un paradoxe : Un élément logique n'a *a priori* aucune signification et n'en reçoit une que par sa position, son insertion dans une structure. Si, par conséquent, nous supprimons un élément et que la structure restante soit identique à la structure originelle, l'élément supprimé renaît à l'intérieur de la structure partielle. Ainsi, dans une suite semblable à celle des nombres entiers, si nous en supprimons le premier, celui-ci renaît là où était le second. Quant à savoir quand deux structures peuvent être considérées comme identiques, c'est une question que nous reprendrons après l'introduction des axiomes proprement dits.

D. *Principe de contraction. On peut remplacer une structure partielle par un seul élément,* sur lequel viendront se nouer toutes les liaisons qui ont été supprimées dans la construction de la structure partielle, et qui aboutissaient à un élément de celle-ci.

Plus important que ce principe sera sa réciproque qui permettra l'opération inverse :

D'. *Principe d'insertion. On peut, à la place d'un élément, insérer une structure,* par l'opération inverse de celle que nous venons de décrire.

Ce principe permet de construire une structure de structures, pourvu que celles-ci puissent tout d'abord être mises en état de liaison « comme » les éléments d'une structure.

La liste des principes nécessaires n'est pas encore complète. En particulier nous n'avons encore aucune règle concernant l'identification de deux liaisons.

Mais il nous paraît utile d'examiner tout d'abord sur des exemples simples quelle est la portée des principes que nous avons déjà introduits. D'ailleurs, les principes D et D' pourraient être envisagés comme conséquences des principes qui les précèdent.

4. Les axiomes de l'ordre[4]) et les structures ordonnées

Nous allons examiner par quels axiomes purement restrictifs, les structures ordonnées « dans un sens » peuvent être obtenues à partir d'une structure libre. Conformément aux principes A et B, nous partirons de la structure libre que nous avons une fois déjà donnée en exemple.

Entre deux éléments quelconques a et b, nous imaginons donc deux liaisons différentes (a, b) et $(a, b)^*$.

On représente ces liaisons de façon plus commode si l'on se sert du fait que a et b peuvent être nommés dans l'ordre inverse et si l'on pose

$$(a, b) = (b, a)^* \quad \text{et} \quad (b, a) = (a, b)^*.$$

---

[4]) Cf. *B. Russel.* Introduction to mathematical philosophy. Chap. III. The définition of order.

Nous appliquons ensuite le principe C du libre choix des incompatibilités.

Axiome O_1. Les deux liaisons

$$(a, b) \quad \text{et} \quad (b, a)$$

sont incompatibles.

Considérons ensuite deux paires d'éléments a et b, et c et d. Si l'on tient compte de l'axiome 2, les combinaisons suivantes sont encore formées de deux liaisons compatibles :

$$\begin{array}{ccc} (a, b) & \text{et} & (c, d) \\ (b, a) & \text{et} & (c, d) \\ (a, b) & \text{et} & (d, c) \\ (b, a) & \text{et} & (d, c). \end{array}$$

Nous allons décréter que deux de ces combinaisons sont incompatibles. Donc :

Axiome O_2. A supposer que les liaisons de la combinaison (a, b) et (c, d) soient compatibles, les liaisons (b, a) et (c, d) de même que (a, b) et (d, c) sont à tenir pour incompatibles (tandis que (b, a) et (d, c) restent compatibles).

Considérons ensuite les trois éléments a, b, c et les trois paires a et b, b et c, et c et a. Supposons que les liaisons (a, b) et (b, c) soient compatibles. Les axiomes 1 et 2 ne permettent encore de rien affirmer au sujet des deux combinaisons à trois termes

$$\begin{array}{ccccc} (a, b) & \text{et} & (b, c) & \text{et} & (a, c) \\ (a, b) & \text{et} & (b, c) & \text{et} & (c, a). \end{array}$$

On s'en rend compte immédiatement par exemple sur la réalisation (représentation) suivante. Faisons correspondre aux quatre éléments logiques a, b, c, d les sommets d'un tétraèdre (fig. 1) et supposons que les liaisons soient réalisées par les vecteurs qu'on peut tracer entre ces points. On peut alors donner à nos deux axiomes une forme positive. L'axiome 1. dit tout d'abord que l'on aura toujours soit (a, b) soit (b, a). En d'autres termes, une arête du tétraèdre ne portera jamais qu'un vecteur.

L'axiome 2 exige simplement que, lorsque la liaison à porter sur une arête a été choisie, celle qu'il faut porter sur toute autre arête posée ne puisse être choisie que d'une seule façon.

Ainsi par exemple, si l'on a choisi les liaisons (a, b) et (b, c), la liaison à porter sur l'arête *ac* ne peut être que soit (a, c), soit (c, a), mais pas les deux concurremment. Nous allons exclure l'une de ces deux possibilités.

Aixome O_3. A supposer que les liaisons (a, b) et (b, c) soient compatibles, les trois liaisons (a, b) et (b, c) et (c, a) sont incompatibles.

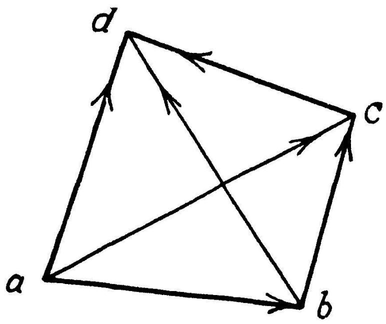

Fig. 1.

Dans la représentation, cela signifie que, s'il existe deux liaisons représentées par deux vecteurs dont le second est attaché à l'extrémité du premier, il existe aussi une liaison représentée par leur somme géométrique.

Les trois axiomes précédents peuvent être appelés les *axiomes abstraits de l'ordre.* Ils permettent de ranger n objets logiques, liés conformément aux axiomes, dans un ordre déterminé par les liaisons seulement. La chose est à peu près évidente sur la réalisation : elle est certainement vérifiée pour les trois éléments $a, b, c,$ ces points se suivent dans l'ordre déterminé par le nombre de liaisons qui en « partent » : de a il en part deux, de b une seule et de c aucune. Introduisons le quatrième point d. Il y aura maintenant un point d'où partiront exactement trois liaisons. Si nous portons sur l'arête *ad* la liaison $(a\ d)$, ce sera encore une fois le point a, et si nous avions porté la liaison (d, a), ce serait le point d. On parvient au cas général par induction : En mettant à part le point dont partent n-1 liaisons et en raisonnant ensuite sur les n-1 éléments restants, tous les éléments sont choisis l'un après l'autre dans un ordre déterminé.

Nous dirons d'une structure qui satisfait aux trois axiomes de l'ordre qu'elle est *ordonnée.* Remarquons expressément qu'*une structure qui ne satisfait encore qu'à ces axiomes n'est pas encore soumise à la catégorie du nombre, (spécialement si celui-ci doit être transfini).* Une structure libre comme celle dont nous sommes partis n'est encore ni dénombrable, ni « de la puissance du continu » etc. et il en est de même des structures qui ne sont qu'ordonnées. La distinction en structures dénombrables ou non-dénombrables, par exemple, exige l'intervention d'axiomes d'un autre genre. Cette remarque a son importance, car elle exclut l'affirmation que « tout ensemble » possède un nombre cardinal, fini ou transfini ». Ce nombre est, au contraire, une propriété qu'il faut encore porter dans les ensembles ordonnés, par de nouveaux axiomes restrictifs. Nous aurons encore l'occasion d'y revenir. Pour l'instant, nous allons exposer en détail au paragraphe suivant, comment les choses se présentent pour l'ensemble réalisé dans la suite des nombres entiers.

Remarquons pour finir qu'il y a deux façons opposées d'ordonner une structure en choisissant arbitrairement, entre deux éléments quelconques, l'une des deux liaisons présentes dans la structure libre dont nous sommes partis.

5. L'ensemble des nombres entiers. Les axiomes du nombre

Le titre de ce paragraphe exige une mise au point immédiate. Les nombres entiers ne sont en effet pas des éléments logiques purs. La suite de ces nombres ne fournira donc pas une réalisation absolument adéquate d'un ensemble lié. Mais on peut apercevoir dans les relations entre nombres le dessin d'un réseau de liaisons logiques. Lorsque nous parlerons de l'ensemble des nombres entiers, cela voudra donc dire que nous allons regarder cette collection comme la réalisation d'une certaine structure purement logique, le mot de réalisation ayant le sens expliqué au § 2. Cette manière de faire n'est en aucune mesure nouvelle en mathématiques ; elle s'éclaircit parfaitement si l'on cherche ce qui lui correspond dans l'axiomatique élémentaire. Le parallélisme est aussi étroit que possible : nous allons faire de la logique pure sur l'ensemble des nombres entiers comme on fait de la géométrie sur une figure.

C'est dans le même esprit que nous parlerons des axiomes de l'entier. Dans le cadre que nous traçons, la signification de ces axiomes s'éclaire très vivement. Ce sont les restrictions à apporter aux suites simplement ordonnées pour que celles-ci deviennent « numérotables ». La voie à suivre est ainsi toute tracée. La première chose à faire est d'exiger l'existence d'un *premier élément.* C'est d'ailleurs également l'objet du premier axiome du système de Peano que nous allons prendre comme terme de comparaison. En voici les 5 axiomes :

Axiome 1. Zéro est un numéro.

Axiome 2. Si a est un numéro, $a+$, c'est-à-dire « le suivant », « le successif », est aussi un numéro.

Axiome 3. Le principe d'induction sous la forme suivante : Si s est une classe comprenant le zéro et si le successif d'un numéro quelconque x qui fait partie de s, en fait également partie, s contient tous les numéros.

Axiome 4. Si les successifs de deux numéros sont égaux, ces numéros le sont aussi.

Axiome 5. Le successif d'un numéro ne peut être zéro.

Il est clair que ces axiomes doivent être remaniés pour prendre place dans notre théorie. Commençons par choisir un élément que nous nommerons 1, et demandons-nous à quelles conditions il doit satisfaire pour être le premier dans une structure. Choisissons un autre élément, l'élément 2, et choisissons encore l'ordre dans lequel la liaison (1, 2) est à conserver. Considérons ensuite deux éléments x et y, et supposons que l'on ait l'ordre x, 1, y. Nous supprimons les liaisons (x, 1) et (x, y), par exemple en décrétant leur incompatibilité avec (1, 2). La structure est maintenant partagée en deux structures partielles indépendantes : celle des éléments qui précèdent 1, et celle qui contient 1 et les éléments suivants. Cette construction restrictive donne lieu à l'axiome suivant qui vient prendre la place du premier axiome de Peano. (Nous nommons d'ailleurs structure ou suite dénombrée la suite réalisée par les nombres entiers.)

Axiome N_1. La suite dénombrée possède un premier élément.

Le deuxième axiome aura pour objet de faire passer de la structure simplement ordonnée à la *suite* ordonnée, c'est-à-dire à la structure dans laquelle chaque élément possède un élément déterminé qui le suive immédiatement.

Jusqu'ici nous avons souvent raisonné comme si tous les éléments de la structure et toutes les liaisons étaient donnés d'avance. Il n'y avait pas d'inconvénient à le faire, mais qu'il soit bien entendu qu'une structure ne peut être décrite dans son devenir que par la façon dont elle s'engendre. Et une description de ce genre ne peut qu'indiquer les procédés selon lesquels « *aux éléments déjà existants viendront s'adjoindre encore de nouveaux éléments* » . C'est naturellement ici que doit intervenir la notion de la définition prédicative de Poincaré : Le processus de la construction doit être prédicatif en ce sens que l'adjonction de nouveaux éléments ne doit remettre en question aucune des liaisons supposées déjà établies entre les éléments supposés déjà existants.

Voyons maintenant sous cet angle le second axiome de notre suite à définir :

Axiome N_2. Les éléments qui suivent un élément a *quelconque, forment une structure qui possède elle-même un premier élément $a+$, différent de a.*

Supposons donc que tous les éléments existants déjà possèdent la propriété requise, c'est-à-dire que les liaisons entre eux satisfassent aux incompatibilités axiomatiques. Soit maintenant b un nouvel élément. En exigeant certaines incompatibilités, nous pourrons l'introduire entre a et $a+$, par exemple. Par d'autres incompatibilités nous pourrons exiger que b soit le premier des éléments qui viennent après a, et ainsi de suite.

Le troisième axiome de Peano contient la notion de classe empruntée à la logique. Nous pourrions introduire cette notion sous la forme d'une structure partielle par la définition suivante :

Une structure partielle qui ne se décompose pas en deux structures partielles indépendantes est une classe dans la structure originelle. On pourra dire aussi que les éléments d'une classe possèdent un attribut déterminé.

Avec cette définition on pourrait conserver le troisième axiome en question. Mais il nous paraît préférable de faire appel à des axiomes de la même nature que le précédent. Le plus simple sera d'introduire aussi la notion de dernier élément.

Axiome N_3. La classe des éléments qui précèdent a possède un dernier élément $a-$.

La structure est maintenant ordonnée dans les deux sens. Il suffit d'exiger finalement que la classe des éléments qui viennent avant un a quelconque soit finie. Ceci peut faire l'objet du dernier axiome que voici :

Axiome N_4. Toute structure partielle contenue dans la classe des éléments qui précèdent a possède aussi un dernier terme [5]).

En résumé, nous définissons donc la suite dénombrée comme étant la structure libre qui satisfait aux axiomes (O_1, O_2, O_3) de l'*ordre* et (N_1, N_2, N_3, N_4) du *nombre.*

Sur la base de ces axiomes et des notions fondamentales explicitement introduites, en particulier des notions du *premier* et du *dernier,* le principe d'induction est maintenant démontrable.

On peut tout d'abord l'énoncer sous la forme suivante :

Toute structure partielle de la suite dénombrée qui commence par I *et qui contient, en même temps qu'un élément a toujours le suivant $a+$, est identique à la suite dénombrée.*

L'identité de deux structures infinies est une chose à définir : *Deux*

---

[5]) Si l'on étendait la notion de structure partielle (impropre) à la structure originelle elle-même, l'axiome N_4 condiendrait naturellement N_3.

structures infinies sont identiques si elles ont été construites par une application identique des mêmes principes et si elles satisfont aux mêmes axiomes restrictifs.

Il va de soi que dans ce cas tout élément qu'on pourra attribuer à l'une pourra l'être aussi à l'autre.

Dans notre cas, la suite partielle satisfait d'elle-même aux axiomes N_1 et N_2, et naturellement aussi à l'axiome N_4, puisqu'une structure partielle d'une structure partielle est encore une structure partielle. Quant aux éléments qui précèdent un élément a dans la structure partielle, ils le précèdent aussi dans la suite primitive et possèdent un dernier terme d'après N_3 ou N_4.

Enfin, il est clair que s'il ne s'était agi, dans ce qui précède, que de parvenir le plus rapidement et le plus simplement possible à la structure dénombrée, il aurait suffi de faire appel aux principes d'extension et de libre liaison.

6. La relation logique

Jusqu'ici les liaisons ne sont entrées en rapport les unes avec les autres que par leur incompatibilité éventuelle. Les seules propriétés qu'elles peuvent posséder, c'est donc d'exister ou de ne pas exister simultanément (ou aussi de toucher des éléments communs). Mais nous n'avons encore introduit aucun principe qui permette de décider quand deux liaisons, posées tout d'abord comme différentes, peuvent être regardées comme identiques ou équivalentes. Pour y parvenir, nous allons commencer par définir la *projection d'une structure sur elle-même.*

Considérons tout d'abord, par exemple, la structure dénombrée qui ne conserve que les liaisons distinguées qui joignent un élément a au suivant $a+$. On obtient une projection de la suite sur elle-même en faisant correspondre l'élément 1 à un élément quelconque x, puis l'élément $1+=2$ à l'élément $x+$, et ainsi de suite. En général :

Définition : Une projection d'une structure sur elle-même est une correspondance univoque et réciproque de la structure avec tout ou partie d'elle-même, la correspondance embrassant à la fois les éléments et les liaisons.

Les projections qu'une structure admet forment naturellement un quasi-groupe [6]).

Cette définition devra être encore un peu étendue dans un instant. Dans le cas qui nous occupe, ce quasi-groupe est tel que la liaison (1, 2) peut

[6]) Le quasi-groupe satisfait aux axiomes de groupe excepté à celui des éléments inverses.

être amenée sur toute liaison $(a, a+)$. Si maintenant nous regardons cette *applicabilité comme la caractéristique de l'équivalence,* toutes les liaisons de la suite deviennent équivalentes à (1, 2) et équivalentes entre elles.

C'est ce système de liaisons toutes équivalentes que nous définissons comme formant une relation logique ; celle de l'élément quelconque a à $a+$. Dès ici, le symbole $(a, a+)$ peut être considéré comme celui de la *relation* elle-même.

Ce premier exemple est un peu particulier, du fait que a détermine $a+$. Examinons encore la structure dénombrée où l'on a réintroduit les liaisons entre les éléments qui ne se suivent pas immédiatement. Pour décrire le quasi-groupe des projections qui interviennent ici, il est commode d'imaginer que la structure est donnée en deux exemplaires superposés. L'élément a de la liaison (a, b) sera supposé choisi dans le premier exemplaire, et b dans le second.

On peut alors « repousser » le second exemplaire « vers la droite » comme dans le premier exemple, de façon que 2 vienne en y. La liaison (1, 2) tombe sur $(1, y)$, le premier élément étant resté fixe.

On peut ensuite « repousser » aussi le premier exemplaire « vers la droite » de façon que 1 vienne en x, x devant d'ailleurs précéder y. La liaison (1, 2) est maintenant équivalente à la liaison (x, y). Cette dernière est d'ailleurs quelconque dans la structure. Celle-ci est donc uniquement formée de liaisons équivalentes entre elles. Elle représente encore une fois une relation logique, qu'on écrira

$$(x, y) = x < y.$$

Le fait que la structure correspondant à la première relation est comprise dans cette dernière signifie que celle-ci est plus générale.

Examinons encore la relation réalisée arithmétiquement par deux nombres, a et b, et leur somme c. Nous l'écrirons

$$(a, b, c) \equiv a + b = c.$$

Pour obtenir cette relation, en d'autres termes pour obtenir les *axiomes de l'addition,* nous allons précisément nous servir du quasi-groupe qui sert à identifier les liaisons. Nous commençons donc par établir (principe de libre liaison) une liaison entre les éléments 1,1 et 2. Pour plus de clarté, on pourra supposer avoir 3 exemplaires de la structure dénombrée à sa disposition. Le quasi-groupe sera ensuite engendré par les opérations suivantes :

Lorsque l'exemplaire a de la structure est repoussé d'un pas vers la droite, il en est de même de l'exemplaire c.

Lorsque l'exemplaire b est repoussé d'un pas vers la droite, il en est encore une fois de même de l'exemplaire c.

Les deux éléments 1 des exemplaires a et b peuvent venir se placer en des endroits quelconques, tandis que le troisième élément de la relation est déterminé.

Les axiomes correspondant à cette façon de faire sont maintenant :

$$\begin{array}{ll} \text{Axiome } S_1 & 1 + 1 = 1 + (= 2) \\ \text{Axiome } S_2 & (a + 1) + b = (a + b) + 1 \\ \text{Axiome } S_3 & a + (b + 1) = (a + b) + 1. \end{array}$$

On pourrait naturellement retrouver des circonstances analogues dans les structures denses homogènes comme celles qui sont réalisées par la suite des nombres rationnels, par exemple, ou par le continu linéaire. Mais il n'est pas possible d'opérer de la même façon si la structure étudiée n'est pas homogène (par exemple une suite dénombrée suivie elle-même d'un ensemble dense). Mais ce n'est peut-être pas un défaut de notre point de vue, car il n'y a en réalité pas grand'chose de commun entre le fait de se suivre dans une suite dénombrée et dans une suite dense. L'identification exigerait « l'enrobement » dans une suite homogène, ce qui est d'ailleurs toujours possible.

Comme conclusion, nous voulons formuler le principe d'identification dont nous nous sommes servi et la définition de la relation logique. Il nous faut tout d'abord étendre la notion de projection d'une structure de liaisons à un système d'autant de structures superposées qu'il y a de termes dans les liaisons considérées. On peut ensuite énoncer le :

Principe des liaisons équivalentes. Deux liaisons qui, lors d'une projection (généralisée) d'une structure sur elle-même, viennent à coïncider, peuvent être regardées comme équivalentes.

La définition de la relation est maintenant la suivante :

Une relation logique est une structure de liaisons toutes équivalentes. L'existence d'une relation logique est donc liée à l'existence d'un quasi-groupe transitif de projections d'une structure sur elle-même, la transivité devant être réalisée aussi bien pour les liaisons que pour les éléments.

7. Comparaison avec l'axiomatique actuelle

Nous allons maintenant examiner comment se présentent les axiomes de M. Zermelo dans le cadre que nous avons tracé.

La première remarque à faire concerne la notion même de l'élément : dans la théorie de M. Zermelo, l'élément doit être un ensemble, la relation de l'ensemble-élément à l'ensemble-totalité restant dans l'état d'indétermination que Poincaré avait déjà souligné ; dans notre esquisse, au contraire, l'élément est une entité sans signification préalable et qui par exemple ne devient nombre que par sa présence dans la suite dénombrée. En revanche, la notion d'appartenance de l'élément à l'ensemble est directement fondée sur la notion intuitive de collection.

Le principe de contraction permet toutefois d'imaginer qu'une structure puisse jouer le rôle d'un élément. Mais la différence avec l'ensemble-élément n'en reste pas moins essentielle : si l'on remplace par contraction une structure par un seul élément, celui-ci ne garde plus trace du fait que sa place était occupée tout à l'heure par une structure ; sa signification est à nouveau déterminée par sa seule position dans la structure restante.

Il en résulte que les deux relations $a \varepsilon b$ et $a < b$ ne sont pas essentiellement différentes.

On voit par là que la notion d'élément logique est bien adéquate à la spéculation mathématique : elle permet de faire abstraction des propriétés « internes » d'une « pluralité » pour n'envisager que ses rapports avec d'autres « pluralités ».

Quant à la relation $a = b$ elle sera pour nous l'identité des structures a et b, dont nous avons parlé au paragraphe précédent. (Nous dirons aussi qu'elles sont superposables.)

Dans ces conditions, l'axiome 1 de M. Zermelo s'énonce comme suit :

Axiome 1. Si deux structures a et b sont superposables et si a est structure partielle d'une troisième structure A, il en est de même de b qui peut prendre la place de a.

Cet axiome est naturellement vérifié.

L'axiome 2 est également immédiat :

Axiome 2. Les éléments de deux structures différentes peuvent être réunis en une seule structure.

Il suffit en effet d'introduire des liaisons quelconques entre les éléments de l'une et les éléments de l'autre. Si par exemple, les deux structures sont ordonnées, on peut à volonté intercaler les éléments de l'une entre les éléments de l'autre.

L'axiome 3 n'est qu'une autre forme de la réciproque du principe de contraction.

Axiome 3. Si A est une structure de structures, c'est encore une structure formée à l'aide des éléments des structures partielles.

Nous reviendrons dans un instant sur les axiomes 4 et 5.

L'axiome 6 peut être envisagé de deux manières : Il peut être regardé tout d'abord comme une autre forme du principe de contraction. Mais s'il ne s'agit pas seulement d'affirmer l'existence d'un seul ensemble « choisi », le rôle de cet axiome est en tous points semblable à celui de l'axiome 3. Il décrira comment on peut former un ensemble comprenant toutes les possibilités de choix.

Considérons le cas le plus simple de deux structures. Imaginons que a et b soient deux éléments de la première entre lesquels il existe n liaisons $(a, b)_1$, $(a, b)_2 \dots$, que de même a' et b' soient deux éléments pris dans la seconde entre lesquels existent les n' liaisons $(a', b')_1$, $(a', b')_2 \dots$. Correspondant aux deux paires a et a', et b et b', nous imaginons deux éléments logiques A et B entre lesquels il y ait à la fois les liaisons de la première et de la seconde structure (c'est-à-dire, puisque les liaisons n'ont aucun caractère spécifique, $n + n'$ liaisons différentes). Nous obtenons ainsi une nouvelle structure qu'on peut appeler une structure-produit des deux premières.

Cette façon de faire peut s'étendre au cas où l'on a à « choisir » les éléments dans une suite S infinie (et liée) de structures. On pourra établir dans ce cas une infinité de liaisons entre les éléments A et B. Ces liaisons formeront elles-mêmes une structure, et on les ordonnera par exemple par paquets de n, n', n'' ..., liés entre eux de la même façon que les structures de la suite S.

Si par exemple, on devait construire par ce procédé le produit de la suite dénombrée par elle-même, on pourrait en représenter la structure comme dans la fig. 2. Les termes qui se suivent sur une verticale ou sur

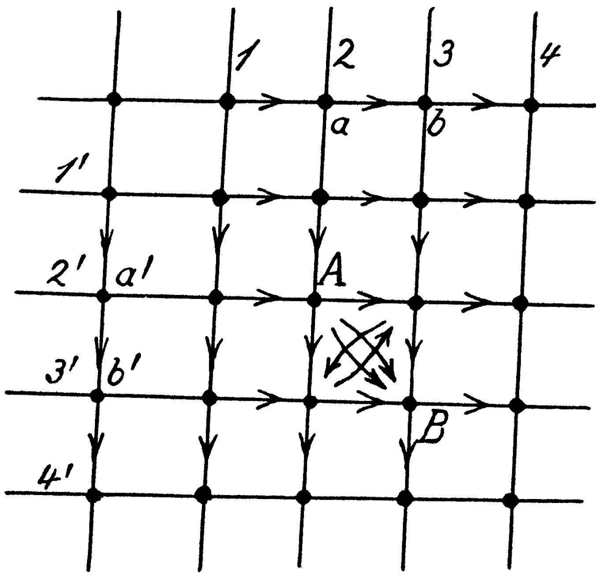

Fig. 2.

une horizontale sont liés une fois, les diagonales des carrés portent deux liaisons. On voit aussi quelles liaisons il faudrait supprimer pour que cette structure redevienne une suite dénombrée.

Nous n'avons tenu compte que des liaisons à deux termes pour « ordonner » la structure-produit. On peut traiter les liaisons à plus de deux termes de façon analogue.

L'axiome 4 est encore du même genre que le précédent. S'il ne s'agit que d'indiquer une structure qui le vérifie, la chose ne présente aucune difficulté. Par exemple on peut considérer deux sous-structures comme liées s'il existe au moins une liaison entre un élément de l'une et un élément de l'autre, ou un élément de l'une et deux éléments de l'autre, etc.

On pourrait aussi, selon le procédé de Cantor, ramener la construction d'une structure satisfaisant à cet axiome à celle d'un produit « répété ».

L'axiome 7 est remplacé par la construction axiomatique de la suite dénombrée.

Reste enfin l'axiome 5, dans lequel la notion d'attribut défini qui intervient « du dehors » et dont le domaine de signification n'a pas été délimité, est généralement considérée comme un point faible. Dans l'esquisse que nous avons tracée, nous avons placé la structure partielle avant l'attribut. L'axiome 7 est donc vérifié identiquement. Mais le rôle qu'il joue dans la construction axiomatique, ce sont les procédés d'après lesquels les structures partielles peuvent être déterminées qui en tiennent lieu.

Ces procédés peuvent être déjà distingués dans l'exemple de la suite dénombrée. Ainsi, les nombres pairs y déterminent une structure partielle parce que la notion de nombre pair peut être définie à partir des principes fondamentaux, et spécialement des axiomes restrictifs de la suite dénombrée. Il en serait de même pour toute autre propriété arithmétique. En d'autres termes et en général :

Si l'on entend par attribut bien défini une propriété de certains éléments d'une structure qui peut être construite sur la base des principes généraux et des axiomes relatifs spécialement à cette structure — et dont la validité ou la non-validité peut être constatée sans ambiguïté —, alors notre définition de la structure partielle est équivalente à l'axiome 5.

La différence est que maintenant le domaine de signification du mot attribut est délimité.

En résumé, on voit qu'il suffit de quelques modifications, dont les unes sont assez légères, mais dont la dernière est essentielle, pour que les axiomes de M. Zermelo viennent prendre place dans notre théorie. Il est vrai qu'ils s'y trouvent maintenant plutôt comme conséquences que comme axiomes.

8. Les antinomies

Nous allons maintenant faire voir que les antinomies bien connues sont écartées tout naturellement.

Commençons par le paradoxe de l'ensemble de tous les ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes comme éléments.

La première remarque à faire — remarque de principe — c'est que les ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes comme élément ne sont pas des éléments logiques. Ce sont des objets de la pensée caractérisés par une propriété à priori, et non par leur position dans une structure logique. Leur ensemble, dans notre théorie, n'existe pas.

Tout au plus pourrait-on former une structure qui soit ensuite réalisée par « tous » les ensembles dont nous parlons. Il faudrait trouver un principe ordinateur, selon lequel ils pourraient être mis en liaison. Il n'y a aucune raison de croire qu'un principe de ce genre soit contenu dans la notion seule « d'ensemble qui ne se contient pas lui-même comme élément ».

Ainsi, nous ne sommes pas en mesure de construire une structure correspondant à l'ensemble antinomique. Et même si nous le pouvions, le paradoxe pourrait encore être évité.

Supposons, en effet, que Σ soit une structure de ce genre. C'est dire qu'elle a été formée d'après l'axiome 3 du paragraphe précédent, ou d'après la réciproque du principe de contraction, à l'aide des structures qui ne sont pas applicables sur une partie d'elles-mêmes. Posons la question qui devrait amener le paradoxe : Σ se contient-elle elle-même comme structure partielle ?

Supposons que non : Alors, d'après la façon dont elle a été construite, elle devrait se contenir elle-même, ce qui est la contradiction bien connue.

Supposons le contraire : elle contiendrait alors une structure partielle qui se contiendrait elle-même.

Si nous devions admettre, comme dans la théorie habituelle, que cette structure ne peut être qu'un élément de Σ, nous ne pourrions éviter la seconde contradiction, et le paradoxe serait là, encore une fois. Mais la chose n'est aucunement nécessaire : il peut fort bien exister une structure partielle qui soit différente de celles qui ont servi à construire l'ensemble Σ. L'antinomie a donc disparu.

Passons à l'antinomie du plus grand cardinal, que nous considérons comme plus profonde.

Le mécanisme qui l'engendre est le suivant :

Tout ensemble E possède un nombre cardinal déterminé. Le cardinal de l'ensemble $((E))$ des sous-ensembles de E est plus grand que celui de ce dernier. L'ensemble T de tous les ensembles ne peut avoir que le plus grand cardinal, et pourtant l'ensemble $((T))$ en a un plus grand encore.

Que pouvons nous objecter à cette façon de faire ? Il y a tout d'abord la remarque de principe qui peut être invoquée dans tous les cas semblables. C'est que les objets « ensembles » ne sont pas des éléments logiques, mais des objets doués à priori de certaines propriétés. L'ensemble de tous les ensembles est donc une construction mentale tout à fait étrangère à la théorie que nous avons développée. Tout au plus pourrait-on parler :

soit d'une structure dont les éléments puissent être réalisés par les objets « ensembles », et les liaisons par certaines façons de ces derniers d'entrer en rapport les uns avec les autres,

soit d'une structure dont elle-même et toutes les autres structures soient des structures partielles.

Dans le premier cas, il pourrait arriver que la structure ainsi abstraite fût antinomique. Mais ce fait ne toucherait en rien notre théorie, car nous ne reconnaissons pas comme légitimes toutes les structures abstraites de tels ou tels ensembles d'objets aux propriétés les plus imprévues, mais seulement celles qui peuvent être construites sur la base de nos principes fondamentaux.

Pour reprendre la comparaison avec la géométrie élémentaire, nous sommes aussi peu dans l'obligation de reconnaître les structures abstraites de collections d'objets, que la géométrie euclidienne du plan l'est d'accepter les résultats de mesures faites sur une sphère ou sur toute autre surface. La géométrie et notre théorie échappent aux dangers que représentent pour l'une la formation de collections aux caractères antinomiques (comme le catalogue des catalogues qui ne se mentionnent pas eux-mêmes, ou comme la classe des adjectifs imprédicables de Russel), et pour l'autre les mesures sur les objets physiques, parce que l'une et l'autre ont été placées par l'axiomatisation en dehors de la « sphère de leurs réalisations respectives ».

Ceci dit « pour le principe », il nous faut reconnaître que, dans le cas qui nous occupe, nous ne sommes pas encore hors de peine, parce que le paradoxe semble renaître à propos de la seconde éventualité, à propos de la « structure de toutes les structures ». Nous pourrons d'ailleurs nous borner à considérer des structures libres, par exemple des structures où il y a exactement une liaison entre deux éléments quelconques. Supposons que l'on puisse former la somme de toutes les structures de ce genre. Il faudrait premièrement que celles-ci correspondissent aux éléments d'une structure. On pourrait déjà s'arrêter ici, en remarquant que nos structures libres ne sont pas liées à priori par leur définition. Mais à défaut des liaisons imposées par les définitions, on peut en imaginer plus ou moins librement. Par exemple on pourrait dire que le fait d'envisager deux structures simultanément constitue déjà, dans la sphère des réalisations, l'équivalent d'une liaison. On est donc conduit à envisager les structures en question comme correspondant aux éléments d'une structure libre du même genre que celles dont nous nous occupons. *Acceptons* cette façon de faire.

Une fois toutes ces hypothèses admises, on pourrait former la structure-somme S en établissant entre les éléments de deux structures à additionner exactement une liaison allant de chaque élément à chaque élément. La structure-somme est alors encore une structure libre du même genre que les précédentes, et il n'en peut exister d'autres qui n'y soient pas contenues comme structure partielle.

Et maintenant nous pouvons former selon l'axiome 4 une structure dont les éléments correspondent aux structures partielles de S. En établissant une seule liaison entre les éléments représentants de deux ensembles dont au moins deux éléments sont liés, nous engendrerons encore une fois un ensemble libre $((S))$ du même genre. Tous les termes du paradoxe sont à nouveau là.

Dès lors il est clair que le nœud de la question doit se trouver dans la démonstration qui, dans la théorie de Cantor, assigne à l'ensemble de *tous* les sous-ensembles d'un ensemble quelconque un nombre cardinal supérieur au nombre cardinal de ce dernier. Pour le dénouer, il nous faut commencer par quelques remarques sur l'emploi du mot *tous*.

Examinons pour commencer le cas d'une collection finie. Pour une collection assez peu nombreuse, le mot tous a une signification intuitive immédiate. Dire que, dans ce cas, tous les objets sont donnés, cela veut dire qu'on peut « entrer effectivement » en possession de chacun d'eux. Mais la chose change totalement d'aspect si la collection devient suffisamment nombreuse pour qu'il ne soit plus possible d'en examiner tous les objets l'un après l'autre jusqu'au dernier. Tout comme le mot infini, le mot fini a dans ce cas une signification en partie conventionnelle. En disant que tous les objets sont donnés, on demande qu'on *admette la possibilité* de les énumérer un à un jusqu'à épuisement. Pour reprendre une expression fréquemment employée ces derniers temps dans la discussion des fondements des mathématiques, c'est un chèque en blanc sur tout objet compris entre le premier et le dernier, mais dont on ne peut assurer d'avance si on pourra le remplir effectivement. Le sens du mot tous est alors relatif à la convention qui veut que ce chèque ne perde jamais sa valeur, c'est-à-dire aux règles axiomatiquement acceptées qui régissent l'emploi des nombres.

Quelle est la différence avec le cas de la suite dénombrée ? Le sens des mots : « Tous les éléments de la suite ont telle ou telle propriété » est ici tout engagé dans le principe d'induction, (qui est soit un axiome, comme dans le système de Peano, soit une conséquence des axiomes de la suite dénombrée) et ne porte pas plus loin que celui-ci. Dire que tous les éléments sont donnés, c'est dire simplement que l'on peut toujours passer au suivant, et c'est *accepter* que cela soit suffisant bien qu'il n'y ait pas de dernier. Par définition, la suite dénombrée est précisément celle pour laquelle cette convention (axiomatique) est valable.

Il ne sert de rien d'objecter : « Il est absurde de dire que tous les éléments d'une suite infinie, même dénombrée, ont été examinés, puisqu'il est dans la nature de l'infini de ne pas être épuisé. » En parlant ainsi, on oppose simplement l'un à l'autre le sens de tous dans une suite finie et l'autre sens de ce mot dans une suite dénombrée, ces deux significations étant en effet irréductibles l'une à l'autre.

Il n'y a pas de difficulté à raisonner de la même façon sur l'ensemble réalisé par les nombres rationnels ou par le continu des nombres réels. On postule tout d'abord les axiomes de l'ordre, puis certains axiomes restrictifs plus ou moins analogues aux axiomes du nombre qui fixent les conventions suivant lesquelles le mot tous peut être employé.

En résumé, la signification du mot tous à l'intérieur d'une structure, est relative aux axiomes que cette dernière doit (par définition) vérifier : c'est un *caractère intrinsèque* qui ne peut être sans plus reporté d'une structure sur une autre.

Ces constatations s'appliquent immédiatement à la notion de l'équivalence. Si deux structures doivent être telles que tout élément de l'une corresponde à un élément de l'autre et réciproquement, les mots : « tout élément » ont un sens fixé la première fois par les axiomes de la première structure, la seconde fois par ceux de la seconde.

Il est un cas où cette équivalence doit être admise : c'est celui où les deux structures satisfont aux mêmes axiomes. Rien ne peut dans ce cas les distinguer l'une de l'autre.

Ce sera *l'équivalence au sens restreint*. On pourra l'élargir ensuite par les définitions suivantes :

Deux structures sont équivalentes si l'une s'obtient à partir de l'autre par suppression de certaines liaisons seulement.

Deux structures sont équivalentes si ce sont deux sommes ou deux produits formés de « façon équivalente » à l'aide de structures équivalentes.

Ceci posé, envisageons deux structures libres quelconques du même genre que précédemment et supposons qu'on n'ait accepté aucun axiome restrictif (si ce n'est peut-être, pour toutes deux, les axiomes de l'ordre). D'après ce que nous venons de dire, nous n'avons aucun moyen de constater en quoi elles pourraient différer. Au contraire, d'après la définition de la structure libre, l'une quelconque peut toujours être envisagée comme faisant partie de l'autre : il faut donc les considérer comme équivalentes. Ainsi : *Deux structures libres quelconques (du même type) sont à considérer comme équivalentes.*

Ceci nous ramène aux deux structures S et $((S))$. Comme leur équivalence se confirme, c'est bien dans la démonstration indiquée qu'il nous faut rechercher la cause du paradoxe. Rappelons-en les points essentiels.

Les éléments de $((S))$ représentent les structures partielles de S. Parmi celles-ci se trouvent aussi celles qui ne comprennent qu'un élément : S est donc structure partielle de $((S))$. Nous allons partager les éléments de $((S))$ en deux classes :

la première comprendra les éléments qui sont compris dans la structure partielle à laquelle ils correspondent,

la seconde comprendra les éléments qui n'y sont pas compris.

On montre ensuite que cette seconde classe ne peut correspondre à aucun élément de $((S))$ et que, par conséquent, elle ne peut être une sous-structure de S.

Le point essentiel du raisonnement est donc celui où l'on applique le principe suivant : *De tout élément on peut décider sans ambiguïté s'il appartient ou non à un ensemble déterminé.* Ce principe forme en quelque sorte le fondement de la définition de l'ensemble dans la théorie habituelle, où les éléments d'un ensemble sont contenus dans celui-ci en tant qu'individualités possédant une propriété distinctive, sur la foi de laquelle l'élément est attribué ou non à l'ensemble.

Dans notre théorie, ce principe est faux. Un élément logique n'ayant aucune propriété à priori, il n'y a aucun sens à demander s'il fait ou non partie d'une structure. La chose est bien visible sur l'exemple des structures libres. Les principes de libre extension et de libre liaison permettent d'attribuer un élément logique quelconque à une structure libre quelconque. (C'est là justement la raison de la dénomination : structure libre.)

Dans notre théorie, la notion de nombre cardinal ne pourra être étendue aux structures libres : c'est ce que nous voulions déjà dire au § 4 par les mots : Les structures libres (ou seulement ordonnées) ne tombent pas encore sous la catégorie du nombre.

L'antinomie a maintenant complètement disparu.

Il est inutile d'insister encore sur la structure somme de toutes les structures, sur laquelle on ne raisonnerait pas différemment.

9. Conclusion

L'analyse du paradoxe du plus grand cardinal a montré que la source des difficultés, dans la théorie de Cantor, est en premier lieu la notion de l'objet susceptible de posséder, a priori et de par lui-même, telle ou telle propriété ; en second lieu la définition de l'ensemble comme collection d'objets ayant une propriété distinctive. C'est là ce qu'on pourrait appeler une définition *statique* de l'ensemble : les objets-éléments sont *tous* déterminés par avance et il faut admettre que, d'un objet quelconque, on saura décider s'il appartient ou non à un ensemble déterminé, mais quelconque.

Bien qu'elles réduisent d'emblée l'objet-élément à n'être plus qu'un ensemble, la théorie de M. Zermelo et les théories plus récentes qui en découlent restent complètement sur le même terrain.

A cette façon statique d'envisager un ensemble, on peut opposer la notion de la « totalité en devenir ». Toujours à propos des axiomes de M. Zermelo, Poincaré écrivait déjà : « Quand je parle de tous les points de l'espace, je veux dire tous les points dont les coordonnées sont exprimées par des nombres rationnels, ou par des nombres algébriques.... ou de toute autre manière que l'on pourra inventer. Et c'est ce *l'on pourra* qui est l'infini. »

C'est à cet ordre d'idées qu'appartient la notion de *limite,* et spécialement celle de *suite en devenir (werdende Folge)* de M. Weyl.

On peut dire que la plupart des difficultés de la théorie des ensembles provenaient de la contradiction « latente » entre la définition statique, et la nécessité de considérer l'infini comme étant en état de perpétuelle extension.

Pour y échapper nous avons dégagé de la *notion intuitive d'objet* la notion d'*objet purement logique,* dont les propriétés a priori se réduisent à être soit identiques, soit différents entre eux, et dont les autres propriétés lui seront conférées par une structure en devenir.

Un autre exemple typique d'objet en devenir est celui de la structure libre.

Nous croyons utile d'ajouter un mot encore sur la différence que nous avons faite entre les principes et les axiomes.

Les principes formulent les règles selon lesquelles une structure *quelconque* peut être traitée. Elles viennent compléter les règles simples, valables pour une collection finie, quant au partage de celle-ci en deux ou plusieurs collections, quant à la réunion de deux collections en une seule, quant aux possibilités de choix ou de permutations, etc., règles qu'on peut considérer comme formant la partie essentielle de la *logique ordinaire*. On pourrait donc dire que les principes ont pour objet de formuler les règles de la logique de l'infini (en dehors de la question de savoir si nous les avons déjà formulées toutes).

Les axiomes, au contraire, sont des décrets restrictifs portés sur des structures en devenir, et dont l'extension indéfinie est ainsi soumise à certaines prescriptions caractéristiques.

Ceci dit, nous pouvons énoncer de la façon suivante le but que nous nous sommes proposé d'atteindre dans ce travail : Il s'agissait de montrer

a) qu'en acceptant les règles de la logique ordinaire pour autant qu'il s'agit de structures finies,

b) qu'en les complétant par certains principes relatifs aux structures infinies,

c) et en n'opérant systématiquement que sur les « objets logiques » dont le sens et le rôle doivent être précisés par une axiomatisation *sui generis* (et d'ailleurs étroitement analogue en son principe à celle qui permet de constituer la géométrie élémentaire en science rationnelle),

on élimine de façon toute naturelle les antinomies qui se présentaient jusqu'ici, spécialement dans la théorie des ensembles et dans la logique de l'infini.

(Reçu le 6 avril 1932)