Grundlagen der elliptischen Geometrie.

Autor(en): **Fischer, Anna**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **5 (1933)**

PDF erstellt am: **17.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-6661

Grundlagen der elliptischen Geometrie

Von ANNA FISCHER, Bern.

In seiner Arbeit über die Grundlagen der Geometrie nimmt Hilbert[1]) die folgende Definition der Ebene an:

„Die Ebene ist ein System von Dingen, die Punkte heißen und die sich umkehrbar eindeutig auf die im Endlichen gelegenen Punkte der Zahlenebene oder auf ein gewisses Teilsystem derselben abbilden lassen; diese Punkte der Zahlenebene (d. h. die Bildpunkte) werden auch zugleich zur Bezeichnung der Punkte unserer Ebene selbst verwandt.

Zu jedem Punkte A unserer Ebene gibt es in der Zahlenebene Jordansche Gebiete, in denen der Bildpunkt von A liegt und deren sämtliche Punkte ebenfalls Punkte unserer Ebene darstellen. Diese Jordanschen Gebiete heißen Umgebungen des Punktes A.

Jedes in einer Umgebung von A enthaltene Jordansche Gebiet, innerhalb dessen der Punkt A (Bildpunkt von A) liegt, ist wiederum eine Umgebung von A.

Ist B irgendein Punkt in einer Umgebung von A, so ist diese Umgebung auch zugleich eine Umgebung von B.

Wenn A und B irgend zwei Punkte unserer Ebene sind, so gibt es stets eine Umgebung von A, die zugleich den Punkt B enthält."

Die Bewegung wird wie folgt definiert:

„Eine Bewegung ist eine umkehrbar eindeutige stetige Transformation der Bildpunkte der Zahlenebene in sich von der Art, daß dabei der Umlaufssinn einer geschlossenen Jordanschen Kurve stets derselbe bleibt. Die Umkehrung der zu einer Bewegung gehörenden Transformation ist wieder eine Bewegung. Eine Bewegung, bei welcher ein Punkt M ungeändert bleibt, heißt eine Drehung um den Punkt M."

Um nun die Euklidische oder hyperbolische Geometrie aufzubauen, genügen drei Axiome:

Axiom I: Die Bewegungen bilden eine Gruppe.

Bezeichnen wir als wahren Kreis die Gesamtheit der verschiedenen Lagen, die ein Punkt A bei den sämtlichen Drehungen um einen von ihm verschiedenen Punkt M annehmen kann, so lautet das

Axiom II: Jeder wahre Kreis besteht aus unendlich vielen Punkten.

Für die Gruppe der Bewegungen muß noch die Stetigkeit gefordert werden; dies geschieht in

---

[1]) *Hilbert*, Über die Grnndlagen der Geometrie. Math. Ann. 56, 1902.

Axiom III: Die Bewegungen bilden ein abgeschlossenes System.

Auf Grund dieser Axiome gelingt es Hilbert, den Kreis und die Gerade mit ihren notwendigen Eigenschaften zu gewinnen.

Zu den Untersuchungen Hilbert's bemerkt Gonseth[2]), daß es vorteilhafter wäre, anstatt in der Zahlenebene direkt in der *topologisch* definierten euklidischen oder hyperbolischen Ebene zu operieren. In der vorliegenden Arbeit wird dieser Weg eingeschlagen, und zwar zur Begründung der elliptischen Geometrie.

Als *Ebene* wählen wir die *projektive Ebene* in ihrer topologischen Bedeutung, d. h. die geschlossene einseitige Fläche vom Geschlecht eins.

Eine *Drehung* um den Punkt M ist eine eindeutige stetige Transformation der projektiven Ebene in sich, wobei der Punkt M ungeändert bleibt; der Umlaufssinn jeder geschlossenen Jordanschen Kurve, die M im Inneren enthält, soll dabei invariant sein.

Die drei Axiome nehmen wir in der folgenden Fassung an:

Axiom I: Die Drehungen um einen beliebigen Punkt M bilden eine Gruppe.

Axiom II: Jeder Kreis besteht aus unendlich vielen Punkten.

Axiom III: Die Drehungen um einen beliebigen Punkt M bilden ein abgeschlossenes System.

§ 1. Zunächst grenzen wir in der projektiven Ebene durch eine zweiufrige doppelpunktfreie geschlossene Kurve C ein Gebiet ab. Darin gelingt es, genau nach dem Verfahren von Hilbert, den Kreis K um M zu konstruieren und zu beweisen, daß er eine geschlossene Jordansche Kurve ist. Die Einführug der Koordinaten x, y für die Punkte auf K, die Hilbert benützt, kann umgangen werden, da es sich beim Beweis nur um die Aufeinanderfolge der Punkte auf K handelt. Anstatt der Zahlengeraden und der Zahlenkreise betrachten wir Jordansche Bögen und geschlossene Jordansche Kurven.

Die Gruppe der Drehungen von K um M in sich erweist sich als holomorph mit der Gruppe der gewöhnlichen Drehungen des gewöhnlichen Kreises in sich.

Erst von hier an ist mein Aufbauverfahren von demjenigen von Hilbert wesentlich verschieden.

§ 2. Es muß nun die Gruppe der Transformationen aller Punkte bei den Drehungen der projektiven Ebene um M untersucht werden.

---

[2]) *Gonseth,* Les Fondements des Mathématiques. Paris, A. Blanchard. 1926, p. 66 ff.

Wir beweisen zunächst:

Ist μ ein Kreis um M, von dem bekannt ist, daß er eine geschlossene Jordansche Kurve ist, die M im Inneren enthält, so gibt es außer der Identität keine Drehung um M, die jeden Punkt von μ in Ruhe läßt.

Beweis. Die Drehung um M, die jeden Punkt auf μ festläßt, sei D. Wir nehmen im Gegensatz zu unserer Behauptung *erstens* an, es gäbe in beliebiger Nähe eines Punktes A auf μ Punkte, die durch D transformiert werden. Dann schlagen wir um A einen genügend kleinen Kreis, der durch einen gegenüber D veränderlichen Punkt geht. Dieser Kreis α trifft μ sicher in einem Punkt B. Die Rotation D um M ist für den Kreis α eine Transformation, bei der der Mittelpunkt A und ein Punkt B auf α invariant bleiben; es ist also eine Transformation des Kreises α in sich. Dabei kann entweder die Orientierung von α unverändert bleiben und wir haben es mit einer Drehung von α in sich zu tun; oder geht die Orientierung von α in die entgegengesetzte über und unsere Transformation ist eine Umlegung des Kreises α in sich.

Betrachten wir zunächst den letzteren Fall. Da B der Schnittpunkt von α mit μ ist, gibt es auf α eine unendliche Reihe von Punkten C_i, die gegen B konvergieren und außerhalb μ liegen, und eine unendliche Reihe von Punkten D_i, die gegen B konvergieren und innerhalb μ liegen. Bei der Drehung D um M bleibt der Punkt B fest und α soll eine Umlegung erleiden. Es müßte dabei die Reihe der Punkte C_i in die Reihe der Punkte D_i übergehen. Angenommen, dies wäre nicht der Fall und es würde die gegen B konvergierende Punktfolge C_i in eine gegen einen Punkt E auf α konvergierende Folge E_i übergehen. Wir können auf μ eine unendliche Folge von Punkten F_i wählen, die auf μ gegen den Punkt B konvergiert. Bei der Drehung D um M würde, nach Anahme, die Folge F_i in Ruhe bleiben, während die C_i in die E_i übergehen. Es müßte daher, nach Axiom III, eine Drehung um M geben, bei welcher der Punkt B fest bleiben und gleichzeitig in den Punkt E übergehen würde. Dies ist unmöglich und folglich muß bei der Umlegung des Kreises α die Folge C_i in die Folge D_i übergehen. Die Transformation der C_i in die D_i ist aber ihrerseits auch nicht möglich, da bei einer Drehung um M Punkte außerhalb μ nicht ins Innere von μ gelangen können. Unsere Annahme, daß die Transformation des Kreises α eine Umlegung sei, ist also falsch; die Drehung D um M ist für den Kreis α ebenfalls eine Drehung um seinen Mittelpunkt A. Dabei bleibt, nach Annahme, der Punkt B von α fest. Es müssen daher alle Punkte von α fest bleiben und es kann in beliebiger Nähe von A keine Punkte geben, die durch die Drehung D transformiert würden.

Wir konstruieren nun um M ein System von geschlossenen Kurven ohne Doppelpunkt, so daß durch jeden Punkt der projektiven Ebene eine und nur eine Kurve des Systems hindurchgeht.

Zunächst beweisen wir, daß sich in diesem System eine einufrige Kurve befinden muß. Angenommen, es seien alle Kurven des Systems zweiufrig. Da die projektive Ebene eine geschlossene einseitige Fläche ist, gibt es durch jeden Punkt mindestens eine einufrige geschlossene Kurve. Wir ziehen eine solche, γ durch M. Durch jeden Punkt von γ geht eine Kurve unseres Systems. Für jede zweiufrige Kurve des Systems wird ein Teil der Punkte von γ innerhalb, ein Teil auf und eventuell ein Teil außerhalb der Kurve sein. Geht man im System immer weiter, so muß man schließlich zu einer Kurve K kommen, die so ist, daß alle Punkte von γ innerhalb und auf K liegen. Es wäre somit möglich, eine zweiufrige Kurve K im System zu finden, die γ vollständig enthält. Dies ist aber unmöglich. Also gibt es in unserem System mindestens eine einufrige geschlossene Kurve. Es gibt eine einzige, da zwei einufrige Kurven sich in der projektiven Ebene (Geschlecht $= 1$) notwendig treffen müßten. Diese einufrige Kurve liegt außerhalb aller zweiufrigen des Systems um M.

Es sei nun λ eine zweiufrige Kurve des Systems, innerhalb oder außerhalb μ. Dann nehmen wir *zweitens* an, daß alle Punkte im Ring zwischen μ und λ bei der Drehung D fest bleiben, während in beliebiger Nähe von λ bewegliche Punkte sind. Wir legen um den Punkt B auf λ einen genügend kleinen Kreis α, so daß er durch das Gebiet zwischen μ und λ hindurchgeht. Dieser Kreis geht auch durch einen beweglichen Punkt A in der Nähe von . Die Drehung D ist für α eine Drehung in sich. Dabei bleiben unendlich viele Punkte von α fest; somit müssen alle Punkte von α fest bleiben.

Ist λ die einufrige Kurve des Systems, so können wir *drittens* annehmen, daß alle Punkte innerhalb und außerhalb μ bei der Drehung D fest bleiben, mit Ausnahme der Punkte auf λ. Dann ziehen wir um einen der festen Punkte einen genügend kleinen Kreis durch einen beweglichen Punkt auf λ und schließen gleich wie früher.

Damit ist unser Beweis erbracht: *Bei den Drehungen D um M, die alle Punkte von μ fest lassen, bleiben alle Punkte der Ebene fest.*

§ 3. Wir beweisen nun folgende Behauptung: *Jeder Kreis ist eine geschlossene Jordansche Kurve. Das System aller Kreise um M ist so beschaffen, daß durch jeden Punkt der projektiven Ebene ein und nur ein Kreis des Systems hindurchgeht. Im System befindet sich stets eine einzige einufrige Kurve, außerhalb aller Kreise. Diese einufrige Kurve* *nennen wir Gerade. Man erhält jeden Punkt des Kreises durch den Punkt P je einmal, wenn man den Drehungswinkel ω die Werte von o bis 2π durchlaufen läßt. Jeder Punkt der Geraden wird erhalten, wenn ω die Werte von o bis π durchläuft. Für die Zusammensetzung zweier Drehungen um die Winkel ω_1, ω_2 gilt die Formel:*

$$\Delta(\omega_1)\,\Delta(\omega_2) = \Delta(\omega_1 + \omega_2).$$

Wir betrachten die Drehungen des Kreises K in sich um die Winkel von o bis 2π. Es ist zu beweisen, daß dabei jeder Punkt der projektiven Ebene ebenfalls einen Kreis (oder die Gerade) um M beschreibt. Mit jedem Punkt der projektiven Ebene betrachten wir eine kleine Umgebung desselben, die mit einer bestimmten Indikatrix versehen ist. Bei einer Drehung um M kann ein Punkt in sich selber transformiert werden, entweder unter Erhaltung oder unter Umkehrung der zugehörigen Indikatrix. Diese zwei Fälle sind verschieden. Unter dieser Voraussetzung gilt [3]:

1. Für jeden Punkt der projektiven Ebene hängt die Lage des transformierten Punktes vom Drehwinkel ω *eindeutig* ab.

Jeder Drehung um den Winkel ω zwischen o und 2π entspricht eine Drehung von K in sich. Da bei einer Drehung um 2π, bei welcher die Punkte von K in Ruhe bleiben, auch *alle* Punkte der projektiven Ebene in Ruhe bleiben, entspricht jeder Drehung von K in sich eine einzige Drehung der Ebene um M. Nach einer Drehung um 2π erreicht jeder Punkt seine ursprüngliche Lage mit der ursprünglichen Indikatrix.

2. Die Lage des transformierten Punktes hängt *stetig* vom Drehwinkel ω ab.

Wir wählen auf K einen festen Punkt O. Es sei $\omega_1, \omega_2, \ldots$ eine unendliche Reihe von Winkelwerten, die gegen den Wert ω konvergieren, $T_1, T_2, \ldots$ eine unendliche Reihe von Punkten der projektiven Ebene, die gegen den Punkt T konvergieren. Bei den Drehungen um $\omega_1, \omega_2, \ldots$ gehe der Punkt O auf K bezüglich in die Punkte $S_1, S_2, \ldots$ über. Aus den Punkten $T_1, T_2, \ldots$ entstehen bei den Drehungen um $\omega_1, \omega_2, \ldots$ die Punkte $Z_1, Z_2, \ldots$ Die Drehung um ω transformiert O in S und T in Z. Wir haben zu zeigen, daß die Z_i gegen Z konvergieren.

Angenommen, der Häufungspunkt der Z_i sei Z^*. Da die S_i auf K gegen S konvergieren, gibt es nach Axiom III eine Drehung um M, die O in S und T in Z^* transformiert. Bei der Drehung, die O nach S bringt, geht aber, nach Annahme, T in Z über. Es ist also $Z^* = Z$, der Häufungspunkt der Z_i.

[3]) Der Beweis für die Kreise ist demjenigen von Hilbert nachgebildet.

Die Punkte der projektiven Ebene werden bei den Drehungen um M eindeutig und stetig transformiert. Die geschlossenen, doppelpunktfreien zweiufrigen Kurven, die dabei entstehen, sind Kreise um M. Wir haben noch zu zeigen, daß alle Punkte eines Kreises erst erhalten werden, wenn der Winkel ω alle Werte von 0 bis 2π durchläuft. Angenommen, ein Kreis würde vollständig erhalten bei allen Drehungen von 0 bis ω^* ($\omega^* < 2\pi$). Führen wir die Drehung um ω^* aus, so blieben alle Punkte dieses Kreises in Ruhe; es müßten somit alle Punkte der Ebene in Ruhe bleiben. Die Punkte von K bleiben aber nur bei einer Drehung um 2π in Ruhe. Es muß also $\omega^* = 2\pi$ sein.

Eine der entstandenen geschlossenen, stetigen doppelpunktfreien Kurven ist sicher einufrig; es ist die Gerade Γ „um M". (M soll auch „Mittelpunkt der Geraden Γ" heißen). Wir haben zu beweisen, daß jeder Punkt von Γ erhalten wird, wenn der Drehwinkel ω alle Werte von 0 bis π durchläuft.

Wir betrachten einen Punkt P von Γ und einen genügend kleinen orientierten Kreis α um ihn. Alle Punkte von α liegen entweder auf den Kreisen um M oder auf Γ. Da Γ einufrig ist, muß es eine Transformation geben, die P in sich überführt, wobei α mit entgegengesetzter Indikatrix mit sich selbst zusammenfällt. Diese Transformation ist eine Drehung um M um einen Winkel $\omega' < 2\pi$. Dabei bleiben außer P noch zwei Punkte, A und B auf α fest und es bleibt eine ganze Achse von Punkten zwischen A, P und B fest. Diese Fixpunkte können nicht auf den Kreisen um M liegen; sie liegen auf Γ. Bei der Drehung um ω' bleiben unendlich viele Punkte von Γ in Ruhe; es bleibt also die ganze Gerade Γ in Ruhe. α erleidet eine Umlegung. Da die Aufeinanderfolge von zwei Umlegungen die Identität ergibt, ist $\omega' = \pi$.

Damit ist unsere Behauptung in allen Teilen bewiesen.

Aus unserer Betrachtung folgt weiter:

Bleibt bei einer Drehung um M ein Punkt der Geraden Γ in Ruhe, so bleiben alle Punkte von Γ in Ruhe.

Definition: Jedes Punktsystem, das durch beliebige Drehung der Geraden Γ um irgendeinen ihrer Punkte entsteht, ist wiederum eine Gerade.

§ 4. *Zwei Gerade in der projektiven Ebene haben stets einen und nur einen Schnittpunkt.*

Die Existenz von mindestens einem Schnittpunkt folgt aus dem Geschlecht der projektiven Ebene. Es ist zu zeigen, daß es nur einen Schnittpunkt gibt. Angenommen, zwei Gerade, Γ_1 und Γ_2 hätten zwei

Schnittpunkte A und B. Die „Mittelpunkte“ von Γ_1 und Γ_2 seien bezüglich M_1 und M_2. Es sind nun zwei Fälle möglich:

a) Um A läßt sich ein orientierter Kreis durch B legen. Bei einer Drehung um π um M_1 erleidet dieser Kreis eine Umlegung an der Achse Γ_1. Bei einer weiteren Drehung um π um M_2 erleidet er eine weitere Umlegung an der Achse Γ_2. Nach Ausführung der beiden Drehungen ist der Kreis mit ursprünglicher Orientierung in sich übergegangen. Dabei blieb der Punkt B fest. Die Transformation des Kreises in sich ist somit die Identität. Es müßten alle Punkte der Ebene in Ruhe bleiben, was bei unserer Annahme nicht der Fall sein kann.

b) Um A läßt sich nur eine Gerade g durch B legen. Führen wir nun eine Drehung um π um M_1 und M_2 aus, so bleiben A und B fest *). Diese Drehung ist also für g eine Drehung in sich, bei welcher ein Punkt von g in Ruhe bleibt. Es müßte also die ganze Gerade g in Ruhe bleiben, was unmöglich ist.

Daraus folgt: *Zwei Punkte der projektiven Ebene lassen sich stets durch eine einzige Gerade verbinden.*

Man legt durch den einen Punkt eine Gerade und dreht sie um diesen Punkt, bis sie durch den zweiten Punkt geht.

Jeder Punkt der projektiven Ebene läßt sich in jeden andern Punkt durch eine Drehung um einen Winkel $< \pi$ transformieren.

Die beiden Punkte seien A und B. Wir legen durch sie eine Gerade, die einen „Mittelpunkt“ M besitzt. Dann gibt es sicher eine Drehung um M um einen Winkel $< \pi$, die A in B überführt.

§ 5. Wir sind nun in der Lage, den Begriff der Strecke zu definieren.

Definition: Die durch zwei Punkte A und B bestimmte Strecke AB ist der Bogen der Geraden zwischen A und B, der einem Drehwinkel $\leqq \frac{\pi}{2}$ um den „Mittelpunkt“ dieser Geraden entspricht. Die Strecke wird durch diesen Drehwinkel gemessen.

Zwei Strecken AB und $A'B'$ sind *kongruent*, wenn die zugehörigen Drehwinkel $\left(\leqq \frac{\pi}{2}\right)$ um die Mittelpunkte M und M' der Geraden durch A, B. bezw. A', B' einander gleich sind.

Zwei kongruente Strecken AB und $A'B'$ lassen sich stets durch zwei Drehungen (durch eine *Bewegung*) zur Deckung bringen. Man lege zuerst durch A und A' die Gerade g und bringe A durch Drehung um den „Mittelpunkt“ von g nach A'. Darauf läßt sich der Punkt B durch Drehung um A' in B' transformieren.

*) Mit fester Indikatrix.

Zwei *Kreise* sind *kongruent,* wenn es eine Drehung gibt, die ihre Mittelpunkte und gleichzeitig sie selbst zur Deckung bringt.

§ 6. *Jeder um einen Punkt auf einer Geraden gelegte Kreis trifft diese Gerade in zwei Punkten.*

Bei der Drehung um π um den „Mittelpunkt" der Geraden erleidet der Kreis eine Umlegung. Dabei bleiben auf ihm zwei und nur zwei Punkte fest.

§ 7. Wir müssen noch feststellen, daß in unserer Geometrie die Kongruenzaxiome gelten. Um den Schnittpunkt S von zwei Geraden Γ_1 und Γ_2 legen wir einen Kreis K. Jede der beiden Geraden trifft K in zwei Punkten, A und A' bezw. B und B', und die Gerade Γ um S in je einem Punkt, P_1 bezw. P_2. Denkt man sich aus den Geraden Γ_1 und Γ_2 den Punkt P_1 bezw. P_2 entfernt, so bilden die Strecken SAP_1, $SA'P_1$, SBP_2, $SB'P_2$ vier *„Strahlen"*. Der Winkel ASB z. B. wird nun wie folgt definiert: S heißt *Scheitel,* die Strahlen SAP_1 und SBP_2 *Schenkel* des Winkels. Der Winkel selbst wird gemessen durch den Drehungswinkel ω um S, der den Punkt A in B überführt.

Dann gilt in unserer Geometrie der erste Kongruenzsatz für Dreiecke in der folgenden Fassung:

Wenn für zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ die Kongruenzen

$$AB \equiv A'B', \qquad AC \equiv A'C', \qquad \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$$

gelten, so gelten stets auch die Kongruenzen

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C', \quad \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A'C'B', \quad BC \equiv B'C'.$$

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich mit Leichtigkeit aus unseren Definitionen der Drehung, der Bewegung und der Kongruenz.

(Eingegangen den 4. April 1932)