Laplace'sche Integraltransformation und Integration partieller Differentialgleichungen vom hyperbolischen und parabolischen Typus.

Laplace'sche Integraltransformation und Integration partieller Differentialgleichungen vom hyperbolischen und parabolischen Typus
(Ein Beitrag zum Heaviside'schen Operatorenkalkül)

Von W. MÄCHLER, Zürich

Im Jahre 1917 hat *T. J. I. A. Bromwich*[4]) eine Arbeit veröffentlicht betitelt: „Normal coordinates in dynamical systems". Bromwich gibt hier eine interessante Methode an zur Lösung von Anfangswert-Randwertproblemen für partielle Differentialgleichungen vom hyperbolischen und parabolischen Typus, für die aber bisher kein Beweis gegeben wurde. Die vorliegende Abhandlung hat nun den Zweck, im Anschluß an eine Arbeit von *M. Plancherel*[9]), die Methode von Bromwich einer genauen Analyse zu unterziehen.

Die Bromwich'sche Methode hängt mit dem Operatorenkalkül von *O. Heaviside*[7]) eng zusammen, so daß die von uns erhaltenen Resultate den ersten strengen Beweis der Anwendbarkeit dieses Kalküls für eine große Klasse von Problemen mit zwei unabhängigen Variablen und nicht konstanten Koeffizienten[5]) [6]) liefern*).

§ 1. Formulierung des Problems, der Voraussetzungen und Angabe der Resultate

Wir betrachten die folgenden zwei Probleme:

Problem I:

$$\mathrm{I}_1)\quad a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+b(x)\frac{\partial u}{\partial t}-L(u)=f(x,t),\quad 0\leqq x\leqq 1,\ 0<t<\infty,$$

$$\mathrm{I}_2)\ \begin{cases} u(x,0)=u_0(x), \\ \left.\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=u_1(x), \end{cases}$$

$$\mathrm{I}_3)\ \begin{cases} L_1(u)\equiv a_{11}\,u(0,t)+a_{12}\,u'(0,t)+b_{11}\,u(1,t)+b_{12}\,u'(1,t)=0, \\ L_2(u)\equiv a_{21}\,u(0,t)+a_{22}\,u'(0,t)+b_{21}\,u(1,t)+b_{22}\,u'(1,t)=0. \end{cases}$$

*) *G. Doetsch*[5]) [6]) untersucht spezielle, einfachere Fälle des vorliegenden Problems mit konstanten Koeffizienten und andern Randbedingungen.

Die Größen a_{ik}, b_{ik} $(i, k = 1, 2)$ sind Konstanten und die Striche bedeuten Ableitungen nach x. Ferner ist:

$$L(u) \equiv p(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x) \frac{\partial u}{\partial x} + r(x) u. \tag{1}$$

Problem II:

$$\mathrm{II}_1)\quad (a(x)\lambda^2 + b(x)\lambda)\vartheta - L(\vartheta) = \big(a(x)\lambda + b(x)\big) u_0(x) + a(x) u_1(x) + g(x, \lambda),$$

$$\mathrm{II}_2)\begin{cases} L_1(\vartheta) = 0, \\ L_2(\vartheta) = 0. \end{cases}$$

Dabei ist λ ein komplexer Parameter und $g(x, \lambda)$, $f(x, t)$ sind durch die Formeln (Laplace'sche Integraltransformation)

$$g(x, \lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(x, t)\, dt, \tag{2}$$

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{\lambda t} g(x, \lambda)\, d\lambda,\text{*)} \tag{3}$$

miteinander verknüpft.

Voraussetzungen: Es sei $0 \leqq x \leqq 1$; dann fordern wir:

$$\begin{cases} a(x),\ p(x) \text{ zweimal stetig differentiierbar,} \\ b(x),\ q(x) \text{ einmal stetig differentiierbar,} \\ r(x) \text{ stetig,} \end{cases} \tag{4}$$

und

$$\begin{cases} a(x) > 0,\text{**)} \\ p(x) > 0. \end{cases} \tag{5}$$

---

*) Ueber die Definition dieses Integrals verweisen wir auf die Bemerkungen in der Einleitung des § 8.

**) Wäre $a(x) \equiv 0$, $b(x) > 0$ so ließe sich dieser Fall analog behandeln, indem man im Problem II $\lambda = \mu^2$ setzen würde.

Ferner,

$$(6)\qquad \begin{cases} u_0(x) \text{ dreimal stetig differentiierbar,} \\ u_1(x) \text{ zweimal stetig differentiierbar,} \\ \text{und } u_0(x),\ u_1(x) \text{ sollen die Randbedingungen } \mathrm{I}_3) \text{ erfüllen.} \end{cases}$$

Von den Funktionen

$$(7)\qquad f(x,t),\ \frac{\partial f}{\partial t},\ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2},\ \frac{\partial f}{\partial x},$$

fordern wir die Stetigkeit in x, t für $0 \leqq x \leqq 1$, $t \geqq 0$ und die Integrale

$$(8)\qquad \int_0^\infty |f(x,t)|\,dt,\ \int_0^\infty \left|\frac{\partial f}{\partial t}\right| dt,\ \int_0^\infty \left|\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right| dt$$

sollen gleichmäßig konvergent in x sein für $0 \leqq x \leqq 1$ *).

Für die Koeffizienten in den Randbedingungen soll gelten:

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} a_{12} & b_{12} \\ a_{22} & b_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Wie weit man sich von dieser Bedingung befreien kann ist in der vorliegenden Arbeit gezeigt (§ 5). Die Rechnungen werden aber nur durchgeführt wenn (9) besteht.

Unter diesen Voraussetzungen läßt sich beweisen, daß das Problem I lösbar ist und das Problem II, mit Ausnahme von abzählbar unendlich vielen Werten von λ, ebenfalls lösbar ist, wobei zwischen den Lösungen dieser Probleme die Beziehungen bestehen

$$(10)\qquad u(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{\lambda t}\, \mathfrak{v}(x,\lambda)\, d\lambda,^{**})\ \mathfrak{v}(x,\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} u(x,t)\,dt.$$

Es ist $\sigma > 0$ und größer als die obere Schranke der Realteile der Eigenwerte des Problems II. (§ 8). Die Funktion $u(x,t)$ ist einmal stetig nach x und t differentiierbar und erfüllt bis auf eine zweidimensionale Punktmenge vom Maß Null die Differentialgleichung I_1). Mit Hilfe des Residuensatzes läßt sich für das Funktionenpaar $u_0(x)$, $u_1(x)$ ein Entwicklungssatz herleiten. (Satz VIII, § 14).

---

*) Sind die Bedingungen (8) nicht erfüllt, so läßt sich die Lösung $u(x,t)$ in jedem Intervall $0 \leqq t \leqq T$ noch durch (10) ausdrücken, wenn man für $t > T$, $f(x,t) = 0$ setzt und $g(x,\lambda)$, $\mathfrak{v}(x,\lambda)$ entsprechend berechnet.

**) Man beachte die Bemerkungen zu Beginn des § 8.

§ 2. Lösung der homogenen Differentialgleichung II₁)

Unter der homogenen Differentialgleichung II_1) verstehen wir die folgende Gleichung:

$$\left(a(x)\lambda^2 + b(x)\lambda\right) v - L(v) = 0.$$

Ueber diese gilt ein grundlegender Satz, der von *G. D. Birkhoff*[1]) und *J. Tamarkin*[12]) [13]) herrührt. Eine Nachprüfung des Birkhoff'schen Beweises gestattet es, diesen Satz in folgender Form auszusprechen:

Satz I: Sind die Bedingungen 4), 5) erfüllt und setzt man

$$\varphi_1(x) = -\varphi_2(x) = \sqrt{\frac{a(x)}{p(x)}}, \tag{11}$$

bedeuten ferner l, L endliche positive Zahlen, wobei L genügend groß ist, so gibt es zwei linear unabhängige Lösungen $v_1(x, \lambda)$, $v_2(x, \lambda)$ der homogenen Differentialgleichungen II_1), die transzendente Funktionen von λ sind und die ferner im Gebiet*) $|\lambda| > L, \Re(\lambda) \leqq l$ für $0 \leqq x \leqq 1$ folgende asymptotische Darstellung haben:

$$\begin{aligned} v_k(x, \lambda) &= e^{\lambda \int_0^x \varphi_k(x)dx} \left\{\eta_k(x) + \frac{E_{k0}(x, \lambda)}{\lambda}\right\} \\ \frac{\partial v_k(x, \lambda)}{\partial x} &= e^{\lambda \int_0^x \varphi_k(x)dx} \lambda\, \varphi_k(x) \left\{\eta_k(x) + \frac{E_{k1}(x, \lambda)}{\lambda}\right\}; \end{aligned} \qquad (k = 1, 2) \tag{12}$$

dabei ist $\eta_k(x)$ zweimal stetig differentiierbar in $0 \leqq x \leqq 1$ und es ist

$$\eta_k(x) = \frac{1}{\sqrt{|\varphi_k(x)|}} e^{-\frac{1}{2}\int_0^x \frac{q(x)\varphi_k(x) - b(x)}{p(x)\varphi_k(x)} dx} \qquad (k = 1, 2). \tag{13}$$

*) $\Re(\lambda)$ bedeutet den Realteil von λ.

Ebenso existiert ein zweites derartiges Fundamentalsystem $v_1^*(x, \lambda)$, $v_2^*(x, \lambda)$ mit folgender asymptotischen Darstellung im Gebiet $|\lambda| > L$, $\Re(\lambda) \geqq -l$ und für $0 \leqq x \leqq 1$

$$v_k^*(x, \lambda) = e^{\lambda \int\limits_0^x \varphi_k(x) dx} \left\{ \eta_k(x) + \frac{E_{k0}^*(x, \lambda)}{\lambda} \right\}$$

$$(14) \qquad\qquad (k = 1, 2)$$

$$\frac{\partial v_k^*(x, \lambda)}{\partial x} = e^{\lambda \int\limits_0^x \varphi_k(x) dx} \lambda \varphi_k(x) \left\{ \eta_k(x) + \frac{E_{k1}^*(x, \lambda)}{\lambda} \right\}.$$

Für die Funktionen $E_{k\nu}(x, \lambda)$ bezw. $E_{k\nu}^*(x, \lambda)$, $(k = 1, 2)$, $(\nu = 0, 1)$, gelten in $0 \leqq x \leqq 1$ die Ungleichungen:

$$(15) \qquad \begin{aligned} |E_{k\nu}(x, \lambda)| &< M \text{ im Gebiet } |\lambda| > L, \ \Re(\lambda) \leqq l, \\ |E_{k\nu}^*(x, \lambda)| &< M \text{ im Gebiet } |\lambda| > L, \ \Re(\lambda) \leqq -l, \end{aligned}$$

wobei M eine von x unabhängige Konstante ist.

§ 3. Die Green'sche Funktion des Randwertproblems II [2] [3] [12] [14]

Bilden die Funktionen $v_k(x, \lambda)$, $(k = 1, 2)$ irgend ein Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung II$_1$) und setzen wir

$$(16) \qquad \delta(s, \lambda) = \begin{vmatrix} v_1'(s, \lambda) & v_2'(s, \lambda) \\ v_1(s, \lambda) & v_2(s, \lambda) \end{vmatrix} = \delta(0, \lambda) e^{-\int\limits_0^s \frac{q(s)}{p(s)} ds}$$

so ist

$$(17) \quad g(x, s; \lambda) = \pm \frac{1}{2p(s)\delta(s, \lambda)} \begin{vmatrix} v_1(x, \lambda) & v_2(x, \lambda) \\ v_1(s, \lambda) & v_2(s, \lambda) \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} + \text{ für } x \geqq s \\ - \text{ für } x \leqq s \end{matrix}$$

eine Grundlösung der homogenen Differentialgleichung II$_1$).

Wir benützen ferner die Abkürzungen

$$(18)\qquad \Delta(x, s; \lambda) = \begin{vmatrix} v_1(x, \lambda) & v_2(x, \lambda) & g(x, s; \lambda) \\ L_1(v_1) & L_1(v_2) & L_1(g)_x \\ L_2(v_1) & L_2(v_2) & L_2(g)_x \end{vmatrix},$$

wobei

$$L_k(g)_x = a_{k1}\, g(0, s; \lambda) + a_{k2} \left.\frac{\partial g(x, s; \lambda)}{\partial x}\right|_{x=0}$$

$$+ b_{k1}\, g(1, s; \lambda) + b_{k2} \left.\frac{\partial g(x, s; \lambda)}{\partial x}\right|_{x=1} (k = 1, 2)$$

ist, und

$$(19)\qquad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} L_1(v_1) & L_1(v_2) \\ L_2(v_1) & L_2(v_2) \end{vmatrix}.$$

Damit ist die Green'sche Funktion des Randwertproblems II gegeben durch

$$(20)\qquad G(x, s; \lambda) = \frac{\Delta(x, s; \lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

Da wir $v_k(x, \lambda)$, $(k = 1, 2)$ als ganze transzendente Funktionen von λ voraussetzen können, so folgt, daß $\delta(s, \lambda)$, $\Delta(\lambda)$ ganze transzendente Funktionen sind und $g(x, s; \lambda)$, $\Delta(x, s; \lambda)$, $G(x, s; \lambda)$, im allgemeinen meromorphe Funktionen von λ.

Die Funktionen $g(x, s; \lambda)$, $G(x, s; \lambda)$ sind zweimal stetig nach x bezw. s differentiierbar für $0 \leqq x, s \leqq 1$ sobald $x \neq s$ ist. Bei $x = s$ hat die erste Ableitung beider Funktionen eine Unstetigkeit, gegeben durch

$$(21_1)\qquad \left.\frac{\partial g(x, s; \lambda)}{\partial x}\right|_{x=s+0} - \left.\frac{\partial g(x, s; \lambda)}{\partial x}\right|_{x=s-0} = \frac{1}{p(s)}$$

und

$$(21_2)\qquad \left.\frac{\partial G(x, s; \lambda)}{\partial x}\right|_{x=s+0} - \left.\frac{\partial G(x, s; \lambda)}{\partial x}\right|_{x=s-0} = \frac{1}{p(s)}.$$

§ 4. Existenz von Nullstellen von $\Delta(\lambda)$ für grosse λ

Wegen der Invarianz der Green'schen Funktion bezüglich der linearen Transformationen der Lösungen eines Fundamentalsystems, wobei die Koeffizienten unabhängig von x sind und eine nicht verschwindende Determinante haben, können wir, je nach Bedarf, das Fundamentalsystem 12) oder 14) benützen.

Setzt man

$$\int_0^1 \varphi_k(x)\,dx = \gamma_k \qquad (k = 1, 2) \tag{22}$$

so folgt unter Verwendung von 12)

$$\begin{aligned} L_i(v_k) = \lambda \Bigg\{ & a_{i2}\,\varphi_k(0)\,\eta_k(0) + \frac{a_{i1}\left(\eta_k(0) + \dfrac{E_{k0}(0,\lambda)}{\lambda}\right) + a_{i2}\,\varphi_k(0)\,E_{k1}(0,\lambda)}{\lambda} \\ & + e^{\lambda\gamma_k}\left(b_{i2}\,\varphi_k(1)\,\eta_k(1) + \frac{b_{i1}\left(\eta_k(1) + \dfrac{E_{k0}(1,\lambda)}{\lambda}\right) + b_{i2}\,\varphi_k(1)\,E_{k1}(1,\lambda)}{\lambda}\right)\Bigg\} \end{aligned} \tag{23}$$

Benützen wir die Abkürzungen

$$A_{ik} = a_{i2}\,\varphi_k(0)\,\eta_k(0), \qquad B_{ik} = b_{i2}\,\varphi_k(1)\,\eta_k(1) \tag{24}$$

und verstehen wir, nach einer Bezeichnung von Birkhoff[1]), unter $[\alpha]$ den Ausdruck

$$[\alpha] = \alpha + \frac{E}{\lambda}, \tag{25}$$

wo E eine von λ und eventuell auch anderen Variablen abhängige Größe bedeutet, die für große $|\lambda|$ im Gebiet $\Re(\lambda) \leqq l$ oder im Gebiet $\Re(\lambda) \geqq -l$ gleichmäßig beschränkt ist in diesen Variablen, so ergibt sich, sobald $\Re(\lambda) \leqq l$

$$L_i(v_k) = \lambda \left\{ [A_{ik}] + e^{\lambda\gamma_k}\,[B_{ik}] \right\} \tag{23_1}$$

und der Ausdruck 19) wird

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 \begin{vmatrix} [A_{11}] + e^{\lambda\gamma_1}[B_{11}], & [A_{12}] + e^{\lambda\gamma_2}[B_{12}] \\ [A_{21}] + e^{\lambda\gamma_1}[B_{21}], & [A_{22}] + e^{\lambda\gamma_2}[B_{22}] \end{vmatrix}.$$

Für zweireihige Determinanten verwenden wir die Abkürzung

$$\begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} = | \, m_{ik} \, |_2$$

woraus folgt:

(26) $$\varDelta(\lambda) = \lambda^2 \left| [A_{ik}] + e^{\lambda \gamma_k} [B_{ik}] \right|_2 .$$

Setzt man

(27) $$\varDelta_1(\lambda) = \left| [A_{ik}] + e^{\lambda \gamma_k} [B_{ik}] \right|_2$$

so ergibt sich, wegen $\gamma_1 = -\gamma_2$ und 24)

(27_1) $$\varDelta_1(\lambda) = e^{\lambda \gamma_2} \left\{ [A_0] + [A_1] \, e^{\lambda \gamma_1} + [A_2] \, e^{2 \lambda \gamma_1} \right\}$$

wobei A_0, A_1, A_2 durch

(28) $$\begin{cases} A_0 = \begin{vmatrix} A_{11} & B_{12} \\ A_{21} & B_{22} \end{vmatrix} = \varphi_1(0) \, \eta_1(0) \, \varphi_2(1) \, \eta_2(1) \begin{vmatrix} a_{12} & b_{12} \\ a_{22} & b_{22} \end{vmatrix} \\ A_1 = 0 \\ A_2 = \begin{vmatrix} B_{11} & A_{12} \\ B_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = - \varphi_1(1) \, \eta_1(1) \, \varphi_2(0) \, \eta_2(0) \begin{vmatrix} a_{12} & b_{12} \\ a_{22} & b_{22} \end{vmatrix} \end{cases}$$

definiert sind. Nach Voraussetzung (9) und wegen $\varphi_k(x) \neq 0$, $\eta_k(x) \neq 0$ in $0 \leqq x \leqq 1$, sind A_0 und A_2 von entgegengesetztem Zeichen. Aus

$$[A_\nu] = A_\nu + \frac{E_\nu(\lambda)}{\lambda} \qquad (\nu = 1, 2)$$

und mit folgender Definition von $A(\lambda)$

(29) $$A(\lambda) = A_0 + A_2 \cdot e^{2 \lambda \gamma_1}$$

ergibt sich

$$e^{\lambda \gamma_1} \varDelta_1(\lambda) = A(\lambda) + \frac{E_0(\lambda) + E_1(\lambda) \, e^{\lambda \gamma_1} + E_2(\lambda) \, e^{2 \lambda \gamma_1}}{\lambda}$$

eine Beziehung, die für große $|\lambda|$ und $\mathfrak{R}(\lambda) \leqq l$ besteht.

Die Funktion $A(\lambda)$ ist periodisch mit der Periode $\frac{i\pi}{\gamma_1}$ und hat die einfachen Wurzeln

$$(30) \qquad \lambda_k = \frac{1}{2\gamma_1} \operatorname{Lg}\left(-\frac{A_0}{A_2}\right) + \frac{i k \pi}{\gamma_1} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

wo Lg den Hauptwert des Logarithmus bedeutet*). Wir finden nach 28) und 13)

$$(31) \qquad -\frac{A_0}{A_2} = e^{-\int\limits_0^1 \frac{b(x)}{\sqrt{a(x)p(x)}} dx};$$

also insbesondere wenn in $0 \leqq x \leqq 1$

$b(x) \equiv 0$ ist, wird $\mathfrak{R}(\lambda_k) = 0$
$b(x) > 0$ ist, wird $\mathfrak{R}(\lambda_k) < 0$
$b(x) < 0$ ist, wird $\mathfrak{R}(\lambda_k) > 0$.

Wir untersuchen jetzt das Verhalten von $A(\lambda)$ im Streifen**)

$$(32) \qquad -\frac{\pi}{2\gamma_1} \leqq \mathfrak{J}(\lambda) \leqq \frac{\pi}{2\gamma_1}.$$

Setzen wir $\lambda = \xi + i\eta$, so ist

$$(33) \qquad |A(\lambda)| > \frac{|A_0|}{2} \text{ sobald } |\xi| > h \text{ und}$$

passend gewähltes $h > 0$. In dem durch die Ungleichungen definierten Rechteck

$$(34) \qquad \begin{gathered} -h \leqq \mathfrak{R}(\lambda) \leqq h \\ -\frac{\pi}{2\gamma_1} \leqq \mathfrak{J}(\lambda) \leqq \frac{\pi}{2\gamma_1} \end{gathered}$$

liegt nur eine Nullstelle von $A(\lambda)$, wobei h genügend groß gewählt sei. Umgibt man diese mit einem genügend kleinen Kreis vom Radius ϱ und bezeichnet m das Maximum von $|A(\lambda)|$ auf der Kreisperipherie, so ist

*) Das Argument sei zwischen $-\pi$, π gewählt.
**) $\mathfrak{J}(\lambda)$ bedeutet den Imaginärteil von λ.

im Rechteck (34) und wegen (33) auch im ganzen durch (32) definierten Streifen

$$|A(\lambda)| \geqq m. \tag{35}$$

Aus der Periodizität von $A(\lambda)$ folgt also, daß man die Nullstellen von $A(\lambda)$ mit Kreisen von festem genügend kleinem Radius ϱ so umgeben kann, daß in der ganzen λ-Ebene, ausschließlich dieser Kreise, die Ungleichung (35) gilt, wobei m nur eine Funktion von ϱ ist.

Als „gelochte λ-Ebene" wollen wir die λ-Ebene ausschließlich dieser Kreise um die Nullstellen von $A(\lambda)$ bezeichnen.

In der gelochten λ-Ebene betrachten wir die Funktion

$$\frac{e^{\lambda\gamma_1}\Delta(\lambda)}{\lambda^2} = e^{\lambda\gamma_1}\cdot\Delta_1(\lambda) = A(\lambda) + \frac{E_0(\lambda)+E_1(\lambda)\,e^{\lambda\gamma_1}+E_2(\lambda)\,e^{2\lambda\gamma_1}}{\lambda}$$

für große $|\lambda|$. Nach (30) können wir eine Zahl $l_1 > 0$ so wählen, daß $|\Re(\lambda_k)| < l_1$ ist. Da $|E_\nu(\lambda)| < M$ für $|\lambda| > L$ und $\Re(\lambda) \leqq l_1$, wo M eine Konstante ist, so folgt:

$$\left|\frac{E_0(\lambda)+E_1(\lambda)\,e^{\lambda\gamma_1}+E_2(\lambda)\,e^{2\lambda\gamma_1}}{\lambda\,A(\lambda)}\right| < \frac{M(1+e^{l_1\gamma_1}+e^{2l_1\gamma_1})}{|\lambda|\cdot m}.$$

Dieser Ausdruck wird kleiner als Eins, sobald $|\lambda|$ genügend groß ist. Wendet man also den Satz von *Rouché* auf die Funktionen

$$A(\lambda) \quad \text{und} \quad \frac{e^{\lambda\gamma_1}\cdot\Delta(\lambda)}{\lambda^2}$$

an, so sieht man, daß für $\Re(\lambda) \leqq l_1$ und $|\lambda|$ genügend groß, die Funktion $\Delta(\lambda)$ unendlich viele einfache Nullstellen besitzt die in den oben betrachteten Kreisen liegen.

Analog ergibt sich, wenn man (14) gebraucht

$$\frac{e^{\lambda\gamma_2}\Delta(\lambda)}{\lambda^2} = A_0 e^{2\lambda\gamma_2} + A_2 + \frac{E_0^*(\lambda)+E_1^*(\lambda)\,e^{\lambda\gamma_1}+E_2^*(\lambda)\,e^{2\lambda\gamma_1}}{\lambda}$$

mit $|E_\nu^*(\lambda)| < M^*$ für $|\lambda| > L$ und $\Re(\lambda) \geqq -l_1$. Da die Funktionen $A(\lambda)$ und $e^{2\lambda\gamma_2}A(\lambda) = A_0\,e^{2\lambda\gamma_2} + A_2$ die gleichen Nullstellen haben, so ergibt sich der

Satz II: Unter der Voraussetzung (9) hat die Funktion $\Delta(\lambda)$ unendlich viele Nullstellen die, abgesehen von endlich vielen, einfach sind und in den oben betrachteten Kreisen mit dem festen Radius ϱ liegen.

§ 5. Bemerkungen zum § 4

Wir haben bei der Herleitung des Satzes II vorausgesetzt, daß die Bedingung (9) erfüllt sei. Wenn diese Determinante (9) gleich Null ist, so können wir den Satz II im allgemeinen doch aufrecht erhalten, eventuell mit dem Zusatz, daß die Determinante $\Delta(\lambda)$ für große $|\lambda|$ auch Doppelwurzeln haben kann. Im besonderen werden wir erkennen, daß der Satz II, unter Berücksichtigung der vorhin gemachten Bemerkung, für die meisten in der mathematischen Physik wichtigen Randbedingungen noch gilt.

Ist der Ausdruck (9) gleich Null, also

$$a_{12}\, b_{22} - a_{22}\, b_{12} = 0,$$

so sind folgende Fälle möglich:

a)
$$a_{12} = a_{22} = b_{12} = b_{22} = 0$$

b)
$$\begin{cases} a_{12} = a_{22} = 0, & b_{12} = 0, \quad b_{22} \neq 0 \\ a_{12} = a_{22} = 0, & b_{12} \neq 0, \quad b_{22} = 0 \\ a_{12} = a_{22} = 0, & b_{12} = b_{22} \neq 0^{*)} \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} a_{12} \neq 0, \quad a_{22} = b_{12} = b_{22} = 0 \\ a_{12} = 0, \quad a_{22} \neq 0, \quad b_{12} = b_{22} = 0 \\ a_{12} = a_{22} \neq 0^{*)}, \quad b_{12} = b_{22} = 0 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} a_{12} = 0, \quad a_{22} \neq 0, \quad b_{12} = 0, \quad b_{22} \neq 0 \\ a_{12} \neq 0, \quad a_{22} = 0, \quad b_{12} \neq 0, \quad b_{22} = 0 \\ a_{12} = a_{22} \neq 0, \quad b_{12} = b_{22} \neq 0 \end{cases}$$

Bezeichnen wir die eventuell von Null verschiedenen Koeffizienten in der Koeffizientenmatrix der Randbedingungen durch Punkte, dann können wir die oben genannten Fälle auf folgende Schemata zurückführen (eventuell durch Umnumerierung von L_1 und L_2 oder passende Linearkombinationen von L_1 und L_2):

$$\text{a)}\quad \begin{pmatrix} \cdot & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & 0 & \cdot & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\quad \begin{pmatrix} \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{c)}\quad \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & 0 & \cdot & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{d)}\quad \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & 0 \end{pmatrix}$$

---

*) Wenn zwei entsprechende Koeffizienten in den Randbedingungen von Null verschieden sind, so kann man diese durch Multiplikation mit einem konstanten Faktor stets als gleich voraussetzen.

Wie früher wollen wir die Elemente in jedem Schema wieder mit a_{ik} bezw. b_{ik} ($i, k = 1, 2$) bezeichnen und untersuchen unter Benützung von (23) die Determinante $\Delta(\lambda)$.

Zu Fall a). Es wird:

$$\Delta(\lambda) = e^{\lambda\gamma_2}\left\{[A_0] + [A_1]e^{\lambda\gamma_1} + [A_2]\, e^{2\lambda\gamma_1}\right\}$$

mit

$$A_0 = \eta_1(0)\,\eta_2(1)\begin{vmatrix} a_{11} & b_{11} \\ a_{21} & b_{21} \end{vmatrix}$$

$$A_1 = 0$$

$$A_2 = -\,\eta_1(1)\,\eta_2(0)\begin{vmatrix} a_{11} & b_{11} \\ a_{21} & b_{21} \end{vmatrix}$$

Es ist also der Satz II in § 4 wieder gültig, wenn man voraussetzt, daß

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_{11} \\ a_{21} & b_{21} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ist.*)}$$

Das ist auch zugleich die Bedingung dafür, daß die Randbedingungen voneinander unabhängig sind.

Zu Fall b). Hier darf man $b_{12} \neq 0$ voraussetzen, da sonst Fall a) vorliegt. Man erhält:

$$\Delta(\lambda) = \lambda\, e^{\lambda\gamma_2}\left\{[A_0] + [A_1]\, e^{\lambda\gamma_1} + [A_2]\, e^{2\lambda\gamma_1}\right\}$$

wo

$$A_0 = a_{21}\, b_{12}\, \eta_1(0)\, \eta_2(1)\, \varphi_1(1)$$
$$A_1 = 2\, b_{12}\, b_{21}\, \eta_1(1)\, \eta_2(1)\, \varphi_1(1)$$
$$A_2 = a_{21}\, b_{12}\, \eta_1(1)\, \eta_2(0)\, \varphi_1(1).$$

---

*) Als Beispiel erwähnen wir

$$\left.\begin{aligned} v'' - \pi^2\lambda^2 v &= 0 \\ v(0) &= 0 \\ v(1) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ mit den Eigenwerten } \lambda = \pm i,\ \pm 2i,\ \pm 3i, \cdots.$$

Es muß also, da $b_{12} \neq 0$ ist, $a_{21} \neq 0$ vorausgesetzt werden, sonst versagt hier Satz II. Aus der Gleichung

$$A_0 + A_1 e^{\lambda\gamma_1} + A_2 e^{2\lambda\gamma_1} = 0$$

folgt dann:

$$\lambda_k^{(1)} = \frac{1}{\lambda_1} \operatorname{Lg} \left(\frac{-A_1 + \sqrt{A_1^2 - 4 A_0 A_2}}{2 A_2} \right) + \frac{2 k \pi i}{\gamma_1}$$

$$(k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots)$$

$$\lambda_k^{(2)} = \frac{1}{\gamma_1} \operatorname{Lg} \left(\frac{-A_1 - \sqrt{A_1^2 - 4 A_0 A_2}}{2 A_2} \right) + \frac{2 k \pi i}{\gamma_1},$$

wobei Lg den Hauptwert des Logarithmus bedeutet. Wir erhalten also, solange $A_1^2 - 4 A_0 A_2 \neq 0$ ist, zwei verschiedene Reihen von einfachen Wurzeln und eine der früheren analoge Ueberlegung zeigt die Gültigkeit von Satz II. Ist aber $A_1^2 - 4 A_0 A_2 = 0$, so sind die zwei Wurzelreihen identisch, wir haben Doppelwurzeln. In diesem Fall kann also die Gleichung $\Delta(\lambda)$ für große $|\lambda|$ auch Doppelwurzeln haben.*)

Nehmen wir jetzt an, daß im Schema b) $a_{21} = 0$ sei. Es läßt sich dann zurückführen auf das folgende:

$$\begin{pmatrix} \cdot & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \end{pmatrix}$$

mit $b_{21} \neq 0$, sollen zwei unabhängige Randbedingungen vorliegen. Wendet man auf dieses Schema (23) an, so ergibt sich:

$$\Delta(\lambda) = b_{21} e^{\lambda\gamma_2} \{ [a_{11} \eta_1(0) \eta_2(1)] + 2 \lambda b_{12} [\eta_1(1) \eta_2(1) \varphi_1(1)] e^{\lambda\gamma_1} \\ - [a_{11} \eta_1(1) \eta_2(0)] e^{2\lambda\gamma_1} \}.$$

Man muß also $b_{12} = 0$ annehmen, sollen die Betrachtungen von § 4 auch hier gelten. Damit hat man aber den Fall a).

*) Betrachten wir z. B. das Problem

$$\begin{cases} \lambda^2 v - v'' = \lambda u_0 + u_1 \\ L_1(v) \equiv v'(1, \lambda) = 0 \\ L_2(v) \equiv v(0, \lambda) + v(1, \lambda) = 0 \end{cases}$$

so ergibt sich $\Delta(\lambda) = \lambda e^{-\lambda} (1 + e^{\lambda})^2$ und die λ-Werte $\lambda_k = i(1 + 2k)\pi$, wo $k = 0$, ± 1, ± 2, ..., sind Doppelwurzeln. Für die Green'sche Funktion sind diese λ-Werte Pole zweiter Ordnung, wie man leicht nachrechnet.

Zu Fall c). Es ist

$$\varDelta(\lambda) = \lambda e^{\lambda\gamma_2}\left\{[A_0] + [A_1]\, e^{\lambda\gamma_1} + [A_2]\, e^{2\lambda\gamma_1}\right\}$$

wo

$$\begin{aligned} A_0 &= a_{12}\, b_{21}\, \eta_1(0)\, \eta_2(1)\, \varphi_1(0) \\ A_1 &= 2\, a_{12}\, a_{21}\, \eta_1(0)\, \eta_2(0)\, \varphi_1(0) \\ A_2 &= a_{12}\, b_{21}\, \eta_1(1)\, \eta_2(0)\, \varphi_1(0) \end{aligned}$$

woraus sich ergibt, daß $a_{12} \cdot b_{21} \neq 0$ sein muß, damit wir Satz II beweisen können. Ist $b_{21} = 0$, dann muß man das Schema untersuchen

$$\begin{pmatrix} 0 \cdot \cdot \; 0 \\ \cdot\, 0\, 0\, 0 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten:

$$\varDelta(\lambda) = a_{21}\, e^{\lambda\gamma_2}\left\{-[b_{11}\, \eta_1(0)\, \eta_2(1)] + 2\lambda\, a_{12}\, [\eta_1(0)\, \eta_2(0)\, \varphi_1(0)]\, e^{\lambda\gamma_1} \right.$$
$$\left. + [b_{11}\, \eta_1(1)\, \eta_2(0)]\, e^{2\lambda\gamma_1}\right\}.$$

Es muß also gelten $a_{12} = 0$ und $a_{21}\, b_{11} \neq 0$*) d. h. es liegt dann Fall a) vor.

Zu Fall d). Hier darf man $a_{12} \neq 0$, $b_{12} \neq 0$ voraussetzen, da sonst einer der früher genannten Fälle vorliegt. Es wird:

$$\varDelta(\lambda) = \lambda e^{\lambda\gamma_2}\left\{[A_0] + [A_1]\, e^{\lambda\gamma_1} + [A_2]\, e^{2\lambda\gamma_1}\right\}$$

mit

$$\begin{aligned} A_0 &= \big(a_{12}\, b_{21}\, \varphi_1(0) + a_{21}\, b_{12}\, \varphi_1(1)\big)\, \eta_1(0)\, \eta_2(1) \\ A_1 &= 2\,\big(a_{12}\, a_{21}\, \varphi_1(0)\, \eta_1(0)\, \eta_2(0) + b_{12}\, b_{21}\, \varphi_1(1)\, \eta_1(1)\, \eta_2(1)\big) \\ A_2 &= \big(a_{12}\, b_{21}\, \varphi_1(0) + a_{21}\, b_{12}\, \varphi_1(1)\big)\, \eta_1(1)\, \eta_2(0). \end{aligned}$$

Wir müssen also fordern

$$a_{12}\, b_{21}\, \varphi_1(0) + a_{21}\, b_{12}\, \varphi_1(1) \neq 0^{**}).$$

*) z. B. hat das Randwertproblem

$$\left.\begin{aligned} v'' - \lambda^2 v &= 0 \\ v'(0) &= 0 \\ v(0) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

nur die triviale Lösung $v = 0$ und es existiert kein Eigenwert.

**) Betrachtet man das Randwertproblem

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{4} v'' - \lambda^2 v &= 0 \\ v'(0) + v'(1) &= 0 \\ v(0) - v(1) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

wo also $a_{12}\, b_{21}\, \varphi_1(0) + a_{21}\, b_{12}\, \varphi_1(1) = 0$ ist, so ist jeder Wert λ ein Eigenwert.

Zusammenfassung: Satz II in § 4 bleibt, eventuell mit dem Zusatz, daß auch Doppelwurzeln auftreten können für große $|\lambda|$, richtig bei folgenden Randbedingungen:

a) $$\begin{cases} a_{11}\, u(0,t) + b_{11}\, u(1,t) = 0 \\ a_{21}\, u(0,t) + b_{21}\, u(1,t) = 0 \end{cases} \quad \text{mit} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_{11} \\ a_{21} & b_{21} \end{vmatrix} \neq 0$$

b) $$\begin{cases} a_{11}\, u(0,t) + b_{11}\, u(1,t) + u'(1,t) = 0 \\ \qquad\qquad u(0,t) + b_{21}\, u(1,t) = 0 \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} a_{11}\, u(0,t) + u'(0,t) + b_{11}\, u(1,t) = 0 \\ a_{21}\, u(0,t) + u(1,t) \qquad\qquad = 0 \end{cases}$$

d) $$\begin{cases} a_{11}\, u(0,t) + a_{12}\, u'(0,t) + b_{11}\, u(1,t) + b_{12}\, u'(1,t) = 0 \\ a_{21}\, u(0,t) + b_{21}\, u(1,t) = 0 \end{cases}$$

wobei im Fall d)

$$a_{12}\, b_{21}\, \varphi_1(0) + a_{21}\, b_{12}\, \varphi_1(1) \neq 0$$

sein muß.

Man beachte, daß der Fall d) die Periodizitätsbedingung enthält; man braucht nur

$$\begin{aligned} a_{11} &= b_{11} = 0 \\ a_{12} &= a_{21} = 1 \\ b_{12} &= b_{21} = -1 \end{aligned}$$

zu setzen. Es ist dann

$$a_{12}\, b_{21}\, \varphi_1(0) + a_{21}\, b_{12}\, \varphi_1(1) = -\big(\varphi_1(0) + \varphi_1(1)\big) \neq 0.$$

§ 6. Das asymptotische Verhalten der Green'schen Funktion[12])

Satz III: Für große Werte von $|\lambda|$ gilt in der gelochten λ-Ebene die Ungleichung

(36) $$|G(x,s;\lambda)| < \frac{G_0}{|\lambda|} \qquad 0 \leqq x, s \leqq 1$$

wo G_0 nur eine Funktion von ϱ ist (§ 4).

Zur Begründung dieses Satzes beschränken wir uns zuerst auf den Fall $\Re(\lambda) \leqq l$ und verwenden deshalb das Fundamentalsystem (12). Man hat:

$$p(s)\,\delta(s,\lambda) = p(s)\,\delta(0,\lambda)\, e^{-\int\limits_0^s \frac{q(s)}{p(s)} ds}$$

mit

$$\delta(0,\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda\,\varphi_1(0)\,[\eta_1(0)], & \lambda\,\varphi_2(0)\,[\eta_2(0)] \\ [\eta_1(0)], & [\eta_2(0)] \end{vmatrix} = \lambda\,[2\,\eta_1(0)\,\eta_2(0)\,\varphi_1(0)].$$

Setzen wir

$$k(s) = 2\,p(s)\,e^{-\int\limits_0^s \frac{q(s)}{p(s)} ds} \cdot \eta_1(0)\,\eta_2(0)\,\varphi_1(0),$$

so ist

$$p(s)\,\delta(s,\lambda) = \lambda\,[k(s)]$$

wobei $k(s) \neq 0$ in $0 \leqq x \leqq 1$. Damit wird:

$$g(x,s;\lambda) = \pm \frac{1}{2\,[k(s)]} \Big\{ v_1(x,\lambda)\,v_2(s,\lambda) - v_2(x,\lambda)\,v_1(s,\lambda) \Big\} \begin{matrix} + \text{ für } x \geqq s \\ - \quad ,, \quad x \leqq s \end{matrix}$$

und

$$\begin{aligned} L_i(g)_x = \frac{1}{2\lambda\,[k(s)]} \Big\{ & a_{i1}\big(-v_1(0,\lambda)\,v_2(s,\lambda) + v_2(0,\lambda)\,v_1(s,\lambda)\big) \\ & + a_{i2}\big(-v_1'(0,\lambda)\,v_2(s,\lambda) + v_2'(0,\lambda)\,v_1(s,\lambda)\big) \\ & + b_{i1}\big(v_1(1,\lambda)\,v_2(s,\lambda) - v_2(1,\lambda)\,v_1(s,\lambda)\big) \\ & + b_{i2}\big(v_1'(1,\lambda)\,v_2(s,\lambda) - v_2'(1,\lambda)\,v_1(s,\lambda)\big) \Big\}. \end{aligned}$$

Indem wir in $\Delta(x,s;\lambda)$ die

$$\left.\begin{matrix} 1. \\ \\ 2. \end{matrix}\right\} \text{ Kolonne mit } \left\{\begin{matrix} \dfrac{1}{2}\,\dfrac{v_2(s,\lambda)}{p(s)\,\delta(s,\lambda)} \\ \dfrac{1}{2}\,\dfrac{v_1(s,\lambda)}{p(s)\,\delta(s,\lambda)} \end{matrix}\right.$$

multiplizieren und zur letzten Kolonne addieren, erhalten wir

$$\varDelta(x, s; \lambda) = \begin{vmatrix} v_1(x, \lambda) & v_2(x, \lambda) & g_0(x, s; \lambda) \\ L_1(v_1) & L_1(v_2) & L_1(g)_x \\ L_2(v_1) & L_2(v_2) & L_2(g)_x \end{vmatrix}$$

wo

$$g_i(s, \lambda) = L_i(g)_x + \frac{1}{2} \frac{v_2(s, \lambda)}{p(s)\,\delta(s, \lambda)} L_i(v_1) + \frac{1}{2} \frac{v_1(s, \lambda)}{p(s)\,\delta(s, \lambda)} L_i(v_2)$$
$$(i = 1, 2)$$

und

$$g_0(x, s; \lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{p(s)\,\delta(s, \lambda)} v_1(x, \lambda)\, v_2(s, \lambda) & x \geqq s \\ \dfrac{1}{p(s)\,\delta(s, \lambda)} v_2(x, \lambda)\, v_1(s, \lambda). & x \leqq s \end{cases}$$

Wir erhalten weiter

$$g_i(s, \lambda) = \frac{v_2(s, \lambda)}{\lambda\,[k(s)]} \left\{ b_{i1}\, v_1(1, \lambda) + b_{i2}\, v_1'(1, \lambda) \right\}$$

$$+ \frac{v_1(s, \lambda)}{\lambda\,[k(s)]} \left\{ a_{i1}\, v_2(0, \lambda) + a_{i2}\, v_2'(0, \lambda) \right\}.$$

Indem wir die Abkürzungen

$$\int_0^x \varphi_k(x)\, dx = X_k\,, \quad \int_0^s \varphi_k(s)\, ds = S_k \tag{37}$$

einführen, erhalten wir mit (24)

$$g_o(x, s; \lambda) = \begin{cases} \lambda^{-1} e^{\lambda(X_1 - S_1)} \left[\dfrac{\eta_1(x)\, \eta_2(s)}{k(s)}\right] & x \geqq s \\ \lambda^{-1} e^{\lambda(X_2 - S_2)} \left[\dfrac{\eta_2(x)\, \eta_1(s)}{k(s)}\right] & x \leqq s \end{cases}$$

und

$$g_i(s, \lambda) = e^{\lambda S_1} \left[A_{i2} \frac{\eta_1(s)}{k(s)}\right] + e^{\lambda(X_1 - S_1)} \left[B_{i1} \frac{\eta_2(s)}{k(s)}\right].$$

Die Ausdrücke (23_1) schreiben wir folgendermaßen:

$$\left.\begin{aligned} L_i(v_1) &= \lambda\, e^{\lambda\gamma_2}\left\{e^{\lambda\gamma_1}\,[A_{i1}] + e^{2\lambda\gamma_1}\,[B_{i1}]\right\} \\ L_i(v_2) &= \lambda\, e^{2\lambda\gamma_2}\left\{e^{2\lambda\gamma_1}\,[A_{i2}] + e^{\lambda\gamma_1}\,[B_{i2}]\right\} \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2)$$

und setzen zur Abkürzung

$$\text{(38)} \qquad \left.\begin{aligned} E_{i1}(\lambda) &= e^{\lambda\gamma_1}\,[A_{i1}] + e^{2\lambda\gamma_1}\,[B_{i1}] \\ E_{i2}(\lambda) &= e^{2\lambda\gamma_1}\,[A_{i2}] + e^{\lambda\gamma_1}\,[B_{i2}]\,; \end{aligned}\right. \quad (i = 1, 2)$$

dann wird

$$\text{(39)} \qquad \left.\begin{aligned} L_i(v_1) &= \lambda\, e^{\lambda\gamma_2}\, E_{i1}(\lambda) \\ L_i(v_2) &= \lambda\, e^{2\lambda\gamma_2}\, E_{i2}(\lambda)\,. \end{aligned}\right. \quad (i = 1, 2)$$

Wenn man nun setzt

$$\text{(40)} \qquad E(\lambda) = e^{\lambda\gamma_2}\,\left|E_{ik}(\lambda)\right|_2$$

und

$$\text{(41)} \qquad G(x, s; \lambda) = g_o(x, s; \lambda) + G^{(o)}(x, s; \lambda)\,,$$

so liefert eine einfache Umformung

$$\text{(42)} \qquad g_o(x, s; \lambda) = \begin{cases} \lambda^{-1}\, e^{\lambda(X_1 - S_1)}\left[\dfrac{\eta_1(x)\,\eta_2(s)}{k(s)}\right] & x \geqq s \\[2ex] \lambda^{-1}\, e^{\lambda(X_2 - S_2)}\left[\dfrac{\eta_2(x)\,\eta_1(s)}{k(s)}\right] & x \leqq s \end{cases}$$

und

$$\begin{aligned} G^{(0)}(x,s;\lambda) = \lambda^{-1}\Bigg\{ &\left(\left[B_{21}\frac{\eta_1(x)\,\eta_2(s)}{k(s)}\right]\frac{E_{12}}{E} - \left[B_{11}\frac{\eta_1(x)\,\eta_2(s)}{k(s)}\right]\frac{E_{22}}{E}\right) e^{\lambda X_1}\,.\,e^{\lambda(\gamma_1 - S_1)} \\ \text{(43)} \quad &+ \left(\left[A_{22}\frac{\eta_1(x)\,\eta_1(s)}{k(s)}\right]\frac{E_{12}}{E} - \left[A_{12}\frac{\eta_1(x)\,\eta_1(s)}{k(s)}\right]\frac{E_{22}}{E}\right) e^{\lambda X_1}\,.\,e^{\lambda S_1} \\ &+ \left(\left[B_{11}\frac{\eta_2(x)\,\eta_2(s)}{k(s)}\right]\frac{E_{21}}{E} - \left[B_{21}\frac{\eta_2(x)\,\eta_2(s)}{k(s)}\right]\frac{E_{11}}{E}\right) e^{\lambda(\gamma_1 - X_1)}\,.\,e^{\lambda(\gamma_1 - S_1)} \\ &+ \left(\left[A_{12}\frac{\eta_2(x)\,\eta_1(s)}{k(s)}\right]\frac{E_{21}}{E} - \left[A_{22}\frac{\eta_2(x)\,\eta_1(s)}{k(s)}\right]\frac{E_{11}}{E}\right) e^{\lambda(\gamma_1 - X_1)}\,.\,e^{\lambda S_1}\Bigg\}. \end{aligned}$$

Die Funktionen $\frac{E_{ik}(\lambda)}{E(\lambda)}$ $(i, k = 1,2)$ sind für große $|\lambda|$ und $\Re(\lambda) \leqq l$ in der gelochten λ-Ebene beschränkt. Wir zeigen dies z. B. für $\frac{E_{i1}(\lambda)}{E(\lambda)}$. Es ist

$$E = e^{\lambda\gamma_2} \left| E_{ik}(\lambda) \right|_2 = e^{2\lambda\gamma_1} \cdot \Delta_1(\lambda)$$

wo $\Delta_1(\lambda)$ durch (27_1) definiert ist. Mit (27) erhält man:

$$E(\lambda) = e^{\lambda\gamma_1} \left\{ [A_0] + [A_1] e^{\lambda\gamma_1} + [A_2] e^{2\lambda\gamma_1} \right\}$$

also folgt mit (38)

$$\frac{E_{i1}(\lambda)}{E(\lambda)} = \frac{[A_{i1}] + [B_{i1}] e^{\lambda\gamma_1}}{A(\lambda) + \frac{E_0(\lambda) + E_1(\lambda) e^{\lambda\gamma_1} + E_2(\lambda) e^{2\lambda\gamma_1}}{\lambda}} \tag{44}$$

und $A(\lambda)$ ist durch (29) erklärt. Nach (35) ist in der ganzen gelochten λ-Ebene $|A(\lambda)| \geqq m$, mit $m > 0$ und weil

$$\left| \frac{E_0(\lambda) + E_1(\lambda) e^{\lambda\gamma_1} + E_2(\lambda) e^{2\lambda\gamma_1}}{\lambda} \right| \leqq \frac{M(1 + e^{l\gamma_1} + e^{2l\gamma_1})}{|\lambda|}$$

sobald $\Re(\lambda) \leqq l$, so wird der Nenner im Ausdruck (44) größer als

$$m - \frac{M(1 + e^{l\gamma_1} + e^{2l\gamma_1})}{|\lambda|}.$$

Für genügend große $|\lambda|$ ist er also größer als $\frac{m}{2}$. Der Zähler im Ausdruck (44) ist beschränkt für $\Re(\lambda) \leqq l$, wo l irgend eine endliche positive Zahl bedeutet. Damit ist also (36) bewiesen, sobald $\Re(\lambda) \leqq l$; denn die in (42) und (43) auftretenden Exponentialfunktionen sind für $\Re(\lambda) \leqq l$ beschränkt.

Unter Benützung von (14) und passende Umformung von $\Delta(x, s; \lambda)$ gelingt für $\Re(\lambda) \geqq -l$ eine analoge Darstellung der Green'schen Funktion. Wir schreiben

$$G(x, s; \lambda) = g^*(x, s; \lambda) + G^*(x, s; \lambda) \tag{45}$$

und die hier auftretenden Exponentialfunktionen sind für $\Re(\lambda) \geqq -l$ gleichmäßig beschränkt. Damit ist (36) als richtig erkannt.*)

*) Für die in § 5 angegebenen Randbedingungen erhält man eine analoge asymptotische Darstellung der Green'schen Funktion.

§ 7. Lösung des inhomogenen Problems II, wobei wir $g(x, \lambda) \equiv 0$ voraussetzen

Jeder Pol der Green'schen Funktion ist ein Eigenwert unseres homogenen Problems II [12]), also auch Nullstelle von $\Delta(\lambda)$. Wenn nun λ von einem Eigenwert verschieden ist, so ist das inhomogene Problem lösbar und man hat:

$$(46)\quad v(x, \lambda) = -\int_0^1 G(x, s; \lambda) \left\{ (a(s)\lambda + b(s))\, u_0(s) + a(s)\, u_1(s) \right\} ds,$$

wobei also $v(x, \lambda)$ eine meromorphe Funktion von λ ist.

Nach Voraussetzung (6) ist $u_i(x)$ $(i = 1, 2)$ Lösung von

$$(47)\quad \begin{cases} -\left(a(x)\lambda^2 + b(x)\lambda\right) v + L(v) = -\left(a(x)\lambda^2 + b(x)\lambda\right) u_i(x) + L(u_i(x)) \\ \qquad\qquad L_k(v) = 0 \qquad\qquad (i, k = 1, 2) \end{cases}$$

d. h.

$$u_i(x) = \int_0^1 G(x, s; \lambda) \left\{ L(u_i(s)) - \left(a(s)\lambda^2 + b(s)\lambda\right) u_i(s) \right\} ds$$

woraus folgt:

$$-\int_0^1 G(x, s; \lambda) \left\{ a(s)\lambda + b(s) \right\} u_0(s)\, ds$$
$$= \frac{u_0(x)}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \int_0^1 G(x, s; \lambda)\, L(u_0(s))\, ds$$

und

$$-\int_0^1 G(x, s; \lambda)\, a(s)\, u_1(s)\, ds = \frac{u_1(x)}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda} \int_0^1 G(x, s; \lambda)\, b(s)\, u_1(s)\, ds$$
$$- \frac{1}{\lambda^2} \int_0^1 G(x, s; \lambda)\, L(u_1(s))\, ds$$

also

$$v(x,\lambda)=\frac{u_0(x)}{\lambda}+\frac{u_1(x)}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda}\int_0^1 G(x,s;\lambda)\Big\{L(u_0(s)) - b(s)\,u_1(s)+\frac{1}{\lambda}L(u_1(s))\Big\}\,ds. \tag{48}$$

§ 8. Untersuchung des Integrals

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t}\, v(x,\lambda)\, d\lambda.$$

Wir schicken zunächst einige Bemerkungen voraus über die im Verlaufe unserer Ausführungen auftretenden Integrale

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} *\, d\lambda \tag{49}$$ bezw. $$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} *\, d\lambda. \tag{50}$$

Unter dem Integral (49) soll der Grenzwert eines Kurvenintegrals verstanden werden, was durch den dem Integralzeichen beigefügten Kreis bezeichnet sei, wobei die auftretenden Integrationswege durch die unten näher beschriebenen Fig. 1 und 2 festgelegt sind. Im Gegensatz dazu soll das Integral (50) durch folgende Definition festgelegt sein:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} *\, d\lambda = \lim_{R_1, R_2\to\infty}\int_{\sigma-iR_1}^{\sigma+iR_2} *\, d\lambda.$$

Liefern (49) und (50) das gleiche Resultat, so gebrauchen wir die Darstellung (50).

$\sigma > 0$ bedeutet eine Zahl, die größer ist als die obere Schranke der Realteile der Eigenwerte des Problems II. Da nach § 4 alle Eigenwerte innerhalb eines Streifens endlicher Breite liegen, welcher parallel zur imaginären Achse ist, so existiert eine solche Zahl σ.

Wir untersuchen nun den Grenzwert des Kurvenintegrals

$$(51) \quad \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_n} e^{\lambda t}\, v(x, \lambda)\, d\lambda$$

wobei der Integrationsweg Γ_n durch die Figur 1 gegeben ist und $\lim\limits_{n \to \infty} R_n = \infty$.

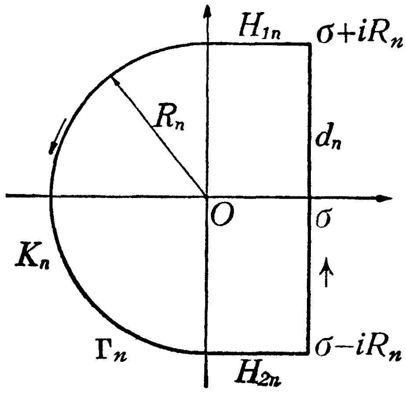

Fig. 1.

Γ_n treffe keinen der in § 4 betrachteten Kreise mit den Radien ϱ. Setzen wir zur Abkürzung

$$(52) \quad v^*(x, \lambda) = \frac{1}{\lambda} \int\limits_0^1 G(x, s; \lambda) \left\{ L(u_0(s)) - b(s)\, u_1(s) + \frac{1}{\lambda} L(u_1(s)) \right\} ds,$$

so können wir unter Benutzung von (48) schreiben

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_n} e^{\lambda t}\, v(x, \lambda)\, d\lambda = u_0(x) + u_1(x)\, t - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_n} e^{\lambda t}\, v^*(x, \lambda)\, d\lambda.$$

Das Integral rechts ist aber gleich

$$\int\limits_{K_n} + \int\limits_{H_{1n}} + \int\limits_{H_{2n}} + \int\limits_{d_n}.$$

Nun hat man für große $|\lambda|$, $|G(x, s; \lambda| < \frac{G_0}{|\lambda|}$, gleichmäßig in x und s, also hat der Integrand die Ordnung $\frac{1}{|\lambda|^2}$, woraus sich ergibt, daß die ersten drei Integrale mit wachsendem n gegen Null streben, während das vierte dem endlichen Grenzwert

$$(53) \qquad \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{\lambda t} v^* (x, \lambda)\, d\lambda$$

zustrebt. Die Konvergenz ist übrigens gleichmäßig in x für $0 \leqq x \leqq 1$ und in t für $0 \leqq t < \infty$.

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von (53) bezüglich t für $0 \leqq t < \infty$ hat man

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{\lambda t} v^* (x, \lambda)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} v^* (x, \lambda)\, d\lambda.$$

Dieses letztere Integral ist aber gleich Null. Denn die einzig möglichen singulären Stellen der meromorphen Funktion v^* in der λ-Ebene sind die Pole von $G(x, s; \lambda)$ und $\lambda = 0$; folglich ist v^* regulär im Gebiet $\Re(\lambda) \geqq \sigma$. Es verschwindet also das Integral

$$\int_{\Gamma_n^*} v^* (x, \lambda)\, d\lambda$$

wenn Γ_n^* der Integrationsweg der Fig. 2 ist.

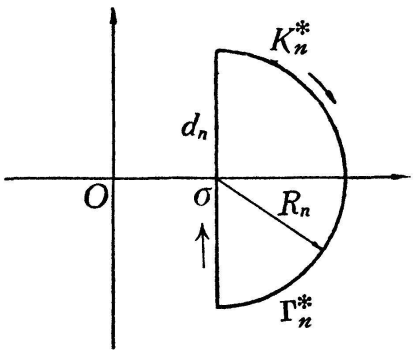

Fig. 2

Da der Integrand die Ordnung $\frac{1}{|\lambda|^2}$ hat, gilt

$$\lim_{R_n \to \infty} \int_{K_n^*} v^* (x, \lambda)\, d\lambda = 0,$$

und daher auch

$$(54) \qquad \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} v^* (x, \lambda)\, d\lambda = 0.$$

Definiert man also $u(x, t)$ durch

(55)
$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{\lambda t} v(x, \lambda)\, d\lambda = u_0(x) + u_1(x)\, t - \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{\lambda t} v^*(x, \lambda)\, d\lambda,$$

so ist

$$\lim_{t \to 0} u(x, t) = u(x, 0) = u_0(x),$$

gleichmäßig in x für $0 \leqq x \leqq 1$.

Wenn man weiter beachtet, daß nach einer leichten Abschätzung

$$\lim_{R_n \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{K_n} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\, d\lambda = 0$$

sich ergibt, gleichmäßig in t für $0 < \varepsilon \leqq t \leqq T < \infty$, und daß

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\, d\lambda$$

für $0 < \varepsilon \leqq t \leqq T < \infty$ gleichmäßig konvergent ist, wie der zweite Mittelwertsatz zeigt, so kann man auch schreiben

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{\lambda t} v(x, \lambda)\, d\lambda$$

für $t > 0$ und dieses Integral ist für $0 \leqq x \leqq 1$, $0 < \varepsilon \leqq t \leqq T < \infty$ gleichmäßig konvergent. Es gilt zudem*)

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{\lambda t} v(x, \lambda)\, d\lambda = u_0(x)$$

---

*) Das Integral $\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} v(x, \lambda)\, d\lambda$ ist nach den zu Beginn des § 8 gegebenen Erklärungen natürlich sinnlos; es existiert aber der Grenzwert $\lim_{R \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - iR}^{\sigma + iR} v(x, \lambda)\, d\lambda = \frac{u_0(x)}{2}$. Wir machen von dieser Tatsache im folgenden keinen Gebrauch.

§ 9. Untersuchung des Integrals

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\lambda e^{\lambda t}v(x,\lambda)\,d\lambda.$$

Es werde der Grenzwert des folgenden Integrals untersucht für $\lim\limits_{n\to\infty} R_n=\infty$

(56) $$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}\lambda e^{\lambda t}v(x,\lambda)\,d\lambda.$$

Dabei bedeutet Γ_n wieder den Integrationsweg der Figur 1. Wir benützen dazu die asymptotische Darstellung der Green'schen Funktion. Es ist

$$G(x,s;\lambda)=g_0(x,s;\lambda)+G^{(0)}(x,s;\lambda)$$

und die rechts auftretenden Funktionen sind durch (42), (43) gegeben. Die Einsetzung liefert:

$$\int_{K_n}\lambda e^{\lambda t}v^*(x,\lambda)\,d\lambda=\int_{K_n}e^{\lambda t}d\lambda\int_0^1 g_0(x,s;\lambda)\Big\{L(u_0(s))-b(s)\,u_1(s)+\frac{1}{\lambda}L(u_1(s))\Big\}ds+\int_{K_n}e^{\lambda t}d\lambda\int_0^1 G^{(0)}(x,s;\lambda)\Big\{L(u_0(s))-b(s)\,u_1(s)+\frac{1}{\lambda}L(u_1(s))\Big\}ds.$$

Nach § 8 genügt es, die folgenden zwei Integrale zu betrachten.

(57) $$\mathfrak{J}_1=\int_{K_n}e^{\lambda t}d\lambda\int_0^1 g_0(x,s;\lambda)\{L(u_0(s))-b(s)\,u_1(s)\}\,ds$$

und

(58) $$\mathfrak{J}_2=\int_{K_n}e^{\lambda t}d\lambda\int_0^1 G^{(0)}(x,s;\lambda)\{L(u_0(s))-b(s)\,u_1(s)\}\,ds.$$

Setzen wir

$$(59)\qquad \Phi_\nu(s) = \frac{\eta_\nu(s)}{k(s)} \left\{ L(u_0(s)) - b(s)\, u_1(s) \right\}$$

und beschäftigen wir uns zunächst mit (57). Nach (42) ist

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_1^* + \mathfrak{J}_2^*$$

wo

$$(57_1)\qquad \mathfrak{J}_1^* = \eta_1(x) \int\limits_{K_n} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\, d\lambda \int\limits_0^x \Phi_2(s)\, e^{\lambda(X_1 - S_1)}\, ds$$

und

$$(57_2)\qquad \mathfrak{J}_2^* = \eta_2(x) \int\limits_{K_n} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\, d\lambda \int\limits_x^1 \Phi_1(s)\, e^{\lambda(X_2 - S_2)}\, ds.$$

Untersuchen wir (57_1). Nach Voraussetzung (6) und wegen

$$\frac{d\, S_1(s)}{ds} = \varphi_1(s) \neq 0$$

liefert eine partielle Integration nach s

$$\int\limits_0^x \Phi_2(s)\, e^{\lambda(X_1 - S_1)}\, ds = -\frac{1}{\lambda} \left\{ \frac{\Phi_2(s)}{\varphi_1(s)}\, e^{\lambda(X_1 - S_1)} \right\}_0^x + \frac{1}{\lambda} \int\limits_0^x \left(\frac{\Phi_2(s)}{\varphi_1(s)} \right)' e^{\lambda(X_1 - S_1)}\, ds$$

also hat der Integrand die Ordnung $\frac{1}{|\lambda|^2}$, d. h.

$$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{J}_1^* = 0$$

gleichmäßig in x für $0 \leqq x \leqq 1$ und in t für $0 \leqq t \leqq T < \infty$. Analog für (57_2).

Betrachten wir nun (58). Nach (43) genügt es, ein Integral der Form zu untersuchen

$$\int\limits_{K_n} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\, d\lambda \int\limits_0^1 \Phi_\nu(s)\, \mathcal{E}(\lambda)\, e^{\lambda f(x)} \cdot e^{\lambda h(s)}\, ds$$

wo $\mathcal{E}(\lambda)$ für große $|\lambda|$ beschränkt ist und $\Phi_\nu(s)$ die Bedeutung (59) hat. Beachtet man, daß $h'(s) \neq 0$ ist in $0 \leqq s \leqq 1$, so liefert eine partielle Integration nach s für den Integranden die Ordnung $\frac{1}{|\lambda|^2}$, woraus folgt, daß $\mathcal{J}_2$ mit wachsendem n gleichmäßig in x für $0 \leqq x \leqq 1$ und in t für $0 \leqq t \leqq T < \infty$ gegen Null strebt.

Die Integrale über die horizontalen Strecken gehen mit $\frac{1}{R_n}$ gegen Null, wieder gleichmäßig in x, t für die vorhin genannten Intervalle. Wir schließen also daraus, daß das Integral

$$\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \lambda\, e^{\lambda t} v^*(x, \lambda)\, d\lambda$$

gleichmäßig in x und t konvergiert für $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq t \leqq T < \infty$.

Man hat nun

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = u_1(x) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \lambda\, e^{\lambda t} v^*(x, \lambda)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \lambda\, e^{\lambda t} v(x, \lambda)\, d\lambda.$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz bezüglich t gilt:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(x)$$
$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \lambda\, v^*(x, \lambda)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \lambda\, v(x, \lambda)\, d\lambda.$$

Das vorletzte Integral ist aber gleich Null, wie eine analoge Betrachtung zu der des § 8 zeigt. Man braucht sich dazu nur der Beziehung (45) und der dort gemachten Bemerkung zu erinnern.

Wir haben damit den

Satz IV: Unter den oben gemachten Voraussetzungen darf man in der Formel (55) unter dem Integralzeichen einmal partiell nach t derivieren. $u(x,t)$, $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ sind stetige Funktionen in x, t und es gilt

$$u(x, 0) = \lim_{t \to 0} u(x, t) = u_0(x) \quad *)$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = u_1(x)$$

*) Man beachte die Definition von $u(x, t)$ durch (55), § 8.

§ 10. Die Funktion $u(x, t)$ erfüllt die homogenen Randbedingungen

Wir weisen nach, daß man in der Formel (55) die Integrale rechts einmal unter dem Integralzeichen nach x ableiten darf. Aus (12) und den Herleitungen des § 6 ergibt sich die asymptotische Darstellung von $\frac{\partial G(x, s; \lambda)}{\partial x}$ wie folgt:

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial g_0}{\partial x} + \frac{\partial G^{(0)}}{\partial x}$$

mit

$$\frac{\partial g_0}{\partial x} = \begin{cases} e^{\lambda(X_1 - S_1)} \left[\frac{\varphi_1(x)\,\eta_1(x)\,\eta_2(s)}{k(s)}\right] \\ e^{\lambda(X_2 - S_2)} \left[\frac{\varphi_2(x)\,\eta_2(x)\,\eta_1(s)}{k(s)}\right] \end{cases}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial G^{(0)}}{\partial x} = & \left(\left[B_{21} \frac{\varphi_1(x)\,\eta_1(x)\,\eta_2(s)}{k(s)}\right] \frac{E_{12}}{E}\right. \\ & \left. - \left[B_{11} \frac{\varphi_1(x)\,\eta_1(x)\,\eta_2(s)}{k(s)}\right] \frac{E_{22}}{E}\right) e^{\lambda X_1} \cdot e^{\lambda(\gamma_1 - S_1)} \\ & + \left(\left[A_{22} \frac{\varphi_1(x)\,\eta_1(x)\,\eta_1(s)}{k(s)}\right] \frac{E_{12}}{E} - \left[A_{12} \frac{\varphi_1(x)\,\eta_1(x)\,\eta_1(s)}{k(s)}\right] \frac{E_{22}}{E}\right) e^{\lambda X_1} \cdot e^{\lambda S_1} \\ & + \left(\left[B_{11} \frac{\varphi_2(x)\,\eta_2(x)\,\eta_2(s)}{k(s)}\right] \frac{E_{21}}{E} - \left[B_{21} \frac{\varphi_2(x)\,\eta_2(x)\,\eta_2(s)}{k(s)}\right] \frac{E_{11}}{E}\right) e^{\lambda(\gamma_1 - X_1)} \cdot e^{\lambda(\gamma_1 - S_1)} \\ & + \left(\left[A_{12} \frac{\varphi_2(x)\,\eta_2(x)\,\eta_1(s)}{k(s)}\right] \frac{E_{21}}{E} - \left[A_{22} \frac{\varphi_2(x)\,\eta_2(x)\,\eta_1(s)}{k(s)}\right] \frac{E_{11}}{E}\right) e^{\lambda(\gamma_1 - X_1)} \cdot e^{\lambda S_1}. \end{aligned}$$

Wir betrachten jetzt das Integral

$$\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{\lambda t} \frac{\partial v^*(x, \lambda)}{\partial x} d\lambda = \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} d\lambda \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial x} \left\{ L(u_0(s)) - b(s)\, u_1(s) + \frac{1}{\lambda} L(u_1(s)) \right\} ds.$$

Die asymptotische Darstellung von $\frac{\partial G}{\partial x}$ zeigt aber, daß die Ordnung von $\frac{\partial G}{\partial x}$ für große $|\lambda|$ durch $O(1)$ gegeben ist, gleichmäßig in x und s für $0 \leqq x$, $s \leqq 1$. Die gleiche partielle Integration, wie sie in § 9 benützt wurde, liefert für $\frac{\partial v^*}{\partial x}$ die Ordnung $\frac{1}{|\lambda|^2}$ gleichmäßig in x, s für $0 \leqq x$, $s \leqq 1$; also konvergiert das obige Integral gleichmäßig bezüglich x und t für $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq t \leqq T < \infty$. Man schließt daraus

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = u_0'(x) + u_1'(x)t - \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{\lambda t}\frac{\partial v^*}{\partial x}d\lambda = \frac{1}{2\pi i}(\!\!\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty}\!\!) e^{\lambda t}\frac{\partial v(x,\lambda)}{\partial x}d\lambda,$$

und es gilt zudem:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{t=0} = \frac{1}{2\pi i}(\!\!\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty}\!\!)\frac{\partial v(x,\lambda)}{\partial x}d\lambda = u_0'(x)$$

$$- \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty}\frac{\partial v^*}{\partial x}d\lambda.$$

Wie früher zeigt man auch hier, daß das letztere Integral Null ist. Also gilt:

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{t=0} = u_0'(x).$$

Nun erfüllt $v(x, \lambda)$ und wegen (6) und (52) auch $v^*(x, \lambda)$ die Randbedingungen, also gilt das gleiche für $u(x, t)$.

§ 11. Die Funktion $u(x, t)$ erfüllt fast überall in x und t die homogene Differentialgleichung I_1)

Wir zeigen jetzt, daß die nach x und t integrierte homogene Differentialgleichung I_1)

$$a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b(x)\frac{\partial u}{\partial t} - L(u) = 0$$

durch (55) erfüllt wird.

Die integrierte Gleichung lautet:

$$(60)\quad \int_0^x a(x)\left\{\frac{\partial u}{\partial t} - u_1(x)\right\} dx + \int_0^x b(x)\left\{u - u_0(x)\right\} dx$$

$$- \int_0^t \left\{ p(x)\frac{\partial u}{\partial x} - p(0)\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} - \int_0^x p'(x)\frac{\partial u}{\partial x} dx \right\} dt$$

$$- \int_0^t \left\{ q(x)\, u - q(0)\, u(0, t) - \int_0^x q'(x)\, u\, dx \right\} dt$$

$$- \int_0^x r(x)\, dx \int_0^t u\, dt = 0.$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz des in (55) auftretenden Integrals

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{\lambda t} v^*(x, \lambda)\, d\lambda$$

hat man

$$\int_0^t u(x, t)\, dt = u_0(x)\, t + u_1(x)\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} v^*(x, \lambda)\, d\lambda$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{v^*(x, \lambda)}{\lambda}\, d\lambda.$$

Das zweite Integral rechts ist aber Null, wie die Ausführungen des § 8 zeigen. Es bleibt:

$$(61)\quad \int_0^t u(x, t)\, dt = u_0(x)\, t + u_1(x)\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} v^*(x, \lambda)\, d\lambda$$

Substituieren wir (55) und (61) in die linke Seite von (60), so wird diese linke Seite:

$$(62)\quad t\left\{\int_0^x b(x)\,u_1(x)\,dx - \bigl(p(x)\,u_0'(x) - p(0)\,u_0'(0)\bigr) + \int_0^x p'(x)\,u_0'(x)\,dx\right.$$

$$\left. - \bigl(q(x)\,u_0(x) - q(0)\,u_0(0)\bigr) + \int_0^x q'(x)\,u_0(x)\,dx - \int_0^x r(x)\,u_0(x)\,dx\right\}$$

$$-\frac{t^2}{2}\left\{\bigl(p(x)\,u_1'(x) - p(0)\,u_1'(0)\bigr) - \int_0^x p'(x)\,u_1'(x)\,dx\right.$$

$$\left. + \bigl(q(x)\,u_1(x) - q(0)\,u_1(0)\bigr) - \int_0^x q'(x)\,u_1(x)\,dx + \int_0^x r(x)\,u_1(x)\,dx\right\}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\left\{\int_0^x \bigl(a(x)\lambda^2 + b(x)\lambda\bigr)\,v^*\,dx - \left(p(x)\frac{\partial v^*}{\partial x} - p(0)\left.\frac{\partial v^*}{\partial x}\right|_{x=0}\right)\right.$$

$$+\int_0^x p'(x)\frac{\partial v^*}{\partial x}\,dx - \bigl(q(x)\,v^* - q(0)\,v^*(0,\lambda)\bigr)$$

$$\left. + \int_0^x q'(x)\,v^*\,dx - \int_0^x r(x)\,v^*\,dx\right\}d\lambda.$$

Die Vertauschung der Integrationsfolge ist nämlich wegen der gleichmäßigen Konvergenz der auftretenden Integrale gestattet und nach den §§ 8, 9, 10 hat man:

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{1}{\lambda}\,\frac{\partial v^*}{\partial x}\,d\lambda = 0.$$

Nun genügt

$$v(x,\lambda) = \frac{u_0(x)}{\lambda} + \frac{u_1(x)}{\lambda^2} - v^*(x,\lambda)$$

der Gleichung

$$\bigl(a(x)\lambda^2 + b(x)\lambda\bigr)\,v - \left(p(x)\frac{\partial v^2}{\partial x^2} + q(x)\frac{\partial v}{\partial x} + r(x)\,v\right)$$
$$= \bigl(a(x)\lambda + b(x)\bigr)\,u_0(x) + a(x)\,u_1(x),$$

also ergibt sich durch Einsetzung und mittelst partieller Integration nach x

$$\frac{1}{\lambda}\left\{\int_0^x b(x)\,u_1(x)\,dx-\big(p(x)\,u_0'(x)-p(0)\,u_0'(0)\big)+\int_0^x p'(x)\,u_0'(x)\,dx\right.$$

$$\left.-\big(q(x)\,u_0(x)-q(0)\,u_0(0)\big)+\int_0^x q'(x)\,u_0(x)\,dx-\int_0^x r(x)\,u_0(x)\,dx\right\}$$

$$-\frac{1}{\lambda^2}\left\{\big(p(x)\,u_1'(x)-p(0)\,u_1'(0)\big)-\int_0^x p'(x)\,u_1'(x)\,dx\right.$$

$$\left.+\big(q(x)\,u_1(x)-q(0)\,u_1'(0)\big)-\int_0^x q'(x)\,u_1(x)\,dx+\int_0^x r(x)\,u_1(x)\,dx\right\}$$

$$-\left\{\int_0^x\big(a(x)\lambda^2+b(x)\lambda\big)v^*\,dx-\left(p(x)\frac{\partial v^*}{\partial x}-p(0)\frac{\partial v^*}{\partial x}\bigg|_{x=0}\right)+\int_0^x p'(x)\frac{\partial v^*}{\partial x}dx\right.$$

$$\left.-\big(q(x)\,v^*-q(0)\,v^*(0,\lambda)\big)+\int_0^x q'(x)\,v^*\,dx-\int_0^x r(x)\,v^*\,dx\right\}=0\,.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{e^{\lambda t}}{\lambda}$ und integriert nach λ, so sieht man, daß der Ausdruck (62) gleich Null ist.

Wir schreiben nun (60) in der Form

$$(60_1)\qquad \int_0^x a(x)\frac{\partial u}{\partial t}\,dx-p(x)\int_0^t\frac{\partial u}{\partial x}\,dt+p(0)\int_0^t\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0}dt=$$

$$=-\int_0^t dt\int_0^x p'(x)\frac{\partial u}{\partial x}\,dx+\int_0^x a(x)\,u_1(x)\,dx-\int_0^x b(x)\big(u-u_0(x)\big)\,dx$$

$$+\int_0^t\big(q(x)\,u-q(0)\,u(0,t)\big)\,dt-\int_0^t dt\int_0^x q'(x)\,u\,dx+\int_0^x r(x)\,dx\int_0^t u\,dt.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist nach x differentiierbar, also auch die linke, woraus folgt:

$$a(x)\frac{\partial u}{\partial t}-p(x)\frac{\partial}{\partial x}\int_0^t\frac{\partial u}{\partial x}\,dt=$$

$$=a(x)\,u_1(x)-b(x)\big(u-u_0(x)\big)\int_0^t q(x)\frac{\partial u}{\partial x}\,dt+r(x)\int_0^t u\,dt.$$

Da die rechte Seite nach t differentiierbar ist, so ergibt sich weiter

(63)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{a(x)\frac{\partial u}{\partial t}-p(x)\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^t\frac{\partial u}{\partial x}\,dt\right\}=q(x)\frac{\partial u}{\partial x}-b(x)\frac{\partial u}{\partial t}+r(x)\,u.$$

Wir setzen nun

(64)
$$u^*(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{\lambda t}\,v^*(x,\lambda)\,d\lambda$$

und weisen nach, daß $\frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2}$ fast überall existiert für jedes x.

Wir haben

$$\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\lambda e^{\lambda t}\,v^*(x,\lambda)\,d\lambda=\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{\lambda t}\,d\lambda\int\limits_0^1 G(x,s;\lambda)\left\{L\left(u_0(s)\right)-b(s)\,u_1(s)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\lambda}L\left(u_1(s)\right)\right\}ds.$$

Setzen wir

(65)

$$\mathfrak{F}(x,\lambda)=\lambda^2 v^*(x,\lambda)=\lambda\int\limits_0^1 G(x,s;\lambda)\left\{L(u_0(s))-b(s)\,u_1(s)+\frac{1}{\lambda}L\left(u_1(s)\right)\right\}ds$$

und $\lambda=\sigma+i\,\eta$, so gilt nach den früheren Betrachtungen

$$\mathfrak{F}(x,\lambda)=O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)$$

d. h. das Integral

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\mathfrak{F}(x,\lambda)|^2\,|d\lambda|$$

konvergiert gleichmäßig in x für $0\leqq x\leqq 1$. Wir haben daher

(66)
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\mathfrak{F}(x,\sigma+i\,\eta)|^2\,d\eta<M,$$

wo M von x unabhängig ist.

Man hat nun

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \lambda\, e^{\lambda t} v^*(x, \lambda)\, d\lambda = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\, \mathfrak{f}(x, \lambda)\, d\lambda$$

und daraus schließt man[10] [11]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u^*}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \lambda\, e^{\lambda t}\, v^*(x, \lambda)\, d\lambda\right) \tag{67}$$

existiert für jedes x fast überall, d. h. mit Ausnahme einer Menge vom Maß Null. Nach (55) gilt also das gleiche von $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

Differentiiert man (60_1) zuerst partiell nach t und dann nach x, so folgt überall in x und t:

(68)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\int_0^x a(x)\frac{\partial u}{\partial t}\, dx - p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right\} = -p'(x)\frac{\partial u}{\partial x} + q(x)\frac{\partial u}{\partial x} - b(x)\frac{\partial u}{\partial t} + r(x) u.$$

Nun gilt:

$$a(x)\frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2} = a(x)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \lambda\, e^{\lambda t}\, v^*(x, \lambda)\, d\lambda\right)$$

fast überall in t für jedes x, wobei u^* durch (64) erklärt ist. Beachtet man, daß die Beziehung (66) besteht, so ergibt sich[10] [11]:

$$\int_0^x \left\{a(x)\frac{\partial}{\partial t}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \lambda\, e^{\lambda t} v^*(x, \lambda)\, d\lambda\right\} dx = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \lambda\, e^{\lambda t} d\lambda \int_0^x a(x)\, v^*(x, \lambda)\, dx.$$

Differentiiert man nach x, so erhält man, abgesehen von einer zweidimensionalen Punktmenge vom Maß Null,

$$a(x)\frac{\partial}{\partial t}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \lambda\, e^{\lambda t} v^*(x, \lambda)\, d\lambda = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \lambda\, e^{\lambda t} d\lambda \int_0^x a(x)\, v^*(x, \lambda)\, dx\right)$$

d. h.

$$a(x)\frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\int_0^x a(x)\frac{\partial u^*}{\partial t}\, dx\right\}. \tag{69}$$

Es muß nun $\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ fast überall in x existieren, d. h. fast überall in x gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)=p'(x)\frac{\partial u}{\partial x}+p(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Wenn man jetzt (63), (68), (69) kombiniert, so erhält man den

Satz V: Abgesehen von einer zweidimensionalen Punktmenge vom Maß Null genügt die Funktion $u(x, t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t}\, v(x,\lambda)\, d\lambda$ der homogenen Differentialgleichung I_1).

§ 12. Lösung des inhomogenen Problems I

Für $f(x, t)$ seien die Voraussetzungen (7) erfüllt. Wir betrachten nun die Funktion

$$g(x,\lambda)=\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} f(x, t)\, dt. \tag{70}$$

Nach einem Satz von *M. Lerch*[8]) folgt, wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $\int\limits_0^\infty |f(x, t)|\, dt$ bezüglich x in $0 \leqq x \leqq 1$, daß $g(x, \lambda)$ für $\Re(\lambda) > 0$ analytisch in λ ist und stetig in x.

Wir haben:

$$g(x, \lambda)=\frac{1}{\lambda} f(x, 0)+\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{t=0}+\frac{1}{\lambda^2}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\, dt. \tag{71}$$

Nun hat $G(x, s; \lambda)$ die Ordnung $\frac{1}{|\lambda|}$, also gilt:

$$\left|\int\limits_0^1 G(x, s; \lambda)\, g(s, \lambda)\, ds\right|=O\left(\frac{1}{|\lambda|^2}\right) \tag{72}$$

d. h. das Integral

$$(73) \qquad U(x, t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{\lambda t}\, d\lambda \int\limits_0^1 G(x, s; \lambda)\, g(s, \lambda)\, ds \; {}^{*)}$$

konvergiert gleichmäßig in x für $0 \leqq x \leqq 1$ und in t für $0 \leqq t \leqq T < \infty$. Es gilt also:

$$U(x, 0) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} d\lambda \int\limits_0^1 G(x, s; \lambda)\, g(s, \lambda)\, ds.$$

Da $g(x, \lambda)$ analytisch ist für $\Re(\lambda) > 0$ und $G(x, s; \lambda)$ analytisch für $\Re(\lambda) \geqq \sigma$, so folgt:

$$\int\limits_{\Gamma_n^*} d\lambda \int\limits_0^1 G(x, s; \lambda)\, g(s, \lambda)\, ds = 0,$$

wenn $\Gamma_n{}^*$ der in Fig. 2 angegebene Integrationsweg ist. Da weiter die Ordnung des Integranden $\frac{1}{|\lambda|^2}$ ist, so strebt das Integral längs des Halbkreises K_n^* gegen Null und zwar gleichmäßig in x für $0 \leqq x \leqq 1$, woraus sich ergibt:

$$U(x, 0) = 0.$$

Wir betrachten jetzt das Integral

$$\int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \lambda\, e^{\lambda t}\, d\lambda \int\limits_0^1 G(x, s; \lambda)\, g(s, \lambda)\, ds$$

$$= \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{\lambda t}\, d\lambda \int\limits_0^1 G(x, s; \lambda) \left\{ f(s, 0) + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial f(s, 0)}{\partial t} + \frac{1}{\lambda^2}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda\tau}\frac{\partial^2 f(s, \tau)}{\partial \tau^2}\, d\tau \right\} ds.$$

*) Wir verweisen auf die in § 8 gegebene Definition dieses Integrals.

Zur Konvergenzfrage für dieses Integral genügt es also, das Folgende zu betrachten

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t}\, d\lambda \int_0^1 G(x, s; \lambda)\, f(s, 0)\, ds. \tag{74}$$

Wegen der in (7) vorausgesetzten stetigen Ableitung $\frac{\partial f(s, 0)}{\partial s}$ liefert eine partielle Integration nach s zusammen mit der asymptotischen Darstellung von $G(x, s; \lambda)$, genau wie in § 9, für den Integranden die Ordnung $\frac{1}{|\lambda|^2}$, gleichmäßig in x für $0 \leqq x \leqq 1$ und in t für $0 \leqq t \leqq T < \infty$, woraus die gleichmäßige Konvergenz des Integrals (74) sich ergibt für $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq t \leqq T < \infty$.

Wir haben daher

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \lambda e^{\lambda t}\, d\lambda \int_0^1 G(x, s; \lambda)\, g(s, \lambda)\, ds$$

mit

$$\left.\frac{\partial U(x, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0,$$

das letztere wie in den §§ 8, 9. Die Betrachtungen des § 10 lassen unter den Voraussetzungen (7) sogleich die gleichmäßige Konvergenz des Integrals

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t}\, d\lambda \int_0^1 \frac{\partial G(x, s; \lambda)}{\partial x}\, g(s, \lambda)\, ds$$

erkennen, wobei wieder $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq t \leqq T < \infty$. Daraus folgt somit

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t}\, d\lambda \int_0^1 \frac{\partial G(x, s; \lambda)}{\partial x}\, g(s, \lambda)\, ds.$$

Da die Green'sche Funktion die Randbedingungen erfüllt, so gilt das gleiche von $U(x, t)$.

Nun bleibt noch der Nachweis, daß die Funktion $U(x, t)$ der Differentialgleichung I_1) genügt. Wir zeigen auch hier zunächst, daß $U(x, t)$ die integrierte Gleichung I_1) befriedigt.

Diese lautet:

$$\int_0^x a(x) \frac{\partial u}{\partial t} dx + \int_0^x b(x)\, u dx - \int_0^t \left\{ p(x) \frac{\partial u}{\partial x} - p(0) \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} - \int_0^x p'(x) \frac{\partial u}{\partial x} dx \right\} dt$$

$$- \int_0^t \left\{ q(x)\, u - q(0)\, u(0,t) - \int_0^x q'(x)\, u dx \right\} dt - \int_0^x r(x)\, dx \int_0^t u dt$$

$$= \int_0^x dx \int_0^t f(x, t)\, dt. \text{ *)}$$

Setzen wir die Abkürzung

$$(75) \qquad V(x, \lambda) = -\int_0^1 G(x, s; \lambda)\, g(s, \lambda)\, ds$$

und substituieren wir die rechte Seite von (73) in die linke Seite der integrierten Differentialgleichung, so folgt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} d\lambda \left\{ \int_0^x \left(a(x) \lambda^2 + b(x) \lambda\right) V dx - \left(p(x) \frac{\partial V}{\partial x} - p(0) \frac{\partial V}{\partial x}\Big|_{x=0} \right) \right.$$

$$(76) \qquad - \int_0^x p'(x) \frac{\partial V}{\partial x} dx - \left(q(x)\, V - q(0)\, V(0, \lambda) \right)$$

$$\left. - \int_0^x q'(x)\, V dx - \int_0^x r(x)\, V dx \right\}.$$

Da aber

$$\left(a(x) \lambda^2 + b(x) \lambda\right) V - p(x) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - q(x) \frac{\partial V}{\partial x} - r(x)\, V = g(x, \lambda)$$

*) Wir bemerken, daß wir hier $u(x, 0) = 0$, $\left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$ voraussetzen dürfen.

ist, so liefert eine Integration nach x, daß der Ausdruck in der geschweiften Klammer von (76) gleich

$$\int_0^x g(x, \lambda)\, dx$$

ist. Damit ist (76) dem folgenden Integral gleich

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\, d\lambda \int_0^x g(x, \lambda)\, dx.$$

Nun weisen wir nach, daß dieses Integral gleich ist

$$\int_0^x dx \int_0^t f(x, t)\, dt.$$

Setzen wir dazu

$$\Phi(x, t) = \int_0^x f(x, t)\, dx,$$

so konvergiert

$$\int_0^\infty |\Phi(x, t)|\, dt$$

gleichmäßig in x für $0 \leqq x \leqq 1$.

Denn wegen der vorausgesetzten gleichmäßigen Konvergenz von

$$\int_0^\infty |f(x, t)|\, dt$$

gilt:

$$\int_0^x dx \int_0^\infty |f(x, t)|\, dt = \int_0^\infty dt \int_0^x |f(x, t)|\, dx,$$

und da

$$\int_0^A |\Phi(x, t)|\, dt = \int_0^A dt \left| \int_0^x f(x, t)\, dx \right| \leq \int_0^A dt \int_0^x |f(x, t)|\, dx$$

ist, so konvergiert das Integral

$$\int_0^\infty |\Phi(x, t)|\, dt$$

gleichmäßig in x für $0 \leq x \leq 1$.

Wir setzen

$$F(x, t) = \int_0^x dx \int_0^t f(x, t)\, dt = \int_0^t dt \int_0^x f(x, t)\, dx \tag{77}$$

und zeigen, daß das Integral

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} F(x, t)\, dt$$

für $\Re(\lambda) \geq k > 0$ absolut konvergent ist.

Man hat

$$\int_0^A e^{-kt} dt \int_0^t dt \int_0^x |f(x, t)|\, dx = -\frac{1}{k} \left\{ e^{-kt} \int_0^t dt \int_0^x |f(x, t)|\, dx \right\}_{t=0}^{t=A} + \frac{1}{k} \int_0^A e^{-kt} dt \int_0^x |f(x, t)|\, dx,$$

woraus für $A \to \infty$ folgt:

$$\int_0^\infty e^{-kt} dt \int_0^t dt \int_0^x |f(x, t)|\, dx = \frac{1}{k} \int_0^\infty e^{-kt} dt \int_0^x |f(x, t)|\, dx,$$

da ja das letztere Integral existiert. Die Konvergenz ist übrigens gleichmäßig in x für $0 \leqq x \leqq 1$. Wir haben also:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} F(x, \lambda)\, d\lambda = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, dt \int_0^x f(x, t)\, dx.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $e^{\lambda t}$ und integrieren nach λ, so liefert die Laplace'sche Integraltransformation

$$F(x, t) = \frac{1}{2 \pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{\lambda t}\, d\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda \tau} F(x, \tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2 \pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\, d\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda \tau}\, d\tau \int_0^x f(x, \tau)\, dx.$$

Da wegen der gleichmäßigen Konvergenz bezüglich x die Gleichung besteht

$$\int_0^x g(x, \lambda)\, dx = \int_0^\infty e^{-\lambda \tau}\, d\tau \int_0^x f(x, \tau)\, dx$$

so ergibt sich

$$F(x, t) = \frac{1}{2 \pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\, d\lambda \int_0^x g(x, \lambda)\, dx.$$

Nach (77) ist damit nachgewiesen, daß (73) Lösung der integrierten Gleichung ist.

§ 13. $U(x, t)$ erfüllt fast überall in x, t die Differentialgleichung I.)

Wie in § 11 sieht man, daß überall in x, t die Gleichung gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(a(x) \frac{\partial U}{\partial t} - p(x) \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t \frac{\partial U}{\partial x}\, dt\right) = q(x) \frac{\partial U}{\partial x} - b(x) \frac{\partial U}{\partial t} + r(x)\, U + f(x, t).$$

Nach § 12, No. (71), (75), wissen wir, daß die Beziehung besteht

$$\lambda^2 V(x, \lambda) = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right),$$

woraus folgt[10] [11]), daß das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \lambda e^{\lambda t} V(x, \lambda)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} \lambda^2 V(x, \lambda)\, d\lambda$$

fast überall nach t differentiierbar ist für jedes x.

Der § 11 zeigt ferner, daß abgesehen von einer zweidimensionalen Punktmenge vom Maß Null die Gleichung besteht

$$a(x)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t}\int_0^x a(x)\frac{\partial U}{\partial t}\, dx\right)$$

so daß man erhält:

Satz VI: Die Funktion $U(x, t)$ ist bis auf eine zweidimensionale Punktmenge vom Maß Null eine Lösung der Gleichung I_1). Sie erfüllt ferner die Randbedingungen I_3) und es gilt: $U(x, 0) = 0$, $\left.\frac{\partial U(x, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$.

Nach den §§ 8 bis 13 gilt ferner der

Satz VII: Bedeuten $v(x, \lambda)$ und $V(x, \lambda)$ die Lösungen der folgenden zwei Probleme,

$$\left\{\begin{aligned} &\big(a(x)\lambda^2 + b(x)\lambda\big)v - L(v) = \\ &= \big(a(x)\lambda + b(x)\big)u_0 + a(x)u_1, \\ &L_1(v) = 0 \\ &L_2(v) = 0 \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \big(a(x)\lambda^2 + b(x)\lambda\big)V - L(V) &= g(x, \lambda) \\ L_1(V) &= 0 \\ L_2(V) &= 0 \end{aligned}\right.$$

so ist, abgesehen von einer zweidimensionalen Punktmenge vom Maß Null, die Funktion

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{\lambda t} v(x, \lambda)\, d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{\lambda t} V(x, \lambda)\, d\lambda$$

eine Lösung des Problems I. σ bedeutet dabei eine positive Zahl, die größer ist als die obere Schranke der Realteile der Eigenwerte des Problems II.

Für $t > 0$ läßt sich die Funktion $u(x, t)$ noch in der Form darstellen:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{\lambda t} \mathfrak{V}(x, \lambda)\, d\lambda,$$

wenn unter $\mathfrak{V}(x, \lambda) = v(x, \lambda) + V(x, \lambda)$ die Lösung des Problems II verstanden wird.

Die zweite der Formeln (10) folgt aus der ersten mittels der Laplace'schen Integraltransformation.

§ 14. Der Entwicklungssatz

Es ist (§§ 8, 9, 10)

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{\lambda t} v(x, \lambda)\, d\lambda \tag{78}$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \lambda\, e^{\lambda t}\, v(x, \lambda)\, d\lambda \tag{79}$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{\lambda t}\, \frac{\partial v(x, \lambda)}{\partial x}\, d\lambda, \tag{80}$$

wobei die Integrale als in x, t gleichmäßige Grenzwerte von Kurvenintegralen zu betrachten sind für $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq t \leqq T < \infty$.

Sei nun $\lambda = \lambda_\nu$ ein Pol von $v(x, \lambda)$. Wir bezeichnen das zu ihm gehörige Residuum von $e^{\lambda t}\, v(x, \lambda)$ bezw. $e^{\lambda t}\, \lambda\, v(x, \lambda)$ mit $e^{\lambda_\nu t} R_\nu^{(0)}(x, t)$ bezw. $e^{\lambda_\nu t} R_\nu^{(1)}(x, t)$ *). Dann gilt:

$$u(x, t) = \lim_{A \to \infty} \sum_{|\lambda_\nu| < A} e^{\lambda_\nu t}\, R_\nu^{(0)}(x, t) \tag{81}$$

*) $R_\nu^{(0)}(x, t)$, $R_\nu^{(1)}(x, t)$ sind im allgemeinen Polynome in t.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \lim_{A\to\infty} \sum_{|\lambda_\nu|<A} e^{\lambda_\nu t} R_\nu^{(1)}(x,t) \tag{82}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \lim_{A\to\infty} \sum_{|\lambda_\nu|<A} e^{\lambda_\nu t} \frac{\partial R_\nu^{(0)}(x,t)}{\partial x} \tag{83}$$

gleichmäßig in x, t für $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq t \leqq T < \infty$. Wird ferner das zu $\lambda = \lambda_\nu$ gehörige Residuum von $v(x,\lambda)$ bezw. $\lambda v(x,\lambda)$ mit $r_\nu^{(0)}(x)$ bezw. $r_\nu^{(1)}(x)$ bezeichnet, also $r_\nu^{(0)}(x) = R_\nu^{(0)}(x, 0)$, $r_\nu^{(1)}(x) = R_\nu^{(1)}(x, 0)$, so gilt der

Satz VIII: Ist $u_0(x)$ dreimal stetig differentiierbar, ist $u_1(x)$ zweimal stetig differentiierbar und erfüllen $u_0(x)$, $u_1(x)$ die Randbedingungen I_3) des Problems I, so gelten gleichmäßig in x im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ die Reihenentwicklungen für das Funktionenpaar $u_0(x)$, $u_1(x)$

$$u_0(x) = \lim_{A\to\infty} \sum_{|\lambda_\nu|<A} r_\nu^{(0)}(x),$$

$$u_1(x) = \lim_{A\to\infty} \sum_{|\lambda_\nu|<A} r_\nu^{(1)}(x).$$

Ferner ist, ebenfalls gleichmäßig in x für $0 \leqq x \leqq 1$,

$$u_0'(x) = \lim_{A\to\infty} \sum_{|\lambda_\nu|<A} \frac{d r_\nu^{(0)}(x)}{dx}.$$

Für den Fall *einfacher Pole* wollen wir noch die Struktur der oben auftretenden Residuen und Reihenentwicklungen genauer angeben.

Sei also $\lambda = \lambda_\nu$ ein einfacher Pol der Green'schen Funktion $G(x, s; \lambda)$. λ_ν kann dann ein einfacher oder zweifacher Eigenwert des homogenen Problems II sein. Ist $v_\nu(x)$ eine zugehörige Eigenfunktion, so gilt:

$$\left.\begin{aligned} (a(x)\lambda_\nu^2 + b(x)\lambda_\nu)\, v_\nu(x) - L(v_\nu(x)) &= 0 \\ L_1(v_\nu) &= 0 \\ L_2(v_\nu) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

oder

$$\left\{\begin{aligned} L(v_\nu) - \left(a(x)\lambda^2 + b(x)\lambda\right) v_\nu &= -(\lambda - \lambda_\nu)\left\{a(x)(\lambda + \lambda_\nu) + b(x)\right\} v_\nu(x) \\ L_1(v_\nu) &= 0 \\ L_2(v_\nu) &= 0 \end{aligned}\right.$$

Wir haben daher, solange λ von einem Pol von $G(x, s; \lambda)$ verschieden ist

$$v_\nu(x) = -(\lambda - \lambda_\nu) \int_0^1 G(x, s; \lambda) \{a(s)(\lambda + \lambda_\nu) + b(s)\} v_\nu(s)\, ds.$$

Nun hängt aber $v_\nu(x)$ nicht von λ ab, so daß auch

$$v_\nu(x) = -\lim_{\lambda \to \lambda_\nu} (\lambda - \lambda_\nu) \int_0^1 G(x, s; \lambda) \{a(s)(\lambda + \lambda_\nu) + b(s)\} v_\nu(s)\, ds$$

ist und da wir voraussetzen $\lambda = \lambda_\nu$ sei ein einfacher Pol, können wir schreiben

(84) $$v_\nu(x) = -\int_0^1 R_\nu(x, s) \{2 \lambda_\nu a(s) + b(s)\} v_\nu(s)\, ds.$$

Das zu λ_ν gehörige Residuum von $G(x, s; \lambda)$ ist dabei mit $R_\nu(x, s)$ bezeichnet worden. Schreibt man das homogene Differentialsystem II in der Form

(85) $$\begin{cases} \Big\{\big(a(x)\lambda_\nu^2 + b(x)\lambda_\nu\big) + (\lambda - \lambda_\nu)\big(2 a(x)\lambda_\nu + b(x)\big) + \\ \qquad\qquad + (\lambda - \lambda_\nu)^2 a(x)\Big\} v - L(v) = 0 \\ L_1(v) = 0 \\ L_2(v) = 0 \end{cases}$$

und benützt man die Entwicklung

(86) $$G(x, s; \lambda) = \frac{R_\nu(x, s)}{\lambda - \lambda_\nu} + P(x, s; \lambda - \lambda_\nu),$$

so liefert die Einsetzung*) von (86) in (85), daß $R_\nu(x, s)$ eine Lösung des homogenen Problems II ist. Daher muß $R_\nu(x, s)$ eine lineare Kombination der zu $\lambda = \lambda_\nu$ gehörigen Eigenfunktionen des homogenen Problems II sein.

Die Green'sche Funktion ist ferner als Funktion von s betrachtet Lösung des zu II adjungierten Differentialsystems[3]) [14]) und für beide

---

*) Für $x \neq s$ ist $G(x, s; \lambda)$ Lösung des homogenen Problems II, wenn λ von einem Pol verschieden ist.

Differentialsysteme ist der Eigenwert λ_ν von gleicher Ordnung[3]). Bezeichnet man daher mit $v_\nu^{(1)}(x)$, $v_\nu^{(2)}(x)$ die Eigenfunktionen des homogenen Problems II für $\lambda = \lambda_\nu$ und mit $w_\nu^{(1)}$, $w_\nu^{(2)}$ die des adjungierten Differentialsystems, so gilt:

$$R_\nu(x, s) = \sum_{\alpha, \beta = 1, 2} c_{\alpha\beta}\, v_\nu^{(\alpha)}(x)\, w_\nu^{(\beta)}(s). \tag{87}$$

Unter Berücksichtigung von (84) erhält man somit

$$v_\nu^{(k)}(x) = -\sum_{\alpha, \beta = 1, 2} c_{\alpha\beta}\, v_\nu^{(\alpha)}(x) \int_0^1 v_\nu^{(k)}(s)\, w_\nu^{(\beta)}(s) \Big(2\lambda_\nu a(s) + b(s)\Big)\, ds \tag{88}$$

$$(k = 1, 2).$$

Nun kann man aber, in Verbindung mit (88), stets voraussetzen*), daß

$$\int_0^1 v_\nu^{(\alpha)}(s)\, w_\nu^{(\beta)}(s) \Big(2\lambda_\nu a(s) + b(s)\Big)\, ds = \begin{cases} 0 & \alpha \neq \beta \\ 1 & \alpha = \beta \end{cases} \tag{88$_1$}$$

woraus sich nach (88) ergibt:

$$v_\nu^{(1)}(x) = -\Big(c_{11}\, v_\nu^{(1)}(x) + c_{21}\, v_\nu^{(2)}(x)\Big).$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit von $v_\nu^{(1)}$, $v_\nu^{(2)}$ in $0 \leqq x \leqq 1$ folgt daher

$$c_{11} = -1$$
$$c_{21} = 0$$

und analog

$$c_{12} = 0$$
$$c_{22} = -1.$$

Man hat also

$$R_\nu(x, s) = -\Big(v_\nu^{(1)}(x)\, w_\nu^{(1)}(s) + v_\nu^{(2)}(x)\, w_\nu^{(2)}(s)\Big). \tag{89}$$

---

*) Vergleiche: *Goursat, E.*: Cours d'analyse, t. III, vierte Auflage (1927), S. 391.

Nun ergibt sich, nach (46) und (89), das zu $\lambda = \lambda_\nu$ gehörige Residuum $r_\nu^{(0)}(x)$ von $v(x, \lambda)$ im Fall eines einfachen Eigenwertes

$$(90) \quad r_\nu^{(0)}(x) = v_\nu(x) \int_0^1 w_\nu(s) \left\{ \left(\lambda_\nu a(s) + b(s)\right) u_0(s) + a(s) u_1(s) \right\} ds$$

und für den Fall eines zweifachen Eigenwertes

$$r_\nu^{(0)}(x) = \sum_{k=1}^{k=2} v_\nu^{(k)}(x) \int_0^1 w_\nu^{(k)}(s) \left\{ \left(\lambda_\nu a(s) + b(s)\right) u_0(s) + a(s) u_1(s) \right\} ds.$$

Das Residuum $r_\nu^{(1)}(x)$ von $\lambda v(x, \lambda)$ für $\lambda = \lambda_\nu$ wird

$$r_\nu^{(1)}(x) = \lambda_\nu r_\nu^{(0)}(x).$$

Hat man also nur einfache Pole und einfache Eigenwerte, so lauten die Reihenentwicklungen für $u(x, t), \dfrac{\partial u(x, t)}{\partial t}$, nach (78), (79), (80),

$$u(x, t) = \lim_{A \to \infty} \sum_{|\lambda_\nu| < A} A_\nu e^{\lambda_\nu t} v_\nu(x),$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \lim_{A \to \infty} \sum_{|\lambda_\nu| < A} \lambda_\nu A_\nu e^{\lambda_\nu t} v_\nu(x),$$

gleichmäßig in x, t für $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq t \leqq T < \infty$,
mit

$$\boxed{\begin{aligned} u_0(x) &= \lim_{A \to \infty} \sum_{|\lambda_\nu| < A} A_\nu v_\nu(x) \\ u_1(x) &= \lim_{A \to \infty} \sum_{|\lambda_\nu| < A} \lambda_\nu A_\nu v_\nu(x) \end{aligned}}$$

gleichmäßig in x für $0 \leqq x \leqq 1$. $v_\nu(x)$ ist dabei die zu $\lambda = \lambda_\nu$ gehörige Eigenfunktion des homogenen Problems II und A_ν berechnet sich nach (90) zu

$$A_\nu = \int_0^1 w_\nu(s) \left\{ \left(\lambda_\nu a(s) + b(s)\right) u_0(s) + a(s) u_1(s) \right\} ds.$$

Hierin bedeutet $w_\nu(s)$ die zu $\lambda = \lambda_\nu$ gehörige Eigenfunktion des zu II adjungierten Differentialsystems und über $v_\nu(x)$, $w_\nu(x)$ ist nach (88_1) so verfügt, daß

$$\int_0^1 v_\nu(s)\, w_\nu(s) \Big(2\lambda_\nu\, a(s) + b(s)\Big)\, ds = 1$$

ist.

Ist das Problem II speziell selbstadjungiert [3]), so kann man $v_\nu(x) = w_\nu(x)$ setzen und dabei $v_\nu(x)$ mit einer passenden Konstanten multiplizieren um

$$\int_0^1 v_\nu^2(s) \Big(2\lambda_\nu\, a(s) + b(s)\Big)\, ds = 1$$

zu erhalten. In diesem Fall gilt dann:

$$A_\nu = \int_0^1 v_\nu(s) \Big\{\Big(\lambda_\nu\, a(s) + b(s)\Big)\, u_0(s) + a(s)\, u_1(s)\Big\}\, ds.\,^*)$$

---

*) Man kann stets voraussetzen, eventuell nach Multiplikation mit $\frac{1}{p(x)}\, e^{\int_0^x \frac{q(x)}{p(x)} dx}$, daß (1) selbstadjungiert sei. Das zum homogenen Problem I gehörige Problem II lautet dann:

$$\left.\begin{array}{r} \Big(A(x)\lambda^2 + B(x)\lambda\Big) v - \dfrac{d}{dx}\Big(P(x)\dfrac{dv}{dx}\Big) - R(x)\, v = 0 \\ L_1(v) = 0 \\ L_2(v) = 0 \end{array}\right\}.$$

Sind λ_1, λ_2 zwei verschiedene Eigenwerte und v_1, v_2 zugehörige Eigenfunktionen, so gilt die verallgemeinerte Orthogonalitätsrelation:

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \int_0^1 A(x)\, v_1\, v_2\, dx + \int_0^1 B(x)\, v_1\, v_2\, dx = 0 \;^4)$$

sobald $\Big\{P(x)\,(v_2\, v_1' - v_1\, v_2')\Big\}_{x=0}^{x=1} = 0$, d. h. das Differentialsystem ist dann selbstadjungiert.

Unter gewissen Voraussetzungen über die Funktionen $A(x)$, $B(x)$ lassen sich daraus einige leicht herzuleitende Aussagen über die Lage der komplexen Eigenwerte in der λ-Ebene machen.

Literatur

1) *Birkhoff, G. D.:* On the asymptotic character of solutions of certain linear diff. equat. etc.
Trans. Am. Math. Soc. 9 (1908).

2) *Birkhoff, G. D.:* Boundary value and expansion problems etc.
Trans. Am. Math. Soc. 9 (1908).

3) *Bôcher, M.:* Leçons sur les méthodes de Sturm.
Collection de monographies sur la théorie des fonctions; Gauthier-Villars et Cie., Paris (1917).

4) *Bromwich, T. J. I' A.:* Normal coordinates in dynamical systems.
Proc. London Math. Soc. (2) 15 (1917).

5) *Doetsch, G.:* Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung.
I., II., III. Mitteilung. (I. Mitteilung von *Bernstein, F.* und *Doetsch, G.*).
Math. Zeitschrift 22 (1925) und 25 (1926).

6) *Doetsch, G.:* Elektrische Schwingungen in einem anfänglich strom- und spannungslosen Kabel unter dem Einfluß einer Randerregung.
Festschrift der Techn. Hochschule Stuttgart zur Vollendung ihres ersten Jahrhunderts 1829—1929.

7) *Heaviside, O.:* Literaturangaben in dem Buche von Jeffreys, H.: Operational methods in mathematical physics.
Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics; No. 23; second edition (1931).

8) *Lerch, M.:* Sur un point de la théorie des fonctions génératrices d'Abel.
Acta math. 27 (1903).

9) *Plancherel, M.:* Sur le développement d'un couple de fonctions arbitraires en séries de fonctions fondamentales d'un problème aux limites du type hyperbolique.
Atti del congresso Internazionale dei Matematici, Bologna (1928) VI.

10) *Plancherel, M.:* Contribution à l'étude de la représentation d'une fonction arbitraire par des intégrales définies.
Rend. di Palermo 30 (1910).

11) *Plancherel, M.:* Sur les formules d'inversion de Fourier et de Hankel.
Proc. London Math. Soc. (2) 24 (1925).

12) *Tamarkine, J.:* Some general problems of the theory of ordinary linear diff. equat. etc.
Math. Zeitschrift 27 (1927).

13) *Tamarkine, J.:* Ueber einige allg. Probleme aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen und über Reihenentwicklung von Funktionen.
Buch in russischer Sprache; Petrograd (1917).

14) *Westfall, W. D. A.:* Zur Theorie der Integralgleichungen.
Diss. Göttingen (1905).

(Eingegangen den 6. Juni 1932)