Ueber die Einteilung der Variationsprobleme von Lagrange nach Klassen.

Autor(en): **Carathéodory, C.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **5 (1933)**

PDF erstellt am: **17.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-6650

Ueber die Einteilung der Variationsprobleme von Lagrange nach Klassen

Von C. CARATHÉODORY, z. Z. Athen

Einleitung

1. Das Ziel dieser Arbeit ist die Aufstellung einer für alle regulären Punkttransformationen geltenden Invariante, die für das Studium der Variationsprobleme von Lagrange grundlegend ist. Es handelt sich um Folgendes: ist im $(n+1)$-dimensionalen Raum der $(t_1, x_1, \ldots, x_n)$ ein Variationsproblem mit der Funktion $L(t, x_i, \dot{x}_i)$ unter dem Integral und und den p Differentialgleichungen

$$G_{k'}(t, x_i, \dot{x}_i) = 0 \qquad (k' = 1, \ldots, p) \tag{1.1}$$

als Nebenbedingungen gegeben, so füllen die Extremalen, die aus einem beliebigen aber festen Punkt A des Raumes ausgehen, einen Raumteil aus, dessen Dimension mit $(n+1-q)$ bezeichnet werden soll. Die Zahl q, die für das betrachtete Problem jeweils charakteristisch ist, soll die *Klasse* des Problems heißen; es wird sich zeigen, daß sie von Null bis p inklusive variieren kann, und daß sie aus den Funktionen L und $G_{k'}$ mit Hilfe von Differentiationen (und Eliminationen) bestimmbar ist. Es handelt sich also um eine reine Differentialinvariante.

2. Das Problem von Lagrange ist in den letzten Jahren von verschiedenen Autoren, besonders von *Bliss*[1]) und seinen Schülern und

[1]) *G. A. Bliss.* A note on the problem of Lagrange in the calculus of variations. Amer. Bull. 22 (1916) pp. 220—225.
D. M. Smith. Jacobi's condition for the problem of Lagrange in the calculus of variations. Trans. Amer. Math. Soc. 17 (1916) p. 459.
G. A. Bliss. The problem of Mayer with variable end points. Amer. Trans. 19 (1918) pp. 305—314.
Miss G. A. Larew. Necessary conditions in the problem of Mayer in the calculus of variations. Amer. Trans. 20 (1919) p. 1.
G. A. Bliss. Some recent developments in the calculus of variations. Amer. Bull. 26 (1920) pp. 343—361.
G. A. Bliss. The transformation of Clebsch in the calculus of variations. (Proceed. intern. mathem. Congress Toronto 1924, Vol. I, pp. 589—603).
Miss G. A. Larew. The Hilbert Integral and Mayer Fields for the problem of Mayer in the calculus of variations. Amer. Trans. 26 pp. 61—67.
G. A. Bliss. The problem of Lagrange in the calculus of variations. Autograph. Vorlesung (1925) pp. 1—75.
G. A. Bliss. The problem of Lagrange in the calculus of variations. Amer. Journ. of Mathem. 52 (1930) pp. 672—748.

außerdem von *Marston Morse*[2]) behandelt worden. Der Grund aber, weshalb die Lagrangeschen Probleme nicht schon in diesen sehr sorgfältigen Arbeiten nach Klassen eingeteilt worden sind, ist folgender: nach den Arbeiten von *E. v. Escherich*[3]), der zuerst auf gewisse Singularitäten der Lagrangeschen Probleme hingewiesen hatte (cf. § 18), hat man sich im Anschluß an *H. Hahn* und *Bolza*[4]) gewöhnt, nur solche Extremalen zu betrachten, die sich, wie man sagt, «normal verhalten». Auf diese Weise konnte man allerdings die Schwierigkeiten, auf welche *v. Escherich* hingewiesen hatte, umgehen, aber es wurde gleichzeitig der Weg verbaut, der zu den feineren Unterscheidungen im Verhalten der Extremalen führt. In der Tat ist z. B. die Bedingung des normalen Verhaltens einer Extremalen bei den Lagrangeschen Problemen mit festen Endpunkten im wesentlichen mit der Forderung identisch, daß die Klasse des Problems verschwinden soll. Und ganz ähnlich ist die Theorie des normalen Verhaltens der Extremalen von Lagrangeschen Variationsproblemen mit variablen Endpunkten mit der Klasse des Problems verknüpft. Diese Zusammenhänge werden erst recht verständlich, wenn man den Begriff der Klasse unabhängig von der üblichen Theorie entwickelt, und deshalb werde ich von allen oben zitierten Arbeiten absehen, und mich nur auf die Formeln stützen, die ich in einer früheren Untersuchung angegeben habe[5]). Diese Abhandlung wird im Folgenden mit *Geod. Aeq.* zitiert.

3. ***Zusammenstellung bekannter Resultate.***

Wir nehmen an, daß die Funktionalmatrix

$$(3.1)\qquad \left(\frac{\partial G_{k'}}{\partial \dot{x}_i}\right) \qquad (k' = 1, \ldots, p;\ i = 1, \ldots, n)$$

---

[2]) a) The problems of Lagrange and Mayer under general end conditions. Proc. Nat. Acad. of Science. 16 (1930) pp. 229—233.

b) Sufficient conditions in the problem of Lagrange with variable end conditions. Amer. Journ. of Mathem. 53 (1931) pp. 517—546.

c) Sufficient conditions in the problem of Lagrange with fixed end points. Annals of Mathem. 32 (1931) pp. 567—577.

Ferner:

M. Morse and *S. B. Myers*. The problems of Lagrange and Mayer with variable end points. Proceed. Amer. Acad. of Arts and Science (Boston Mass.) 66 (1931) pp. 235—253.

[3]) *E. v. Escherich* Die zweite Variation der einfachen Integrale. Wiener Sitzungsber. Mathem. Naturw. Klasse 107, 108, 110 (1898, 1899, 1901).

[4]) *H. Hahn*. Math. Ann. 58 (1903) p. 152.

O. Bolza. Vorlesungen über Variationsrechnung. (Leipzig, Teubner, 1909) p. 564.

[5]) *C. Carathéodory*. Die Methode der geodätischen Aequidistanten und das Problem von Lagrange. Acta Mathematica 47 (1926) pp. 199—236.

der linken Seite von (1. 1) den Rang p besitzt. Außerdem soll für die Linienelemente, die man betrachtet, die *Legendresche Bedingung* erfüllt sein (Geod. Aeq. p. 210). Es soll also, wenn man mit $\mu_1, \ldots, \mu_p$ Lagrangesche Multiplikatoren bezeichnet, und die Funktion

$$M(t, x_i, \dot{x}_i, \mu_{j'}) = L + \mu_{k'} G_{k'} \tag{3. 2}$$

einführt, die Gleichung in ϱ

$$D(\varrho) = \begin{vmatrix} M_{\dot{x}_i \dot{x}_j} - \delta_{ij}\,\varrho\,, & \dfrac{\partial G_{k'}}{\partial \dot{x}_i} \\ \dfrac{\partial G_{m'}}{\partial \dot{x}_j} & ,\quad 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{3. 3}$$

lauter positive, von Null verschiedene Wurzeln besitzen.

Unter diesen Umständen kann man an Stelle der $(2n + p + 1)$ Veränderlichen, die in (3. 2) auftreten, und die außerdem den p Bedingungsgleichungen (1. 1) genügen sollen, $(2n + 1)$ von einander unabhängige kanonische Koordinaten (t, x_i, y_i) einführen, die erlauben, alle Einzelheiten des Problems mit Hilfe einer einzigen Hamiltonschen Funktion $H(t, x_i, y_i)$ zu untersuchen (Geod. Aeq. p. 218).

Ist umgekehrt eine beliebige Funktion $H(t, x_i, y_i)$ gegeben, die mindestens zwei Mal stetig differentiierbar ist, so kann sie als Hamiltonsche Funktion eines Variationsproblems angesehen werden, für welches die Legendresche Bedingung erfüllt ist, wenn die Gleichung in σ

$$| H_{y_i y_j} - \delta_{ij}\,\sigma | = 0 \tag{3. 4}$$

keine einzige negative Wurzel besitzt (Geod. Aeq. p. 221).

Die Anzahl ferner der verschwindenden Wurzeln der Gleichung (3. 4) ist immer gleich der Anzahl der Bedingungsgleichungen (1. 1) des Lagrangeschen Problems, welchem die Funktion H zugeordnet ist. Ist also insbesondere die Hessesche Determinante $| H_{y_i y_j} | \neq 0$, so ist die Anzahl der Bedingungsgleichungen gleich Null, d. h. das betrachtete Variationsproblem ist ein gewöhnliches und kein Problem von Lagrange.

4. Die Lösung eines Variationsproblems mit der Hamiltonschen Funktion $H(t, x_i, y_i)$ hängt bekanntlich von der Konstruktion einer „vollständigen Figur“ ab, die aus einer Schar geodätisch äquidistanter Flächen

$$S(t, x_i) = \lambda \tag{4. 1}$$

und der sie durchsetzenden Extremalenschar besteht. Man erhält die Flächenschar (4. 1) durch Integration der partiellen Differentialgleichung (Geod. Aeq. p. 222)

$$S_t + H(t, x_i, S_{x_i}) = 0 \tag{4.2}$$

Die Cauchyschen Charakteristiken von (4. 2) sind Lösungen des Systems

$$\dot{x}_i = H_{y_i}, \qquad \dot{y}_i = -H_{x_i} \tag{4.3}$$

von kanonischen Differentialgleichungen.

Die Extremalen unseres Variationsproblems werden durch die Projektion $x_i = x_i(t)$ dieser Kurven auf den $(n+1)$-dimensionalen Raum der (t, x_i) dargestellt.

Betrachtet man ein Stück des Raumes, das von der Flächenschar (4. 1) einfach überdeckt wird, so bilden die sie transversal schneidenden Extremalen, die man auch als Lösungen der Differentialgleichungen

$$\dot{x}_i = H_{y_i}(t, x_j, S_{x_j}), \tag{4.4}$$

gewinnen kann, ein Feld, auf welches die Weierstraßsche Theorie anwendbar ist (Geod. Aeq. p. 215)[6]).

5. ***Ein Hilfssatz.***

Wir betrachten nun einen Punkt P_0 des Raumes der (t, x_i) und ein Extremalenstück e_0, das P_0 enthält. Aus der Integrationstheorie der partiellen Differentialgleichung (4. 2) folgt ein Resultat, das für alles Weitere grundlegend ist.

Man kann mit P_0 als Mittelpunkt eine Kugel $\varkappa$ abgrenzen, sodaß jede Extremale e, die in einer gewissen Nachbarschaft von e_0 liegt, in ein Feld eingebettet werden kann, das die Kugel $\varkappa$ vollständig überdeckt.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{E}$ die Gesamtheit der Extremalen e, die nach geeigneter Wahl von $\varkappa$ die vorstehende Eigenschaft besitzen. Erinnert man sich daran, daß für alle betrachteten Extremalen die Legendresche

---

6) Man bemerke, daß durch die Benutzung der kanonischen Koordinaten jeder Unterschied zwischen den gewöhnlichen und den sogenannten „Mayerschen“ Feldern von Extremalen in Fortfall kommt. Es ist ein großer Vorteil, daß die sehr komplizierte Begriffsbildung der Mayerschen Felder vermieden werden kann.

Bedingung erfüllt sein soll, so folgt, wenn man bei der Wahl von $\mathfrak{E}$ einige auf der Hand liegende Einschränkungen macht, die die Benützung der Weierstraßschen E-Funktion sicherstellen, der

Satz 1. *Keine zwei Extremalenstücke e_1 und e_2 aus $\mathfrak{E}$, die beide im Innern von $\varkappa$ liegen, können dieselben Endpunkte besitzen, ohne zusammenzufallen.*

Um dies zu zeigen, nehmen wir an, daß e_1 und e_2 dieselben Punkte A und B verbinden, ohne identisch zu sein, und bezeichnen mit $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{J}_2$ die Werte des Integrals über L längs e_1 und e_2. Nach Konstruktion eines Feldes von Extremalen, das e_1 enthält, kann man die Differenz $(\mathfrak{J}_2 - \mathfrak{J}_1)$ mit Hilfe der E-Funktion, die zu diesem Felde gehört, durch die Gleichung

$$\mathfrak{J}_2 - \mathfrak{J}_1 = \int\limits_{e_2} E\, dt \tag{5.1}$$

darstellen. Nun ist einerseits $E \geqq 0$, aber E ist in der vorstehenden Gleichung nicht durchweg Null, weil nach unserer Voraussetzung Punkte existieren, in welchen e_2 die durch diese Punkte gehende Feldkurve unter einem von Null verschiedenen Winkel schneidet, und weil dann in diesen Punkten $E > 0$ ist. Hieraus schließt man, daß $\mathfrak{J}_2 > \mathfrak{J}_1$ sein muß. Durch Vertauschung von e_1 mit e_2 hätte man aber $\mathfrak{J}_1 > \mathfrak{J}_2$ gefunden, was zu einem Widerspruche führt.

6. *Das accessorische Variationsproblem.*

Die kanonischen Koordinaten x_i, y_i sollen längs einer festen Extremalen e_0 den Gleichungen

$$x_i = \bar{x}_i(t), \qquad y_i = \bar{y}_i(t) \tag{6.1}$$

genügen. Wir führen zur Abkürzung folgende Funktionen von t ein, die also längs e_0 definiert sind:

$$a_{ij}(t) = H_{x_i x_j}(t, \bar{x}_k, \bar{y}_k) \tag{6.2}$$

$$b_{ij}(t) = H_{x_i y_j}(t, \bar{x}_k, \bar{y}_k) \tag{6.3}$$

$$c_{ij}(t) = H_{y_i y_j}(t, \bar{x}_k, \bar{y}_k). \tag{6.4}$$

Stellt man durch die Gleichungen

$$x_i = x_i(t, u), \qquad y = y_i(t, u) \tag{6. 5}$$

die kanonischen Koordinaten der Linienelemente einer Extremalenschar dar, die von einem Parameter u abhängt, und reduzieren sich für $u = 0$ die Funktionen (6. 5) auf $\bar{x}_i$ bzw. $\bar{y}_i$; setzt man ferner

$$\xi_i(t) = \left.\frac{\partial x_i(t, u)}{\partial u}\right|_{u=0}, \quad \eta_i(t) = \left.\frac{\partial y_i(t, u)}{\partial u}\right|_{u=0}, \tag{6. 6}$$

so sind bekanntlich die Funktionen $\xi_i(t)$ und $\eta_i(t)$ Lösungen der Differentialgleichungen

$$\left\{\begin{aligned} \dot{\xi}_i &= b_{ki}\,\xi_k + c_{ik}\,\eta_k \\ \dot{\eta}_i &= -a_{ik}\,\xi_k - b_{ik}\,\eta_k\,. \end{aligned}\right. \tag{6. 7}$$

7. Man bemerke jetzt, daß die Funktion

$$\mathcal{H}(t, \xi_i, \eta_i) = \frac{1}{2} a_{ij}\,\xi_i\,\xi_j + b_{ij}\,\xi_i\,\eta_j + \frac{1}{2} c_{ij}\,\eta_i\,\eta_j \tag{7. 1}$$

als Hamiltonsche Funktion eines Variationsproblems angesehen werden kann, dessen Extremalen durch die kanonischen Gleichungen (6. 7) bestimmt werden. Die Determinante (3. 4) des ursprünglichen Variationsproblems fällt, wenn man sie für die Linienelemente von e_0 bildet, mit der analogen Determinante des neuen Variationsproblems zusammen, woraus man schließt, daß auch hier die Legendresche Bedingung erfüllt ist. Von einem verwandten Resultat ausgehend, hat *Bliss* in der Arbeit, die er dem Toronto Congreß vorgelegt hat, außerordentlich elegante Schlüsse gezogen. Für uns wird vor allem maßgebend sein, daß man den Satz 1 des § 5 auch auf die Lösungen der Differentialgleichungen (6. 7) anwenden kann. Wählen wir für die eine der beiden Extremalen, die in diesem Satze benutzt werden, die Lösung $\xi_i \equiv 0$, $\eta_i \equiv 0$ der Gleichungen (6. 7), so können wir nunmehr folgenden Satz aussprechen:

Satz 2. *Jeder Punkt t_0 der t-Achse, für welchen die früheren Voraussetzungen gelten, ist Mittelpunkt eines Intervalls $\delta(t_0)$, in dem eine beliebige Lösung der Differentialgleichung (6. 7) höchstens eine gemeinsame Nullstelle der $\xi_i(t)$ besitzen kann, falls nicht für diese Lösung alle $\xi_i(t)$ identisch Null sind.*

8. *Aufstellung der Klasse des Variationsproblems.*

Wir betrachten die Gesamtheit der Extremalen unseres Variationsproblems, die durch einen festen Punkt (t^0, x_i^0) hindurchgehen, und in einer Umgebung einer Extremalen e^0 liegen, die diesen Punkt ebenfalls enthält. Diese Extremalen werden durch Lösungen

$$x_i = x_i(t, u_j), \qquad y_i = y_i(t, u_j) \tag{8. 1}$$

der kanonischen Differentialgleichungen (4. 3) dargestellt, die von n Parametern $(u_1, \ldots u_n)$ abhängen, und den Anfangsbedingungen

$$x_i(t^0, u_j) = x_i^0, \qquad y_i(t^0, u_j) = u_i \tag{8. 2}$$

genügen.

Um die Dimension desjenigen Teiles des Raumes festzustellen, der von der Extremalenschar (8. 1) überdeckt wird, muß man den Rang der Funktionaldeterminante

$$\left|\frac{\partial x_i}{\partial u_j}\right| \tag{8. 3}$$

untersuchen.

Nun führe man die Bezeichnungen ein:

$$\xi_{ij}(t) = \frac{\partial x_i}{\partial u_j}, \qquad \eta_{ij}(t) = \frac{\partial y_i}{\partial u_j}, \tag{8. 4}$$

wobei man in die rechten Seiten dieser Gleichungen diejenigen Werte der u_k einsetzt, die zur Extremalen e^0 gehören. Dann sind die Funktionen ξ_{ij}, η_{ij} Lösungen der kanonischen Differentialgleichungen (6. 7) des accessorischen Problems, die in Folge von (8. 2) die Anfangsbedingungen

$$\xi_{ij}(t^0) = 0, \qquad \eta_{ij}(t^0) = \delta_{ij} \tag{8. 5}$$

befriedigen müssen. Die Determinante (8. 3) nimmt jetzt die Gestalt an

$$\Delta(t, t^0) = |\xi_{ij}(t)| \tag{8. 6}$$

und alles kommt darauf hinaus ihren Rang $R(t)$ zu bestimmen, falls $t \neq t_0$ ist.

9. Entweder ist jetzt im ganzen Intervall $\delta(t_0)$ des Satzes 2 (§ 7) der Rang $R(t)$ von $\Delta(t, t_0)$ gleich n, oder es gibt im Innern dieses Intervalls einen Punkt t_1, für welchen dieser Rang gleich $(n-q)$ und $q > 0$ ist.

Im letzten Falle gibt es q linear unabhängige n-dimensionale Vektoren

$$\lambda_k^{(\alpha)} \qquad (k = 1, \ldots, n; \; \alpha = 1, \ldots, q), \tag{9. 1}$$

so daß mit den Bezeichnungen

$$\xi_i^{(\alpha)}(t) = \lambda_k^{(\alpha)} \xi_{ik}(t), \qquad \eta_i^{(\alpha)}(t) = \lambda_k^{(\alpha)} \eta_{ik}(t) \tag{9. 2}$$

für jedes α und jedes i alle Gleichungen

$$\xi_i^{(\alpha)}(t_1) = 0 \tag{9. 3}$$

erfüllt sind. Da nun für jedes α die Funktionen $\xi_i^{(\alpha)}, \eta_i^{(\alpha)}$ Lösungen der Differentialgleichungen (6. 7) sind, und da die $\xi_i^{(\alpha)}$ alle in den beiden Punkten t_0 und t_1 verschwinden, müssen nach dem Satze 2 des § 7 die Gleichungen

$$\xi_i^{(\alpha)}(t) = 0 \tag{9. 4}$$

identisch befriedigt sein.

Hieraus folgt nun weiter, daß in jedem Punkt (t) des Intervalles $\delta(t^0)$ mindestens q linear unabhängige Kombinationen der Zeilen der Determinante (8. 6) existieren, die in diesem Punkte verschwinden, und man entnimmt hieraus, daß überall $R(t) \leq R(t_1)$ sein muß. Da nun t_1 einen beliebigen von t^0 verschiedenen Punkt des Intervalles $\delta(t^0)$ bedeuten sollte, für welchen $R(t_1) < n$ war, ist dies nur dann möglich, wenn $R(t)$ für alle von t^0 verschiedenen Punkte immer denselben Wert $(n-q)$ besitzt. Diese Zahl q, die auch Null sein kann, soll die *Klasse der Extremale e^0 im Punkte t^0* genannt werden.

10. Die q Funktionen $\eta_i^{(\alpha)}(t)$, die in der zweiten Gleichung (9. 2) vorkommen, sind Lösungen der Differentialgleichungen (6. 7), in welchen man die ξ_k identisch gleich Null gesetzt hat. Sie sind also Lösungen der Differentialgleichungen

$$\dot{\eta}_i = -b_{ik} \eta_k, \tag{10. 1}$$

die außerdem noch die n linearen Gleichungen

$$c_{ik} \eta_k = 0 \tag{10. 2}$$

befriedigen. Für $t = t^0$ hat man außerdem, wegen (8. 5) und (9. 2)

$$\eta_i^{(\alpha)}(t^0) = \lambda_i^{(\alpha)}, \tag{10. 3}$$

und hieraus entnimmt man, daß die q Funktionen $\eta_i^{(\alpha)}(t)$ linear unabhängig sind.

Wir bezeichnen mit δ^* ein beliebiges Teilintervall von $\delta(t^0)$ und mit q^* die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen von (10. 1) die im Intervalle δ^* den Relationen (10. 2) genügen. Es ist selbstverständlich, daß

$$q^* \geqq q \tag{10. 4}$$

ist. Nun bemerke man, daß jede dieser Lösungen auch aufgefaßt werden kann als Lösung von (6. 7), für welche alle ξ_i in δ^* identisch verschwinden. Da nun nach Voraussetzung δ^* in $\delta(t^0)$ enthalten ist, müssen nach dem Satze 2 des § 7 alle diese ξ_i überall in $\delta(t_0)$ verschwinden. Hieraus folgt, daß der Rang $R(t)$ der Determinante (8. 6) der Bedingung

$$R(t) \leqq n - q^* \tag{10. 5}$$

genügt. Man hat also insbesondere $n - q \leqq n - q^*$ und durch Vergleichung mit (10. 4)

$$q^* = q. \tag{10. 6}$$

Andererseits ist aber auch q^* die Klasse der Extremalen e_0 in einem beliebigen Punkte von δ^*; man sieht also, daß die Klasse von e_0 unabhängig ist von der Wahl des Punktes P_0 auf dieser Extremalen. Es gilt daher der

Satz 3. *Es sei e^0 ein Extremalenstück, auf welchem die Legendresche Bedingung erfüllt ist. Die Gesamtheit der Extremalen, die durch einen beliebigen aber festen Punkt von e^0 hindurchgehen, bildet eine Punktmenge, deren Dimension $(n + 1 - q)$ ist; die Zahl q, die positiv oder Null ist, und die außerdem unabhängig von der Wahl von P_0 ist, heißt die Klasse der Extremalen e^0. Sie ist gleich der Anzahl derjenigen linear unabhängigen Lösungen von (10. 1), die der Bedingung (10. 2) genügen.*

11. **Berechnung der Klasse.** Ist das gestellte Variationsproblem ein gewöhnliches, so ist der Rang der Matrix (c_{ik}) gleich n und das System von Gleichungen (10. 2) besitzt dann keine von Null verschiedene Lösung. In diesem Falle ist selbstverständlich die Klasse q gleich Null.

Wir nehmen also an, daß wir ein Lagrangesches Variationsproblem mit p Differentialgleichungen als Nebenbedingungen vor uns haben, was gleichbedeutend damit ist, daß der Rang der Matrix (c_{ik}) gleich $(n - p)$ sein soll.

Wir führen nun die Bezeichnung ein

$$v_i(t) = c_{ik}(t) \cdot \eta_k(t). \tag{11.1}$$

Setzen wir für die η_k beliebige Lösungen der Differentialgleichungen (10.1) ein, so sind die Funktionen (11.1) mindestens p Mal stetig differentiierbar, falls, wie wir von jetzt ab annehmen wollen, die Hamiltonsche Funktion H mindestens $(p + 2)$ Mal stetig differentiierbar ist. Aus (11.1) und (10.1) folgt dann

$$\begin{aligned} \frac{dv_i}{dt} &= \dot{c}_{ik}\,\eta_k + c_{ij}\,\dot{\eta}_j \\ &= (\dot{c}_{ik} - c_{ij}\,b_{jk})\,\eta_k\,. \end{aligned}$$

Setzt man also zur Abkürzung

$$c_{ik}^{(1)} = \dot{c}_{ik} - c_{ij}\,b_{jk} \tag{11.2}$$

und allgemein für $m = 1, 2, \ldots$

$$c_{ik}^{(m+1)} = \dot{c}_{ik}^{(m)} - c_{ij}^{(m)}\,b_{jk}\,, \tag{11.3}$$

so hat man für alle betrachteten Werte von m

$$\frac{d^m v_i}{dt^m} = c_{ik}^{(m)}\,\eta_k\,. \tag{11.4}$$

Es handelt sich jetzt darum, die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen $\eta_k^{(\alpha)}$ von (10.1) zu bestimmen, für welche alle

$$v_i^{(\alpha)} = c_{ik}\,\eta_k^{(\alpha)} \tag{11.5}$$

identisch verschwinden.

12. Zu diesem Zweck betrachten wir die Matrix

$$A_m = \begin{pmatrix} c_{ik} \\ c_{i_1 k}^{(1)} \\ \cdots \\ c_{i_m k}^{(m)} \end{pmatrix}, \tag{12.1}$$

die n Kolonnen und $m \cdot n$ Zeilen besitzt und bezeichnen mit r_m ihren Rang. Das heißt r_m soll die Ordnung der größten Unterdeterminante von (12. 1) darstellen, die auf dem betrachteten Extremalenstück e_0 nicht *identisch* verschwindet. Es ist jedenfalls

$$(n-p) \leqq r_1 \leqq \ldots \leqq r_p \,. \tag{12. 2}$$

Hat man nun $r_p = n$, so gibt es keine einzige nicht identisch verschwindende Lösung η_i von (10. 1), für welche die rechten Seiten von (11. 1) und von (11.4) für $m = 1, \ldots, p$ alle identisch Null sind. In diesem Falle muß die Klasse von e^0 gleich Null sein.

Ist dagegen $r_p < n$, so gibt es wegen (12. 2) einen *kleinsten* Wert für m zwischen Null und $(p - 1)$, sodaß

$$r_{m+1} = r_m \tag{12. 3}$$

ist; außerdem ist

$$n - r_m > 0. \tag{12. 4}$$

Es gibt ferner auf der t-Achse ein Intervall δ, auf welchem eine r_m-reihige Unterdeterminante der Matrix A_m von Null verschieden ist. Man kann dann Koeffizienten

$$g_{ji}(t),\; g_{ji}^{(1)}(t),\; \ldots,\; g_{ji}^{(m)}(t)$$

finden, die auf δ stetig sind und für welche die Gleichungen

$$c_{jk}^{(m+1)} = g_{ji} \cdot c_{ik} + g_{ji_1}^{(1)}, c_{i_1 k}^{(1)} + \ldots + g_{ji_m}^{(m)} c_{i_m k}^{(m)} \quad (j, k = 1, \ldots, n) \tag{12. 4}$$

sämtlich erfüllt sind.

Außerdem können wir $(n - r_m)$ linear unabhängige Lösungen $\eta_k^{(\alpha)}$ von (10. 1) ausfindig machen, die in einem Punkte t^0 von δ den Bedingungen

$$v_i^{(\alpha)}(t^0) = 0, \frac{dv_i^{(\alpha)}(t^0)}{dt} = 0, \ldots, \frac{d^{(m)} v_i^{(\alpha)}(t^0)}{dt^m} = 0 \tag{12. 5}$$

genügen. Aus (11. 4) und (12. 4) folgt aber andererseits daß diese Funktionen $v_i^{(\alpha)}$ sämtlich Lösungen der linearen homogenen Differentialgleichungen

$$\frac{d^{m+1} v_j}{dt^{m+1}} = g_{ji} v_i + g_{ji_1}^{(1)} \frac{dv_{i_1}}{dt} + \ldots + g_{ji_m}^{(m)} \frac{d^m v_{i_m}}{dt^m}$$

sind.

Hieraus folgt, daß die $v_i^{(\alpha)}$ in δ identisch verschwinden müssen, und es muß daher die Klasse q unseres Variationsproblems der Relation

$$q \geqq n - r_m \tag{12.7}$$

genügen.

Andererseits ist der Rang r_p der Matrix A_p höchstens gleich $(n-q)$; man hat daher, mit Berücksichtigung von (12.2)

$$r_m \leqq r_p \leqq (n-q). \tag{12.8}$$

Die Vergleichung von (12.7) mit (12.8) und (12.2) liefert schließlich die Relationen

$$r_m = r_{m+1} = \ldots = r_p = (n-q). \tag{12.9}$$

Man sieht außerdem, daß für q die Bedingungen

$$0 \leqq q \leqq p \tag{12.10}$$

gelten, und man kann durch Beispiele feststellen, daß q alle Werte zwischen Null (inklusive) und p (inklusive) annehmen kann.

Es ist sehr bemerkenswert, daß man den Rang der Determinante $\Delta(t, t^0)$ des § 8 bestimmen kann, ohne die Differentialgleichungen (6.7) zu integrieren. Es gilt also der

Satz 4. *Die Klasse q der Extremale e ist immer gleich $(n - r_p)$, wenn r_p den Rang der Matrix A_p bezeichnet.*

13. *Probleme von der Klasse Null.*

Aus unseren früheren Ausführungen folgt, daß alle gewöhnlichen Variationsprobleme von der Klasse Null sind. Aber auch für Lagrangesche Variationsprobleme sind die Probleme von nicht verschwindender Klasse die Ausnahme. Wir nehmen als Beispiel die Hamiltonsche Funktion

$$H = \tfrac{1}{2} y_1^2 + x_1 y_2. \tag{13.1}$$

Hier ist $n = 2$ und man findet, daß die Matrizen der c_{ij} und $c_{ij}^{(1)}$ folgendermaßen lauten:

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix}, \qquad (c_{ij}^{(1)}) = \begin{pmatrix} 0, -1 \\ 0, 0 \end{pmatrix}; \tag{13.2}$$

hieraus folgt dann sofort, daß $p = 1$ und $q = 0$ ist. Die kanonischen Differentialgleichungen der Extremalen

$$\dot{x}_1 = y_1, \quad \dot{y}_1 = -y_2, \quad \dot{x}_2 = x_1, \quad \dot{y}_2 = 0 \tag{13.3}$$

lassen sich sofort integrieren. Z. B. können die Extremalen, die durch den Anfangspunkt der Koordinaten hindurchgehen, folgendermaßen geschrieben werden

$$x_1 = 3at^2 + 2bt, \qquad x_2 = at^3 + bt^2,$$

und man berechnet, daß die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(a, b)} = t^4,$$

wie es sein soll, nicht identisch Null ist.

Für die Probleme der Klasse Null ist es außerordentlich einfach, die hinreichenden Bedingungen für die Existenz eines Minimums und auch die Theorie der konjugierten Punkte aufzustellen. Diese Dinge sind wiederholt, zuletzt von *Morse* (s. Fußnote [2]) c)), behandelt worden. Die Behauptung von *Morse*, daß die üblichen Methoden hier versagen, ist aber nur bedingt richtig. Man kann sehr gut die gewöhnliche Methode benutzen, wenn man sich eines Kunstgriffes bedient, den *L. Tonelli* erfunden hat[7]).

14. *Probleme mit endlichen Gleichungen als Nebenbedingungen.*

Unter den Lagrangeschen Problemen, deren Klasse nicht verschwindet, sind diejenigen am einfachsten zu behandeln, die unter den Nebenbedingungen einige von der Gestalt

$$\psi(t, x_j) = \text{const.}, \tag{14.1}$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, Nebenbedingungen von der Form

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x_j}\dot{x}_j = 0 \tag{14.2}$$

[7]) *L. Tonelli.* Sul problema isoperimetrico con un punte terminale mobile (Mem. R. Acc. Bologna (7) Vol. 10, 1922—23). S. auch Geod. Aequid. p. 217.

enthalten. Allgemeiner kann man verlangen, daß nach einer geeigneten Punkttransformation die Hamiltonsche Funktion $H(t, x_i, y_i)$ in den neuen Koordinaten die Veränderlichen $(y_{m+1}, \ldots, y_n)$ nicht enthält.

Die Behandlung dieser Probleme kann man offenbar auf diejenige eines Problems in einem Raume niedrigerer Dimension zurückführen, und in diesem reduzierten Raume kann die Klasse des Problems sehr wohl gleich Null sein.

Dies ist z. B. der Fall, wenn man das Lagrangesche Problem mit der Hamiltonschen Funktion

$$H = \frac{(y_1 - y_2)^2}{2} \tag{10.3}$$

betrachtet; man verifiziert sofort auch auf direktem Wege, daß man hier

$$n = 2,\ p = 1,\ q = 1 \tag{14.4}$$

hat.

15. *Die Mayerschen Probleme.*

Eine andere Art von Lagrangeschen Problemen, deren Behandlung bekanntlich keine Schwierigkeiten bereitet, sind die sogenannten Mayerschen Probleme, *solange diese von der Klasse Eins sind.*

Die Mayerschen Probleme sind solche, bei denen die Funktion $L(t, \dot{x}_i)$ die Gestalt hat

$$L = U_t + U_{x_i} \dot{x}_i. \tag{15.1}$$

Definiert man dann nach (3.2) die Funktion M, so hat man weiter mit Benutzung von (15.1)

$$y_i = M_{\dot{x}_i} = U_{x_i} + \mu_{k'} \frac{\partial G_{k'}}{\partial \dot{x}_i} \tag{15.2}$$

$$H = -L + y_i \dot{x}_i = -U_t + \mu_{k'} \frac{\partial G_{k'}}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i. \tag{15.3}$$

Setzt man also

$$\bar{y}_i = y_i - U_{x_i}, \qquad \bar{H} = H + U_t, \tag{15.4}$$

so muß man, um $\bar{H}$ zu berechnen, die $\dot{x}_i$, $\mu_{k'}$ als Funktionen von $(t, x_i, \bar{y}_i)$ aus den Gleichungen

$$\bar{y}_i = \mu_{k'} \frac{\partial G_{k'}}{\partial \dot{x}_i}, \qquad G_{k'} = 0 \tag{15.5}$$

entnehmen, und hierauf

$$\bar{H} = \bar{y}_i \dot{x}_i \tag{15.6}$$

setzen. Aus den Gleichungen (15.5) folgt, daß die $\dot{x}_i$ als homogene Funktionen von der nullten Ordnung in den $\bar{y}_j$ erscheinen, und daher muß $\bar{H}$ homogen erster Ordnung in diesen Größen sein. Man hat also

$$\bar{H} = \bar{y}_j \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{y}_j}; \tag{15.7}$$

nun ist aber auch

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{y}_j} = H_{y_j}, \tag{15.8}$$

und man kann statt der Gleichung (15.7) mit Benutzung von (15.4) und (15.8) schreiben

$$H = -U_t + (y_j - U_{x_j}) H_{y_j}. \tag{15.9}$$

Die Identität (15.9) ist andererseits charakteristisch dafür, daß das vorliegende Problem ein Mayersches sei; denn die Gleichung (15.1) folgt aus

$$L = -H + y_i H_{y_i}, \qquad \dot{x}_i = H_{y_i}, \tag{15.10}$$

sobald (15.9) besteht.

16. Es ist sehr leicht zu zeigen, daß die Klasse der Mayerschen Probleme, wie zu erwarten ist, immer von Null verschieden ist. Differentiiert man nämlich die Identität (15.9) nach x_i und y_i, so erhält man

$$H_{x_i} = -U_{tx_i} - U_{x_i x_j} H_{y_j} + (y_j - U_{x_j}) H_{x_i y_i} \tag{16.1}$$

$$0 = (y_j - U_{x_j}) H_{y_i y_j}. \tag{16.2}$$

Setzt man also jetzt, um Anschluß an die Bezeichnungen der §§ 8-12 zu bekommen,

$$\eta_i = y_i - U_{x_i}, \tag{16.3}$$

so folgt durch Differentiation längs einer Extremalen

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_i &= \dot{y}_i - U_{tx_i} - U_{x_i x_j} \dot{x}_j \\ &= -H_{x_i} - U_{tx_i} - U_{x_i x_j} H_{y_j}, \end{aligned}$$

also mit Berücksichtigung von (16. 1) und (16. 3)

$$\dot{\eta}_i = -\eta_j H_{x_i y_i}. \tag{16.4}$$

Andererseits hat man nach (16. 2) und (16. 3)

$$\eta_j H_{y_i y_j} = 0. \tag{16.5}$$

Sind also die Größen η_i nicht alle identisch Null, so besagen die beiden letzten Gleichungen, daß die Differentialgleichungen (10. 1) Lösungen besitzen, die den Bedingungen (10. 2) genügen. Hier ist also immer $q > 0$.

Die einzigen Extremalen auf welchen die vorige Schlußweise nicht anwendbar ist, sind diejenigen, längs welchen alle $y_i = U_{x_i}$ sind; diese werden aber öfters, wie das folgende Beispiel zeigt, auch aus anderen Gründen ausgeschlossen.

17. *Beispiel.*

Es sei eine einzige Differentialgleichung, nämlich

$$G = \sum_1^n \dot{x}_i^2 - 1 = 0 \tag{17.1}$$

gegeben. Man hat dann

$$\bar{y}_i = 2\mu \dot{x}_i \tag{17.2}$$

und

$$\bar{H} = \bar{y}_i \dot{x}_i = 2\mu.$$

Andererseits folgt aus (17.2) und (17.1)

$$\Sigma \bar{y}_i^2 = 4\mu^2$$

und es ist daher

$$\bar{H} = \sqrt{\Sigma \bar{y}_i^2}\,, \tag{17.3}$$

also nach (15.4)

$$H = -U_t + \sqrt{\Sigma (y_i - U_{x_i})^2}\,. \tag{17.4}$$

Für die Legendresche Bedingung hat man nun nach Geod. Äquid. p. 220.

$$D(\varrho) = D(0)\,|\,\delta_{ij} - \varrho H_{y_i y_j}\,|$$

und man findet nach einigen Rechnungen

$$D(\varrho) = D(0)\left(1 - \frac{\varrho}{\bar{H}}\right)^{n-1}. \tag{17.5}$$

Die Legendresche Bedingung ist also dann und nur dann erfüllt, wenn $\bar{H} > 0$ ist, woraus folgt, daß nicht alle $y_i = U_{x_i}$ sein dürfen.

18. ***Höhere Singularitäten.***

Die Lagrangeschen Probleme der Variationsrechnung, die nicht unter die schon genannten Kategorien fallen, sind fast gar nicht erforscht worden.

Das einzige mir bekannte derartige Beispiel, das in allen Einzelheiten behandelt ist, befindet sich in meiner Dissertation[8]). Es handelt sich um folgendes Problem:

Eine Kugel wird von ihrem Mittelpunkt aus auf eine ihrer Tangentialebenen projiziert; man verlangt zwei Punkte dieser Ebene durch eine Kurve von gegebener Länge zu verbinden, die den Schatten einer möglichst kurzen sphärischen Kurve darstellt.

Die Lösung besteht hier immer aus zwei geradlinigen einen Winkel bildenden Strecken, wobei die Winkelhalbierende stets durch den Berührungspunkt der Kugel mit der Ebene hindurchgeht.

[8]) *C. Carathéodory.* Ueber die diskontinuierlichen Lösungen in de Variationsrechnung. (Gött. Diss. 1904) p. 50—62.

Als Lagrangesches Problem aufgefasst, ist die Klasse dieses Problems gleich Eins, solange man nur kontinuierliche Extremalen betrachtet; durch die Einführung der diskontinuierlichen Lösungen geht nun das Problem in ein solches von der Klasse Null über.

19. Es gibt aber auch Fälle, in denen auch die Betrachtung diskontinuierlicher Lösungen nichts nützen kann. Nehmen wir z. B. die Hamiltonsche Funktion

$$H = \frac{(y_1 - f(t)\, x_1 y_2)^2}{2\,(1 - y_2)} - \frac{\dot{f}(t)\, x_1^2 y_2}{2} \tag{19.1}$$

an. Man setze zur Abkürzung

$$\frac{y_1 - f(t)\, x_1 y_2}{1 - y_2} = \alpha\,. \tag{19.2}$$

Die Differentialgleichungen der Extremalen lauten dann

$$\dot{x}_1 = \quad H_{y_1} = \alpha \tag{19.3}$$

$$\dot{x}_2 = \quad H_{y_2} = \frac{\alpha^2}{2} - f(t)\, x_1\, \alpha - \dot{f}(t)\, \frac{x_1^2}{2} \tag{19.4}$$

$$\dot{y}_1 = -H_{x_1} = f(t)\, y_2\, \alpha + \dot{f}(t)\, y_2\, x_1 \tag{19.5}$$

$$\dot{y}_2 = -H_{x_2} = 0. \tag{19.6}$$

Man hat hier in der Tat $p = 1$, weil aus (19.3) und (19.4) folgt

$$\dot{x}_2 = \frac{\dot{x}_1^2}{2} - f(t)\, x_1 \dot{x}_1 - \dot{f}(t)\, \frac{x_1^2}{2}\,. \tag{19.7}$$

Andererseits entnimmt man aus (19.3) und (19.5)

$$\dot{y}_1 = y_2 \frac{d}{dt}(f x_1)\,;$$

da nun nach (19.6) y_2 konstant ist, folgt aus der letzten Gleichung

$$y_1 - f x_1 y_2 = \text{const.} \tag{19.8}$$

und es ist daher auch α eine Konstante. Jetzt kann man, wegen (19. 3) schreiben

$$x_1 = \alpha t + \beta \tag{19.9}$$

und aus (19. 7) folgt dann die Berechnung von $x_2(t)$ durch eine Quadratur. Aus dem letzten Resultat sieht man, daß die Gesamtheit der Extremalen durch einen Punkt eine zweidimensionale Fläche bilden, und daß daher $q = 1$ ist.

Diskontinuierliche Lösungen sind hier nicht vorhanden; aus (19. 2) bis (19. 4) folgt nämlich, daß, wenn man y_1 und y_2 vorgibt, die Größen $\dot{x}_1$ und $\dot{x}_2$ *eindeutig* bestimmt werden.

Endlich sieht man daß die Legendresche Bedingung immer erfüllt ist, wenn $y_2 < 1$ ist, denn man berechnet ganz ähnlich wie im § 17

$$D(\varrho) = D(0)\left(1 - \frac{(1 - y_2)^2 + (y_1 - f x_1)^2}{(1 - y_2)^3}\,\varrho\right).$$

Eine eingehendere Untersuchung scheint also hier notwendig zu sein.

(Eingegangen den 27. Februar 1932)