Ueber eine Eigenschaft der Raumkurven.

Ueber eine Eigenschaft der Raumkurven

Von W. SCHERRER, Bern

Die Eigenschaft der Schraubenlinie, auf einem ausgezeichneten Zylinder zu verlaufen, scheint auf den ersten Blick von sehr individueller Natur zu sein. Es besteht aber die überraschende Tatsache, daß jeder beliebigen Raumkurve in eindeutiger Weise eine ausgezeichnete abwickelbare Regelfläche zugeordnet werden kann, welche im Falle der Schraubenlinie in den Schraubenzylinder übergeht.

Bei der Herleitung dieser Beziehung leistet die Vektoralgebra vorzügliche Dienste. Ich bezeichne in der üblichen Weise Vektoren mit deutschen Buchstaben $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots\ldots \mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ und speziell das skalare Produkt mit $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, das vektorielle mit $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]$.

Wir betrachten nun eine beliebige Raumkurve C, wählen auf ihr die Bogenlänge s als Parameter und stellen ihren Verlauf in bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem dar durch den vom Ursprung O zum laufenden Punkt $P(s)$ führenden Ortsvektor $\mathfrak{x}(s)$.

Zu dem beliebigen aber bestimmten $P_0 = P(s_0)$ auf C konstruieren wir jetzt auf folgende Weise eine neue Raumkurve $\overline{C}(s_0)$: Wir ziehen auf der Tangentenfläche von C eine zu den Tangenten orthogonale Trajektorie, welche durch P_0 läuft. Sie sei bezeichnet mit C^*. Hierauf errichten wir in jedem Punkte P^* von C^* die Normalebene m der durch P^* laufenden Erzeugenden der Tangentenfläche. Wir erhalten so eine einparametrige Schar von Ebenen und die von ihr eingehüllte Raumkurve $\overline{C}(s_0)$ soll die neue Raumkurve sein, welche den Mittelpunkt der nachfolgenden Betrachtungen bildet.

Es wird sich zeigen, daß $\overline{C}(s_0)$ ebenfalls durch P_0 läuft, Ich könnte also die eben beschriebene Konstruktion wiederholen, indem ich nun in bezug auf $\overline{C}(s_0)$ als Ausgangskurve durch P_0 eine analoge Kurve $\overline{\overline{C}}(s_0)$ bestimmen würde. Es wird sich aber herausstellen, daß $\overline{\overline{C}}(s_0)$ wieder mit der ursprünglichen Kurve C *zusammenfällt.* Ich nenne daher $\overline{C}(s_0)$ die zu C *reziproke Kurve* durch P_0.

Variiert man nun den Punkt P_0, also s_0 in $\overline{C}(s_0)$, so erhält man die Gesamtheit der zu C reziproken Raumkurven, die offenbar eine Fläche F bildet. Greife ich eine bestimmte Kurve $\overline{C}(s_0)$ heraus, so kann ich in analoger Weise die Gesamtheit der zu ihr reziproken Raumkurven zu einer Fläche $\bar{F}(s_0)$ zusammenfassen. Mit dem Parameter s_0 deuten wir an, daß bei Abänderung von s_0 eine Veränderung von $\bar{F}(s_0)$ zu erwarten ist, da ja $\bar{C}(s_0)$ in eine andere Kurve übergeht. Wir werden aber im Gegensatz zu dieser Vermutung als Hauptergebnisse unserer Untersuchung folgende Aussagen gewinnen:

1. *Die Fläche $\bar{F}(s_0)$ hängt nicht vom Parameter s_0 ab, sondern fällt für jeden Wert von s_0 mit der ursprünglichen Fläche F zusammen.*
2. *Die somit einzig vorhandene Fläche F ist eine abwickelbare Regelfläche.*

Um den Beweis für diese Behauptungen zu führen, suchen wir den expliziten Ausdruck für den Ortsvektor des laufenden Punktes der reziproken Kurve $\bar{C}(s_0)$. Zu dem Zwecke führen wir das begleitende Dreibein des laufenden Punktes $P = P(s)$ auf der ursprünglichen Kurve C ein. Tangente, Normale, Binormale, Krümmung und Torsion in diesem Punkte seien bezeichnet mit $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{b}$, $\varkappa$ und τ. Neben der Gleichung

$$\mathfrak{x}'(s) = \mathfrak{t} \tag{1}$$

gelten dann die Formeln von Frenet:

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}' &= \qquad \varkappa\mathfrak{n} \\ \mathfrak{n}' &= -\varkappa\mathfrak{t} \qquad\quad + \tau\mathfrak{b} \\ \mathfrak{b}' &= \qquad -\tau\mathfrak{n} \end{aligned} \tag{2}$$

Außerdem führen wir den Darboux'schen Vektor $\mathfrak{d}$ der Momentandrehung des begleitenden Dreibeins ein:

$$\mathfrak{d} = \tau\mathfrak{t} + \varkappa\mathfrak{b}. \tag{3}$$

Die durch den Punkt $P_0 = P(s_0)$ laufende Trajektorie C^* ist zugleich eine Fadenevolvente von C. Der Ortsvektor $\mathfrak{x}^*$ ihres laufenden Punktes P^* ist also als Funktion von s gegeben durch

$$\mathfrak{x}^* = \mathfrak{x}(s) - (s - s_0)\,\mathfrak{t}(s)\,.$$

Die Gleichung der Normalebene zu der durch P^* laufenden Erzeugenden der Tangentenfläche lautet:

$$\mathfrak{t}(s)\,\mathfrak{y} = \mathfrak{t}(s)\,\mathfrak{x}(s) - (s - s_0)\,.$$

Hier ist $\mathfrak{y}$ der laufende Punkt dieser Ebene.

Wir wollen nun im folgenden den Parameter s als Argument nur noch schreiben, wenn es für das bessere Verständnis notwendig erscheint.

Die Punkte $\mathfrak{y}$ der gesuchten Hüllkurve $\bar{C}(s_0)$ müssen nun folgenden Bedingungen genügen:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{t}\mathfrak{y} &= \mathfrak{t}\mathfrak{y} - (s - s_0) \\
\mathfrak{n}\mathfrak{y} &= \mathfrak{n}\mathfrak{x} \\
\mathfrak{b}\mathfrak{y} &= \mathfrak{b}\mathfrak{x} - \varkappa\tau^{-1}(s - s)\,.
\end{aligned}$$

Die beiden letzten dieser Gleichungen erhält man in bekannter Weise aus der ersten durch zweimalige Ableitung nach s bei festem $\mathfrak{y}$ unter Berücksichtigung der Formeln (2) von Frenet. Liegen allgemein drei derartige Gleichungen vor:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}\mathfrak{y} &= a \\
\mathfrak{b}\mathfrak{y} &= b \\
\mathfrak{c}\mathfrak{y} &= c\,,
\end{aligned}$$

so lautet ihre Auflösung in Vektorform:

$$\mathfrak{y} = \frac{a\,[\mathfrak{b}, \mathfrak{c}] + b\,[\mathfrak{c}, \mathfrak{a}] + c\,[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]}{\mathfrak{a}\,[\mathfrak{b}, \mathfrak{c}]}\,.$$

Die Anwendung auf unsern Fall liefert bei Beachtung der Relationen

$$[\mathfrak{n}, \mathfrak{b}] = \mathfrak{t}\,;\quad [\mathfrak{b}, \mathfrak{t}] = \mathfrak{n}\,;\quad [\mathfrak{t}, \mathfrak{n}] = \mathfrak{b}$$

und der Definition (3) die Lösung:

$$\boxed{\mathfrak{y} = \mathfrak{x}(s) - \tau^{-1}(s) \cdot (s - s_0)\,\mathfrak{d}(s)\,.}$$

Hält man in dieser Darstellung s_0 fest, so liefert sie die durch $P_0 = P(s_0)$ laufende Reziproke $\bar{C}(s_0)$, als Funktion der Bogenlänge von C. Variiert man aber auch s_0, so erhält man die am Anfang beschriebene Fläche F. Man sieht unmittelbar, daß F eine Regelfläche darstellt. Hält man nämlich s fest und variiert s_0, so resultiert eine Gerade durch den Punkt $P(s)$ (deren Ortsvektor ja $\mathfrak{x}(s)$ ist), deren Richtung durch den Darboux'schen Vektor $\mathfrak{d}(s)$ in diesem Punkte gegeben ist.

Wir wollen nun zeigen, daß man dieselbe Fläche erhält, wenn man eine der reziproken $\bar{C}(s_0)$ herausgreift und zu ihr in entsprechender Weise die Fläche $\bar{F}(s_0)$ konstruiert. Zur Vereinfachung der Rechnung können wir annehmen, daß P_0 dem Anfangspunkt der Parameterzählung, also dem Werte $s_0 = 0$ entspreche und wollen diesen Punkt von nun an mit O bezeichnen. Die zugehörige Reziproke $\bar{C}(0)$ bezeichnen wir kurz mit C. Ihre Gleichung lautet, wenn wir mit $\bar{\mathfrak{x}}$ ihren Ortsvektor bezeichnen:

$$\bar{\mathfrak{x}}(s) = \mathfrak{x}(s) - s \cdot \tau^{-1} \mathfrak{d}(s) .$$

Ihr Dreibein, ihre Bogenlänge, Krümmung und Torsion bezeichnen wir entsprechend mit $\bar{\mathfrak{t}}$, $\bar{\mathfrak{n}}$, $\bar{\mathfrak{b}}$, $\bar{x}$ und $\bar{\tau}$. Um nun die analoge Konstruktion durchzuführen, müssen wir in erster Linie die Bogenlänge $\bar{s}$ ermitteln. Wenn man in (5) für $\mathfrak{d}$ den Ausdruck $\tau\mathfrak{t} + x\mathfrak{b}$ wieder einführt, erhält man leicht:

$$\frac{d\bar{\mathfrak{x}}}{ds} = -\left\{s \cdot \tau^{-1}(s)\ x(s)\right\}'\ \mathfrak{b} .$$

Nun folgt aus $\left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right)^2 = \left(\frac{d\bar{\mathfrak{x}}}{ds}\right)^2$ die gesuchte Bogenlänge:

$$\bar{s} = s \cdot \tau^{-1}(s)\ x(s) .$$

Jetzt erhält man $\bar{\mathfrak{t}}$ aus

$$\bar{\mathfrak{t}} = \frac{d\bar{\mathfrak{x}}}{d\bar{s}} = \frac{d\bar{\mathfrak{x}}}{ds} : \frac{d\bar{s}}{ds}$$

und in analoger Weise alle übrigen zu $\bar{\mathfrak{t}}$ gehörigen Größen. Wir stellen die sämtlichen so sich ergebenden Ausdrücke in einer Tabelle zusammen:

$$\begin{array}{|l|}
\hline
\bar{s} = s\tau^{-1}x \\
\bar{\mathfrak{t}} = -\mathfrak{b} \\
\bar{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n} \\
\bar{\mathfrak{b}} = \mathfrak{t} \\
\bar{x} = \tau\left\{(s\tau^{-1}x)'\right\}^{-1} \\
\bar{\tau} = -x \cdot \left\{(s\tau^{-1}x)'\right\}^{-1} \\
\bar{\mathfrak{d}} = \left\{(s\tau^{-1}x)'\right\}^{-1}\mathfrak{d} . \\
\hline
\end{array}$$

In diesen Gleichungen sind also alle rechts vorkommenden Größen Funktionen von s und der Strich bedeutet die Ableitung nach s.

Nun können wir leicht erkennen, daß die Fläche $\bar{F}$ mit F zusammenfällt. Die Gleichung (5) gestattet nämlich folgende Interpretation: Der dem Punkt $\mathfrak{x}(s)$ von C entsprechende Punkt $\bar{\mathfrak{x}}(s)$ von $\bar{C}$ liegt auf der durch $\mathfrak{x}(s)$ laufenden Erzeugenden von F. Durch den Punkt $\bar{\mathfrak{x}}$ geht andererseits eine Erzeugende von $\bar{F}$. Nach der letzten Gleichung von (6) fällt aber ihre Richtung mit derjenigen der ersten Erzeugenden zusammen, F und $\bar{F}$ haben somit dieselben Erzeugenden, sind also identisch.

Die Wahl des Ausgangspunktes O war willkürlich, entsprechend der Festsetzung des Nullpunktes für s. Also gilt allgemein $\bar{F}(s_0) = F$. Damit ist die erste Behauptung bewiesen.

Nun können wir leicht beweisen, daß die gefundene Regelfläche F abwickelbar ist. Wir brauchen nur zu zeigen, daß die Flächennormale längs einer Erzeugenden eine konstante Richtung aufweist. Wir bestimmen zunächst die Flächennormale im Punkte O $(s = 0)$. Hier gilt:

$$\mathfrak{N} = [\mathfrak{t}, \bar{\mathfrak{t}}] = [\mathfrak{t}, -\mathfrak{b}] = \mathfrak{n}\,.$$

Also fällt für jeden Punkt von C die Flächennormale $\mathfrak{N}$ mit der Kurvennormale $\mathfrak{n}$ zusammen. Zufolge der gefundenen Reziprozität gilt dasselbe auch längs $\bar{C}$ und somit schließlich für alle Reziproken. Betrachten wir nun speziell den Punkt $\mathfrak{x}(s)$ auf C und den ihm auf den zugehörigen Erzeugenden von F entsprechenden Punkt $\bar{\mathfrak{x}}(s)$ auf $\bar{C}$ (siehe (5)). Die dritte der Gleichungen (6) ergibt $\bar{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}$ und nach dem obigen also $\bar{\mathfrak{N}} = \mathfrak{N}$. Halte ich nun den Punkt $\bar{\mathfrak{x}}(s)$ fest, verschiebe hingegen O auf C, so durchläuft der Punkt $\bar{\mathfrak{x}}(s)$ die ganze zu $\mathfrak{x}(s)$ gehörige Erzeugende und immer ist die jeweilige Flächennormale $\bar{\mathfrak{N}}$ gleich der festen Normalen $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{x}(s)$. Damit ist die aufgestellte Behauptung bewiesen.

Man kann noch bemerken, daß zufolge der Relation $\mathfrak{t}\,\bar{\mathfrak{t}} = -\mathfrak{t}\mathfrak{b} = 0$ die Reziproken sich gegenseitig rechtwinklig durchsetzen.

Im Falle der gewöhnlichen Schraubenlinie sind $\varkappa$ und τ konstant und man bestätigt leicht, daß die gefundene Fläche F den Schraubenzylinder darstellt.

(Eingegangen den 7. März 1932)