

# Sur un théorème de Steiner.

Autor(en): **Kollros, L. / Marchand, J.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **6 (1934)**

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-7586>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Sur un Théorème de Steiner

Extraits d'une correspondance échangée entre MM. L. KOLLROS,  
Zurich et J. MARCHAND, Lausanne

Kollros à Marchand.

..... Voici le théorème de Steiner que j'ai trouvé dans un manuscrit du 27 décembre 1824:

„Sur un cercle, on a  $n$  points:  $1, 2, 3, \dots, n$ ; ils déterminent  $\binom{n}{2}$  cordes:  $\overline{12}, \overline{13}, \overline{23}, \dots$ . Si l'on abaisse d'un autre point quelconque  $A$  du cercle des perpendiculaires à ces cordes, les pieds:  $12, 13, 23, \dots$  de ces perpendiculaires sont trois à trois sur  $\binom{n}{3}$  droites:  $\overline{123}, \overline{124}, \dots$ . Sur ces droites, on abaisse de nouveau des perpendiculaires du point  $A$ ; leurs pieds:  $123, 124, \dots$  sont quatre à quatre sur  $\binom{n}{4}$  droites, et ainsi de suite. On arrive enfin à  $\binom{n}{n-1} = n$  droites; les pieds des perpendiculaires abaissées de  $A$  sur ces  $n$  droites sont encore en ligne droite.“

Steiner en a donné deux démonstrations; voici celle qui me paraît la plus simple.

Pour  $n = 3$ ,  $\overline{123}$  est la droite de Simson de  $A$  pour le triangle  $1, 2, 3$ ; pour  $n = 4$ , la droite  $\overline{1234}$  est la tangente au sommet de la parabole inscrite au quadrilatère  $\overline{123}, \overline{124}, \overline{134}, \overline{234}$ ; (les quatre cercles de centres  $1, 2, 3, 4$  menés par  $A$  se coupent encore aux six sommets d'un quadrilatère homothétique au précédent).

Pour  $n = 5$ , Steiner remarque que, par chaque point à deux chiffres, par exemple  $12$ , il passe trois droites à trois chiffres ( $\overline{123}, \overline{124}, \overline{125}$ ). Les pieds ( $123, 124, 125$ ) des perpendiculaires abaissées de  $A$  sur ces trois droites sont sur un cercle passant par  $A$  et  $12$ . Les côtés du triangle ( $123, 124, 125$ ) sont les droites à quatre chiffres ( $\overline{1234}, \overline{1235}, \overline{1245}$ ) et la droite de Simson de  $A$  pour ce triangle est la droite  $\overline{12345}$ . On peut la désigner ainsi, car chacun des cinq points  $1234, 1235, 1245, 1345, 2345$  est sur la droite déterminée par deux quelconques des autres.

On démontre de la même manière que, si le théorème est vrai pour  $n - 2$  et  $n - 1$  points du cercle, il l'est encore pour  $n$  points.

Voici le texte du manuscrit:

„Durch jeden Punkt zu zwei Nummern gehen  $(n - 2)$  Geraden zu drei Nummern, die zusammen alle  $n$  Nummern enthalten. Fällt man aus dem Grundpunkt  $A$  auf diese  $(n - 2)$  Geraden Lote, so liegen die Fußpunkte zu drei Nummern mit  $A$  und dem Punkt zu zwei Nummern zusammen in einem Kreis. Durch jeden Fußpunkt zu drei Nummern gehen  $(n - 3)$  Geraden zu vier Nummern. Werden auf diese Geraden aus  $A$  Lote gefällt, so erhält man die Fußpunkte zu vier Nummern; durch jeden derselben gehen  $(n - 4)$  Geraden zu fünf Nummern usw. Am Ende gelangt man zu Fußpunkten zu  $(n - 3)$  Nummern; in jedem schneiden sich drei Geraden zu  $(n - 2)$  Nummern. Fällt man auf diese Lote aus  $A$ , so liegen die drei Fußpunkte mit  $A$  in einem Kreis. Drei solche zusammengehörige Fußpunkte zu  $(n - 2)$  Nummern bestimmen aber paarweise drei Geraden zu  $(n - 1)$  Nummern, die zusammen  $n$  Nummern enthalten, und da sie mit  $A$  in einem Kreis liegen, so liegen die Fußpunkte zu  $(n - 1)$  Nummern der aus  $A$  auf diese drei Geraden gefällten Lote in einer Geraden. Da dies für je drei Geraden zu  $(n - 1)$  Nummern stattfindet, so folgt daraus, daß die Fußpunkte der aus  $A$  auf die  $n$  Geraden gefällten Lote in einer Geraden liegen.“

Le 29 décembre 1824, Steiner note le théorème que Miquel a trouvé 21 ans plus tard (Journal de Liouville X, p. 349): „Durch 4 Geraden entsteht ein Kreis (1, 2, 3, 4) und ein Punkt  $A$ . Bei 5 Geraden entstehen 5 solche Kreise und 5 solche Punkte: die 5 Kreise schneiden sich in einem Punkte  $B$  und die 5 Punkte  $A$  liegen in einem Kreis  $a$  der ebenfalls durch den Punkt  $B$  geht.“

„Es ist nun zu vermuten, daß bei 6 Geraden die 6 Punkte  $B$  ebenfalls in einem Kreis liegen, und daß die 6 Kreise  $a$  mit diesem Kreis sich in einem Punkt schneiden; kurz es muß hiebei irgend ein Gesetz obwalten, welches sich auf jede folgende Anzahl Geraden erstreckt.“

C'est le théorème que Clifford a trouvé en 1870 (Math. Papers, p. 38). .....

Marchand à Kollros.

..... Il m'a semblé qu'il vaut la peine d'établir le nouveau théorème de Steiner par le procédé même que la géométrie projective fournit pour la démonstration des théorèmes de Miquel et de Clifford; procédé que l'on peut considérer comme une méthode générale dans les questions de cette nature, ainsi que vous l'avez montré dans votre conférence à la S. M. S., lors de la réunion de Lausanne, en 1928.

Voici une démonstration qui me paraît simple et très harmonieuse.

Soit, sur le cercle, les  $n$  points 1, 2, 3, ...,  $n$  et le point  $A$  considérés par Steiner. Nommons  $B$  le point du cercle diamétralement opposé à  $A$ ,  $t$  la tangente au cercle en  $B$  et  $I$  et  $\mathcal{F}$  les points cycliques du plan. Représentons, enfin, par  $C_n$  une courbe quelconque d'ordre  $n$  et par  $\Gamma_n$  une courbe quelconque de classe  $n$ .

A tout groupe de  $p$  points du cercle, nous allons attacher une  $\Gamma_p$ , une droite  $d$  et le pied  $P$  de la perpendiculaire abaissée de  $A$  sur  $d$ .

Par définition, la  $\Gamma_n$  attachée au groupe des points 1, 2, 3, ...,  $n$  sera apolaire à toutes les  $C_n$  circonscrites au triangle  $AI\mathcal{F}$  et à toutes les  $C_n$  passant par les points 1, 2, 3, ...,  $n$  et ayant en  $B$  un point multiple d'ordre  $n - 1$ .

L'apolarité aux  $C_n$  passant par  $A$ ,  $I$  et  $\mathcal{F}$  soumet la  $\Gamma_n$  à

$$\frac{1}{2}n(n+3) - 2$$

conditions linéaires.

Les  $C_n$  passant par 1, 2, 3, ...,  $n$  et ayant en  $B$  un point multiple d'ordre  $n - 1$  forment un système linéaire de dimension  $n$ . Ce système contient  $n - 1$  courbes, linéairement indépendantes, formées du cercle et de  $n - 2$  droites issues de  $B$ , qui sont apolaires à la  $\Gamma_n$  parce qu'elles passent par  $A$ ,  $I$  et  $\mathcal{F}$ . Deux autres de ces  $C_n$  imposent à la  $\Gamma_n$  deux nouvelles conditions linéaires et complètent la base du système.

La première polaire de la droite joignant  $B$  à l'un quelconque des points du groupe de  $n$  points, soit la première polaire de  $B$  1, est apolaire aux  $C_{n-1}$  passant par  $A$ ,  $I$  et  $\mathcal{F}$  et aux  $C_{n-1}$  passant par les autres points du groupe et ayant en  $B$  un point multiple d'ordre  $n - 2$ . C'est la  $\Gamma_{n-1}$  attachée au groupe de  $n - 1$  points 2, 3, ...,  $n$ .

Il s'ensuit que les  $\Gamma_{n-1}$  attachées aux groupes de  $n - 1$  points que l'on déduit du groupe 1, 2, 3, ...,  $n$  par la suppression d'un point appartiennent au faisceau tangentiel des premières polaires des droites passant par  $B$  par rapport à la  $\Gamma_n$  attachée au groupe 1, 2, 3, ...,  $n$ .

Les points polaires de la tangente  $t$  par rapport à ces  $\Gamma_{n-1}$  sont alors sur une droite, la droite  $d$  que nous attachons au groupe de  $n$  points 1, 2, 3, ...,  $n$ .

Enfin,  $d$  est la polaire de  $B$  par rapport à la conique polaire de  $t$  par rapport à la  $\Gamma_n$ . Cette conique polaire, apolaire aux  $C_2$  passant par  $A$ ,  $I$  et  $\mathcal{F}$  est une hyperbole équilatère de centre  $A$ . Le point polaire de  $t$  par rapport à la  $\Gamma_n$  est le pied  $P$  de la perpendiculaire abaissée de  $A$  sur  $d$ . (Le produit des distances du centre d'une hyperbole équilatère à un point et à sa polaire par rapport à l'hyperbole étant constant).

Le théorème de Steiner se déduit immédiatement des faits précédents. On peut l'établir en suivant l'énoncé même de Steiner. On le conçoit mieux dans l'ordre inverse, c'est-à-dire de la façon suivante :

A la paire de points 12, attachons la conique admettant les deux triangles polaires  $AI\mathcal{F}$  et  $B12$ , inscrits dans le cercle ; soit l'hyperbole équilatère  $\Gamma_2$  de centre  $A$  conjuguée au triangle  $B12$ .

Le pôle de  $t$  par rapport à cette hyperbole est le pied  $P$  de la perpendiculaire abaissée de  $A$  sur la droite 12.

Au terne de points 123, attachons la  $\Gamma_3$  apolaire aux  $C_3$  circonscrites au triangle  $AI\mathcal{F}$  et aux  $C_3$  passant par 1, 2 et 3 et ayant un point double en  $B$ .

Les premières polaires des droites issues de  $B$  par rapport à cette  $\Gamma_3$  forment un faisceau tangentiel contenant les  $\Gamma_2$  attachées aux paires de points 12, 23 et 31. Le lieu des pôles de  $t$  par rapport à ces premières polaires est la droite  $d$ , attachée au terne 123 ; elle contient les points  $P$ , pieds des perpendiculaires abaissées de  $A$  sur les droites 12, 23 et 31. Le point polaire de  $t$  par rapport à cette  $\Gamma_3$  est le pied de la perpendiculaire abaissée de  $A$  sur  $d$  ; c'est le point  $P$  attaché au terne 123.

Au groupe de 4 points 1234, attachons la  $\Gamma_4$  correspondante ; les points  $P$  attachés aux ternes 123, 234, 341, 412 sont sur la droite  $d$  attachée au groupe 1234 et le point polaire de  $t$  par rapport à cette  $\Gamma_4$  est le pied de la perpendiculaire abaissée de  $A$  sur  $d$ . Etc. ...

(Reçu le 12 juin 1933)

