L'équation ...3+...3+...3 = 0 et la courbe x3 + y3 = 1.

Autor(en): **Mirimanoff, D.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **6 (1934)**

PDF erstellt am: **29.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-7589

L'équation $\xi^3+\eta^3+\zeta^3=0$ et la courbe $x^3+y^3=1$

par D. MIRIMANOFF, Genève

On sait que l'équation

$$(1) \qquad \xi^3+\eta^3+\zeta^3=0,$$

impossible en nombres entiers rationnels non nuls, admet des solutions dans certains corps quadratiques $k(\sqrt{m})$. En 1913, M. Fueter[1]) a fait connaître des propriétés importantes de ces corps particuliers et a indiqué un procédé permettant de déduire d'une solution de (1) dans $k(\sqrt{m})$ une infinité d'autres. Un procédé différent, retrouvé récemment par M. F. J. Duarte[2]), a été indiqué d'autre part par W. Burnside en 1914[3]). Je montrerai que les transformations de W. Burnside-Duarte et de M. Fueter peuvent être obtenues à l'aide de considérations géométriques extrêmement simples.

Rappelons d'abord qu'en vertu d'une propriété établie par W. Burnside et M. Fueter[4]) et retrouvée aussi par M. Duarte, on peut, dans l'étude de l'équation (1), n'envisager que les solutions que M. Fueter a appelées solutions spéciales. Ce sont les solutions dans lesquelles l'un des nombres ξ, η, ζ, par exemple ζ, est un nombre entier rationnel, tandis que les deux autres (ξ, η) sont des nombres conjugués entiers de $k(\sqrt{m})$.

Si l'on pose $x=-\frac{\xi}{\zeta}$, $y=-\frac{\eta}{\zeta}$, on voit qu'à toute solution de (1) correspond un point de la courbe

$$(2) \qquad x^3+y^3=1$$

dont les coordonnées sont deux nombres conjugués de $k(\sqrt{m})$. Nous pouvons donc poser

$$(3) \qquad x+y=\frac{u}{v},$$

---

1) *R. Fueter,* Die diophantische Gleichung $\xi^3+\eta^3+\zeta^3=0$. Sitzungsber. der Heidelberger Akad. der Wiss., Heidelberg, 1913.

2) La note de M. *Duarte* paraîtra prochainement dans le t. XXXII de l'Ens. Math.

3) *W. Burnside,* On the rational solutions of the equation $X^3+Y^3+Z^3=0$ in quadratic fields. Proc. London Math. Soc. vol. 14, p. 1.

4) *R. Fueter,* Ueber kubische diophantische Gleichungen. Commentarii mathematici helvetici. Vol. 2, p. 69.

u et v étant deux nombres entiers rationnels positifs ou négatifs, qu'on peut supposer premiers entre eux (mais ce n'est pas indispensable). On en tire

$$(4) \qquad x = \frac{3u^2 \pm \sqrt{3u(4v^3 - u^3)}}{6uv}, \qquad y = \frac{3u^2 \mp \sqrt{3u(4v^3 - u^3)}}{6uv}$$

et l'on voit que toutes les solutions spéciales de (2) et par conséquent de (1) qui font partie des corps quadratiques $k(\sqrt{m})$ s'obtiennent de (4) en donnant à u et v des valeurs entières (on peut supposer u premier à v et $u > 0$)[5]). A tout couple u, v correspondent deux points de la courbe (2) symétriques par rapport à la bissectrice de XOY et à tout point de (2) dont les coordonnées sont deux nombres conjugués d'un corps $k(\sqrt{m})$ correspond un nombre rationnel et un seul $\rho = \frac{u}{v}$ et une infinité de couples équivalents u, v.

Soient maintenant P_1, P_2 deux points de la courbe (2) dont les coordonnées font partie d'un même corps $k(\sqrt{m})$. Il est évident que la droite passant par les points P_1, P_2 coupe la courbe en un point dont les coordonnées font encore partie de $k(\sqrt{m})$[6]).

La transformation de W. Burnside et de M. Duarte. En particulier, la tangente en P_1 fournit une solution nouvelle de (2). Je montrerai qu'on obtient ainsi la solution indiquée par Burnside et M. Duarte. Si, en effet, u_1, v_1 est un couple relatif au point P_1 d'abscisse $x_1 = \frac{3u_1^2 + \sqrt{3u_1(4v_1^3 - u_1^3)}}{6u_1v_1}$ et si l'on désigne par D le point où la tangente en P_1 coupe la courbe (2), on vérifie aisément que les couples u, v relatifs à D sont donnés par la formule

$$(5) \qquad \frac{u}{v} = \frac{u_1(4v_1^3 - u_1^3)}{v_1(2u_1^3 + v_1^3)}$$

[5]) Ces formules ont déjà été indiquées, sous une forme un peu différente, par Burnside[3]) et M. Fueter[4]); cf. aussi M. Duarte[2]).

[6]) C'est là une construction très bien connue, que A. Hurwitz appelait « construction fondamentale ». Cf. *A. Hurwitz,* Ueber ternäre diophantische Gleichungen dritten Grades. Vierteljahrschrift der Naturf. Ges. in Zürich, t. 62, 1917, p. 207.

et que l'abscisse du point D est

$$(6) \qquad x = \frac{3u_1^2(4v_1^3 - u_1^3)^2 + q\sqrt{3u_1(4v_1^3 - u_1^3)}}{6u_1 v_1 (4v_1^3 - u_1^3)(2u_1^3 + v_1^3)}$$

où

$$q = u_1^6 + 10u_1^3 v_1^3 - 2v_1^6.$$

Or, on retrouve les mêmes expressions en introduisant dans les formules de M. Duarte les paramètres u_1, v_1 ou bien en posant dans celles de Burnside $k = -\frac{v_1}{u_1}$. Du reste, ce résultat peut être établi d'une manière plus directe.

La transformation de M. Fueter. Pour obtenir la transformation de M. Fueter, je vais partir d'un lemme dont la démonstration ne présente aucune difficulté.

Lemme. Si u_1, v_1 et u_2, v_2 sont deux couples relatifs aux points P_1, P_2 de (2) d'abscisses

$$x_1 = \frac{3u_1^2 + \sqrt{3u_1(4v_1^3 - u_1^3)}}{6u_1 v_1}$$

$$x_2 = \frac{3u_2^2 + \sqrt{3u_2(4v_2^3 - u_2^3)}}{6u_2 v_2}$$

et que $\sqrt{3u_2(4v_2^3 - u_2^3)} = q\sqrt{3u_1(4v_1^3 - u_1^3)}$, q étant un nombre entier, les couples u_3, v_3 relatifs au troisième point d'intersection de la droite P_1, P_2 avec (2) sont liés aux couples u_1, v_1 et u_2, v_2 par la relation

$$(7) \quad \frac{u_1}{v_1} + \frac{u_2}{v_2} + \frac{u_3}{v_3} = \frac{(q u_1 v_1 - u_2 v_2)(q u_1^2 - v_1^2)(4v_1^3 - u_1^3)}{u_2 v_1 v_2 \left\{2u_1 v_1 v_2^2 + 2u_2 v_1^2 v_2 - u_1^2 u_2^2 - q u_1 (4v_1^3 - u_1^3)\right\}}.$$

Cette relation[7]) permet de calculer $\frac{u_3}{v_3}$, lorsqu'on connaît $\frac{u_1}{v_1}$ et $\frac{u_2}{v_2}$.

Soit maintenant D' le symétrique du point D par rapport à la bissectrice de XOY.

[7]) La relation (7) a encore lieu, lorsque $\frac{u_1}{v_1}$ et $\frac{u_2}{v_2}$ sont des nombres irrationnels quelconques.

En vertu de (6), l'abscisse x_2 de D' est donnée par la formule

$$x_2 = \frac{3u_2^2 - q\sqrt{3u_1(4v_1^3 - u_1^3)}}{6u_2 v_2} \tag{8}$$

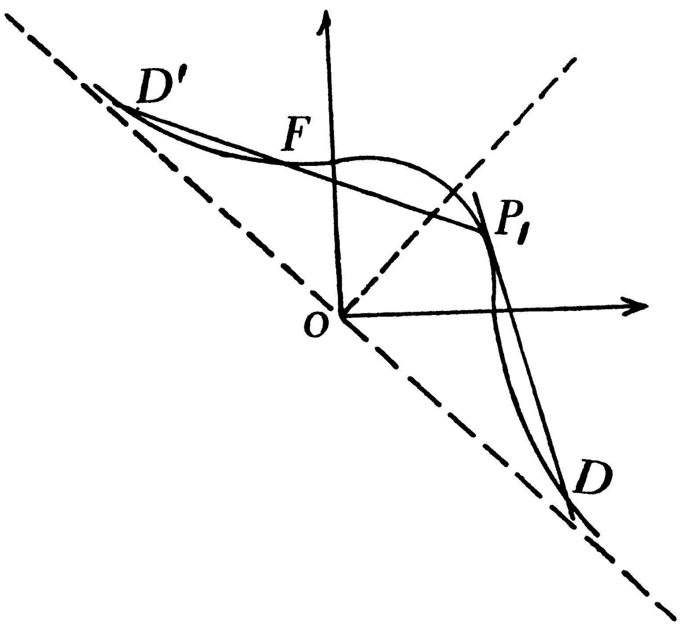
où

$$u_2 = u_1(4v_1^3 - u_1^3)$$

$$v_2 = v_1(2u_1^3 + v_1^3) \tag{9}$$

$$q = u_1^6 + 10u_1^3 v_1^3 - 2v_1^6.$$

La droite passant par P_1 et D' coupera la courbe (2) en un point que j'appellerai le point F. Je dis que la solution nouvelle qu'on trouve de cette manière est la solution de M. Fueter.



En effet, en remplaçant dans (7) u_2, v_2 et q par leurs expressions (9), on obtient, après quelques simplifications,

$$\frac{u_1}{v_1} + \frac{u_2}{v_2} + \frac{u_3}{v_3} = \frac{u_1}{v_1} \frac{(u_1^6 - 17u_1^3 v_1^3 - 2v_1^6)(u_1^6 + u_1^3 v_1^3 + 7v_1^6)}{(2u_1^3 + v_1^3)(u_1^9 - 3u_1^6 v_1^3 - 24u_1^3 v_1^6 - v_1^9)}$$

d'où

$$\frac{u_3}{v_3} = \frac{u_1\{3v_1(u_1^3 - v_1^3)\}^2}{27u_1^3 v_1^6 - (u_1^3 - v_1^3)^3}. \tag{10}$$

Or, on retrouve les mêmes couples en introduisant les paramètres u_1, v_1 dans les formules de M. Fueter.

On voit donc que la solution de M. Fueter s'obtient en menant une droite par le point P_1 (solution connue) et le symétrique D' du point D de Burnside-Duarte.

M. Fueter a montré que sa transformation s'obtient en appliquant deux fois une transformation plus simple qui a pour effet de multiplier le nombre m de $k(\sqrt{m})$ par -3. Je ferai voir qu'une construction géométrique analogue à la précédente permet aussi de retrouver la transformation intermédiaire de M. Fueter.

Posons
$$r = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$$

et envisageons le couple

$$u = r\, u_2$$
$$v = v_2$$

u_2, v_2 étant le couple (9) relatif à D'. A ce couple correspondent deux points de (2) dont les coordonnées ne font pas partie du corps $k(\sqrt{m})$. Soit D'' celui de ces points qui s'obtient de D' en multipliant ses coordonnées par r. Le nombre correspondant q est donné par la formule

$$q = -r^2 (u_1^6 + 10 u_1^3 v_1^3 - 2 v_1^6)$$

et l'on vérifie aisément que la droite $P_1 D''$ coupe (2) en un point qu'on obtient en appliquant à P_1 la transformation intermédiaire de M. Fueter.

Pour le montrer, partons de la relation (7) et posons

$$u_2 = r\, u_1 (4 v_1^3 - u_1^3)$$
$$v_2 = v_1 (2 u_1^3 + v_1^3).$$

Le second membre de (7) devient

$$\frac{u_1}{v_1 (u_1^3 - v_1^3)(2u_1^3 + v_1^3)} \times \frac{\{u_1^6 + 10 u_1^3 v_1^3 - 2 v_1^6 + r^2 (4 v_1^3 - u_1^3)(2 u_1^3 + v_1^3)\}\{u_1^6 + u_1^3 v_1^3 + 7 v_1^6\}}{u_1^6 + 4 u_1^3 v_1^3 - 5 v_1^6 - r (4 v_1^3 - u_1^3)(u_1^3 + 2 v_1^3)}.$$

Mais cette expression se simplifie en décomposant le numérateur et le dénominateur de la deuxième fraction en facteurs et l'on obtient finalement

$$\frac{u_1}{v_1}+\frac{u_2}{v_2}+\frac{u_3}{v_3}=\frac{u_1\left\{2(u_1^3-v_1^3)-r(u_1^3+2v_1^3)\right\}\left\{u_1^3+2v_1^3+3rv_1^3\right\}}{v_1(u_1^3-v_1^3)(2u_1^3+v_1^3)}.$$

On en tire

$$(11)\qquad \frac{u_3}{v_3}=\frac{3u_1v_1^2}{u_1^3-v_1^3},$$

et l'on retrouve, comme il est facile de s'en assurer, les couples définissant la transformation intermédiaire de M. Fueter.

Transformations analogues à celles de M. Fueter et de Burnside-Duarte. Dans les formules de M. Fueter et de Burnside, les paramètres u et v sont des polynômes homogènes de même degré en u_1 et v_1. Dans la transformation de Burnside (9) ce degré est égal à 4, dans celle de M. Fueter à 9. On pourrait se demander s'il existe des transformations de forme analogue, mais de degrés plus petits (inférieurs à 4 ou compris entre 4 et 9). La réponse es très probablement négative. On peut montrer en tout cas que le polynôme u est toujours divisible par u_1. Les transformations u, v peuvent donc être réparties en deux classes: celles dans lesquelles u est aussi divisible par $4v_1^3-u_1^3$ et celles dans lesquelles $4v_1^3-u_1^3$ divise $4v^3-u^3$. La transformation de Burnside-Duarte rentre dans la première classe, celle de M. Fueter dans la seconde. Or, le degré d'une transformation de première classe étant au moins égal à 4, on voit que c'est parmi les transformations de deuxième classe qu'il faut chercher des transformations de degrés inférieurs.

D'autre part, dans les transformations de deuxième classe u est nécessairement de la forme

$$u_1 P^2(u_1, v_1)$$

$P(u_1, v_1)$ étant un polynôme homogène en u_1 et v_1. Le degré de u est donc un nombre impair $= 3, 5, 7$.

On peut montrer que le polynôme $P(u_1, v_1)$ ne saurait être du premier degré. Mais le degré de P pourrait-il être égal à 2 ou à 3? Je crois inutile d'indiquer ici les calculs qui permettraient, s'ils étaient poussés plus loin, de donner une réponse précise à cette question.

Sur une propriété du nombre des classes de $k(\sqrt{m})$. Dans son mémoire de 1913, M. Fueter a fait connaître une propriété importante des corps $k\sqrt{m})$ dans lesquels l'équation (1) ou (2) admet des solutions[8]). Il a montré que le nombre des classes de ces corps est divisible par 3, si le nombre m, supposé non divisible par un carré, est négatif et $\equiv 2$ (mod. 3). Ce théorème comporte des corollaires curieux et s'énonce d'une manière différente, lorsqu'on introduit les paramètres u, v. Supposons par exemple que le paramètre u, premier à v, soit de la forme $3u'$, u' étant un nombre entier positif non divisible par 3. Le radical $\sqrt{3u(4v^3 - u^3)}$ s'écrira $3\sqrt{u'(4v^3 - 27u'^3)} = 3n\sqrt{m}$, n étant un nombre entier non divisible par 3. Or, n^2 étant $\equiv 1$ (mod. 3), la congruence $m \equiv 2\ (3)$ est équivalente à $u'(4v^3 - 27u'^3) \equiv 2\ (3)$. D'autre part $u'(4v^3 - 27u'^3) \equiv u'v$. Si donc $u'v \equiv 2\ (3)$ ou, ce qui revient au même, si $u' + v \equiv 0\ (3)$ et si $4v^3 < 27u'^3$, le nombre des classes du corps $k(\sqrt{u'(4v^3 - 27u'^3)})$ est divisible par 3.

D'autres conséquences, que je crois inutile d'indiquer, peuvent être déduites du théorème de M. Fueter.

Il est à désirer que les belles recherches de M. Fueter soient reprises et continuées.

Je tiens en terminant à adresser mes remerciements les plus vifs à M. Fueter pour les indications précieuses qu'il a bien voulu me donner.

(Reçu le 28 août 1933)

[8]) Dans son Mémoire des C. M. H.[4]) M. Fueter a montré que cette propriété n'est qu'un cas spécial d'une propriété beaucoup plus générale de l'équation $z^3 - y^2 = D$.